

Inferenzmethoden



Einheit 16

Modallogiken



1. Syntax & Semantik
2. Erweiterung des Extensionsverfahrens

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
 - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
 - Formel F ist beweisbar
 - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
 - Möglicherweise ist F gültig

MODALLOGIKEN

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
 - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
 - Formel F ist beweisbar
 - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
 - Möglicherweise ist F gültig
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren \Box , \Diamond**
 - \Box , \Diamond sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
 - Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F ” $\Diamond F$: “möglicherweise F ”

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
 - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
 - Formel F ist beweisbar
 - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
 - Möglicherweise ist F gültig
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren \Box , \Diamond**
 - \Box , \Diamond sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
 - Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F ” $\Diamond F$: “möglicherweise F ”
- **Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung**
 - Je nachdem, ob \Box als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird
 - $(\forall x \Box Px) \Rightarrow \Box(\exists x Px)$ ist nicht für jede Interpretation gültig

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
 - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
 - Formel F ist beweisbar
 - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
 - Möglicherweise ist F gültig
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren \Box , \Diamond**
 - \Box , \Diamond sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
 - Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F ” $\Diamond F$: “möglicherweise F ”
- **Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung**
 - Je nachdem, ob \Box als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird
 - $(\forall x \Box Px) \Rightarrow \Box(\exists x Px)$ ist nicht für jede Interpretation gültig
- **Beweisverfahren:**
 - (Erweiterte) Sequenzenkalküle
 - Konnektionsbeweiser + Transformation der Formeln in Prädikatenlogik
 - Modifizierter Konnektionsbeweiser mit Präfixen für Modaloperatoren

● Interpretation von Formeln abhängig von Welten

- In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
- Modaloperatoren interpretieren relativ zu **denkbaren Welten**
 - mögliche zukünftige Entwicklung
 - mögliche vergangene Ereignisse
 - mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
 - mathematische Theorien der Beweisbarkeit

● Interpretation von Formeln abhängig von Welten

- In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
- Modaloperatoren interpretieren relativ zu denkbaren Welten
 - mögliche zukünftige Entwicklung
 - mögliche vergangene Ereignisse
 - mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
 - mathematische Theorien der Beweisbarkeit

● Kripke Semantik über Weltmodelle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, u)$

- \mathcal{W} : Menge der (denkbaren) Welten
- \mathcal{R} : Erreichbarkeitsrelation zwischen Welten aus \mathcal{W}
- \mathcal{U} : Universum aller Objekte aller Welten
- $u: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}(U)$: $u(w) \hat{=}$ die in Welt w existierenden Objekte

● Interpretation von Formeln abhängig von Welten

- In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
- Modaloperatoren interpretieren relativ zu denkbaren Welten
 - mögliche zukünftige Entwicklung
 - mögliche vergangene Ereignisse
 - mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
 - mathematische Theorien der Beweisbarkeit

● Kripke Semantik über Weltmodelle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, u)$

- \mathcal{W} : Menge der (denkbaren) Welten
- \mathcal{R} : Erreichbarkeitsrelation zwischen Welten aus \mathcal{W}
- \mathcal{U} : Universum aller Objekte aller Welten
- $u: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$: $u(w) \hat{=}$ die in Welt w existierenden Objekte

Eigenschaften von \mathcal{R} bestimmen Bedeutung der Modaloperatoren

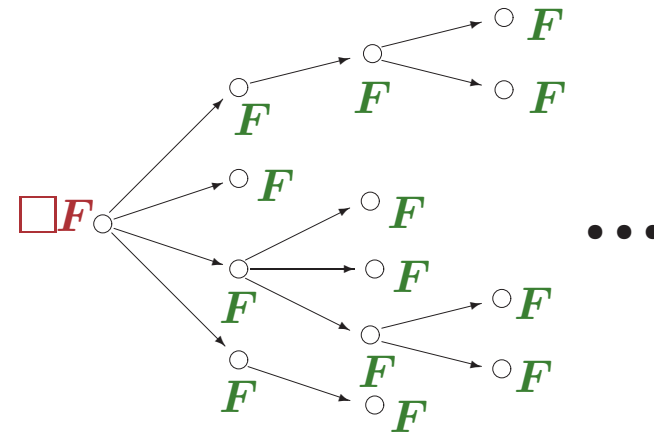
KRIPKE-SEMANTIK VON MODALOPERATOREN

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

KRIPKE-SEMANTIK VON MODALOPERATOREN

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

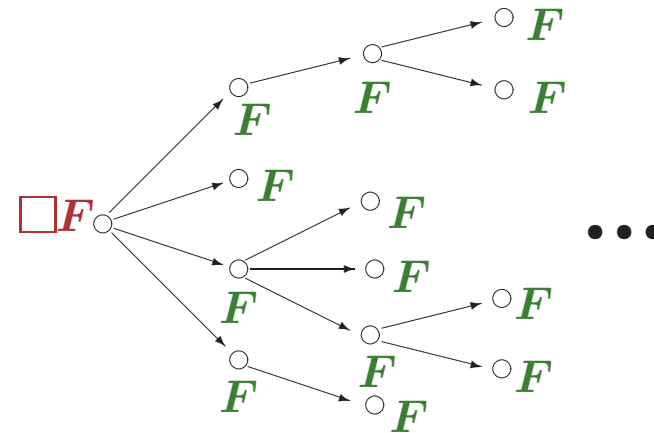
- $\Box F$: F gilt in allen erreichbaren Welten



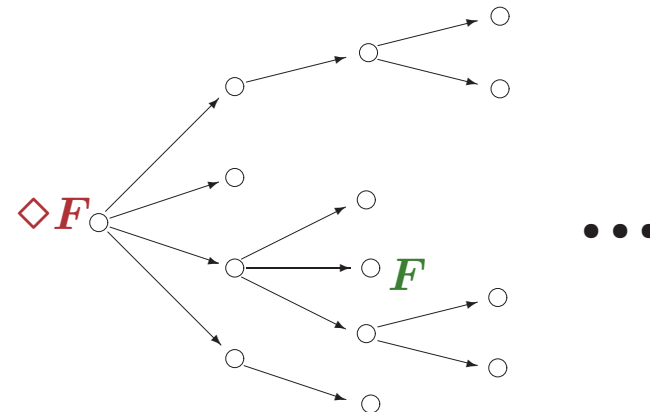
KRIPKE-SEMANTIK VON MODALOPERATOREN

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

- $\Box F$: F gilt in allen erreichbaren Welten



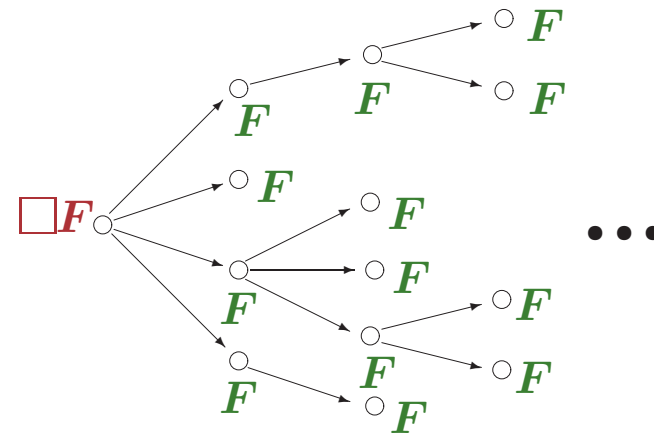
- $\Diamond F$: F gilt in mindestens einer erreichbaren Welt



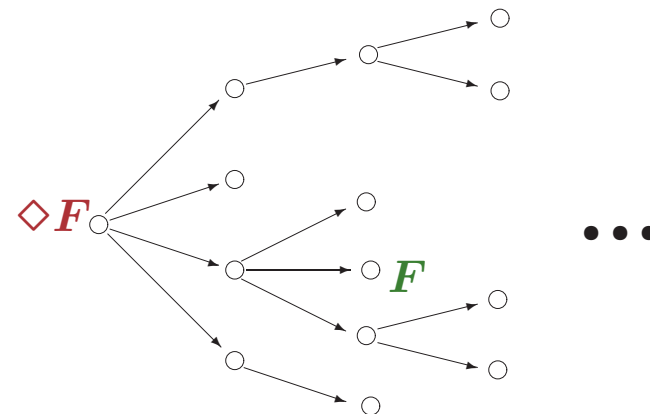
KRIPKE-SEMANTIK VON MODALOPERATOREN

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

- $\Box F$: F gilt in allen erreichbaren Welten



- $\Diamond F$: F gilt in mindestens einer erreichbaren Welt



- F : F gilt in allen Welten

ERREICHBARKEIT UND MODALE AXIOME

● Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df)	Definition von \diamond	$\diamond F \Leftrightarrow \neg \Box \neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		<i>Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik</i>
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

ERREICHBARKEIT UND MODALE AXIOME

● Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df)	Definition von \diamond	$\diamond F \Leftrightarrow \neg \Box \neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		<i>Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik</i>
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

● Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation

(D)	seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T)	reflexiv	$w R w$ für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B)	symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4)	transitiv	$w_1 R w_2 \ \& \ w_2 R w_3 \Rightarrow w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5)	euklidisch	$w_1 R w_2 \ \& \ w_1 R w_3 \Rightarrow w_2 R w_3$ oder $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

ERREICHBARKEIT UND MODALE AXIOME

● Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df)	Definition von \diamond	$\diamond F \Leftrightarrow \neg \Box \neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		<i>Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik</i>
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

● Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation

(D)	seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T)	reflexiv	$w R w$ für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B)	symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4)	transitiv	$w_1 R w_2 \ \& \ w_2 R w_3 \Rightarrow w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5)	euklidisch	$w_1 R w_2 \ \& \ w_1 R w_3 \Rightarrow w_2 R w_3$ oder $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

● Durch R induzierte Axiome für \Box

(D)	seriell	$\Box F \Rightarrow \diamond F$	<i>“Was ich glaube, ist auch möglich”</i>
(T)	reflexiv	$\Box F \Rightarrow F$	<i>“Was beweisbar ist, ist auch gültig”</i>
(B)	symmetrisch	$F \Rightarrow \Box \diamond F$	<i>“Ist F wahr, dann weiß man, daß F möglich ist”</i>
(4)	transitiv	$\Box F \Rightarrow \Box \Box F$	<i>“Ich weiß, was ich weiß”</i>
(5)	euklidisch	$\diamond F \Rightarrow \Box \diamond F$	

DIE WICHTIGSTEN MODALLOGIKEN

<i>Name</i>	<i>Eigenschaften von R</i>	<i>Axiome</i>
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

DIE WICHTIGSTEN MODALLOGIKEN

<i>Name</i>	<i>Eigenschaften von R</i>	<i>Axiome</i>
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

- $F \Rightarrow \Box F$ gilt trotz der Notwendigkeitsregel nicht
 - $\vdash F \quad \hat{=} \text{“}F \text{ gilt in jeder Welt } w \in \mathcal{W}\text{”}$
 - $\vdash \Box F \quad \hat{=} \text{“Für alle } w \in \mathcal{W} \text{ gilt } F \text{ gilt in jeder von } w \text{ erreichbaren Welt”}$
 - $\vdash F \Rightarrow \Box F \quad \hat{=} \text{“In jeder Welt } w \in \mathcal{W} \text{ folgt } \Box F \text{ aus } F \text{”}$

DIE WICHTIGSTEN MODALLOGIKEN

<i>Name</i>	<i>Eigenschaften von R</i>	<i>Axiome</i>
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

- $F \Rightarrow \Box F$ gilt trotz der Notwendigkeitsregel nicht

$\vdash F \hat{=} \text{“}F \text{ gilt in jeder Welt } w \in \mathcal{W}\text{”}$

$\vdash \Box F \hat{=} \text{“Für alle } w \in \mathcal{W} \text{ gilt } F \text{ gilt in jeder von } w \text{ erreichbaren Welt”}$

$\vdash F \Rightarrow \Box F \hat{=} \text{“In jeder Welt } w \in \mathcal{W} \text{ folgt } \Box F \text{ aus } F \text{”}$

Deduktionstheorem “ $\vdash F$ folgt aus $\vdash E$ genau dann, wenn $\vdash E \Rightarrow F$ gilt”
gilt nicht für Modallogiken (und konstruktive Logik)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

- In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

- In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$
 - Es gelte $F \Rightarrow G$

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$

(Kontraposition)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$

(Kontraposition)

– Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$

(RN)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$

(Kontraposition)

– Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$

(RN)

– Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$

(K, MP)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

– Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)

– Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)

– Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

– Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)

– Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)

– Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)

– Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

- In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$

- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)

- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)

- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)

- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

- In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$
- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

● In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

- Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

- In **K** folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$

- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)

- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)

- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)

- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

- In **K** folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

- Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

- In **T** gilt $F \Rightarrow \diamond F$

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$
- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

● In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

- Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

● In T gilt $F \Rightarrow \diamond F$

- Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$
- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

● In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

- Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

● In T gilt $F \Rightarrow \diamond F$

- Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)
- Daraus folgt $\neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ (Kontraposition)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

● In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

- Es gelte $F \Rightarrow G$
- Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
- Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
- Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
- Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
- Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

● In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

- Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

● In T gilt $F \Rightarrow \diamond F$

- Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)
- Daraus folgt $\neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ (Kontraposition)
- Es folgt $F \Rightarrow \diamond F$ (PL, Df)

EXTENSIONSVERFAHREN FÜR MODALLOGIKEN

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

EXTENSIONSVERFAHREN FÜR MODALLOGIKEN

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich
 - Erweiterter Komplementaritätsbegriff erforderlich
 - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
 - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich
 - Erweiterter Komplementaritätsbegriff erforderlich
 - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
 - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
 - Uniformes Pfadüberprüfungsverfahren für Nichtnormalform-Matrizen

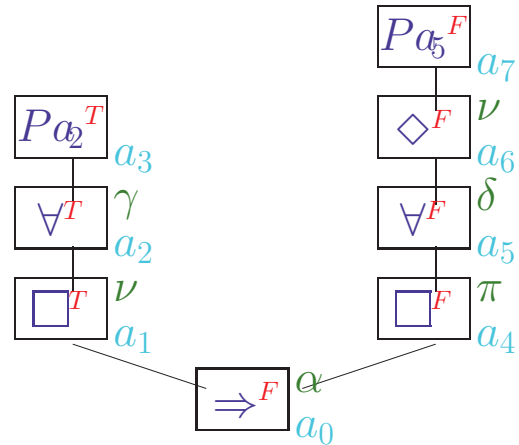
Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich
 - Erweiterter Komplementaritätsbegriff erforderlich
 - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
 - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
 - Uniformes Pfadüberprüfungsverfahren für Nichtnormalform-Matrizen
 - Erweiterter Komplementaritätstest
 - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ -Variablen durch Terme
 - Präfixunifikation liefert Substitution σ_M für modale Präfixe

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen erforderlich
 - Erweiterter Komplementaritätsbegriff erforderlich
 - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
 - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Reihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
 - Uniformes Pfadüberprüfungsverfahren für Nichtnormalform-Matrizen
 - Erweiterter Komplementaritätstest
 - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ -Variablen durch Terme
 - Präfixunifikation liefert Substitution σ_M für modale Präfixe
 - Substitutionen codieren Einschränkungen an Reihenfolge der Regeln
 - Eigenschaften von R codiert in Bedingungen an Zulässigkeit von σ_M

MODALE PRÄFIXE

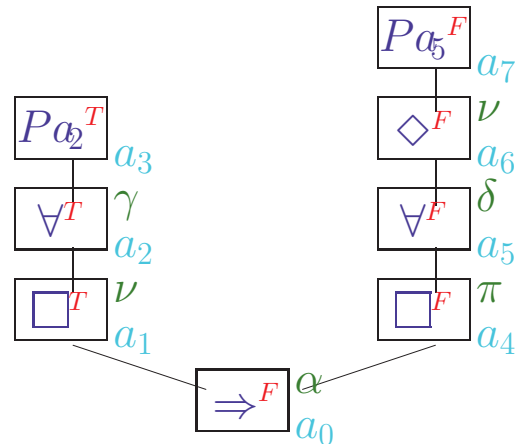


● Weise Positionen **modale Typen** zu

- **Typ ν** : \square^T , \diamond^F
- **Typ π** : \square^F , \diamond^T

Variablen
Konstante

MODALE PRÄFIXE



$$\left[A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T \right] \quad \text{S5}$$

- Weise Positionen **modale Typen** zu

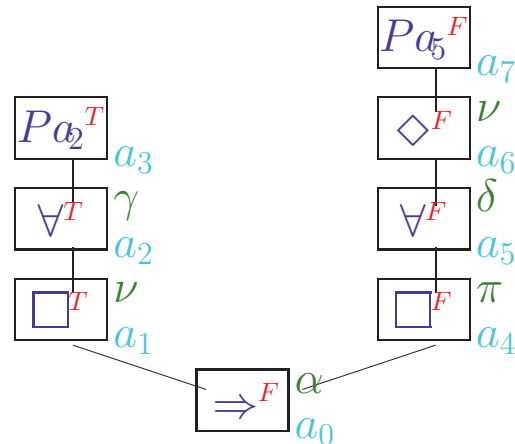
- **Typ ν** : \square^T , \diamond^F
- **Typ π** : \square^F , \diamond^T

Variablen
Konstante

- Bestimme **Präfix** eines Atoms P

- Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
- Letzte modale Position vor P für Logik S5

MODALE PRÄFIXE



$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{S5}$$

- Weise Positionen **modale Typen** zu

- **Typ ν** : \square^T, \diamond^F
- **Typ π** : \square^F, \diamond^T

Variablen
Konstante

- Bestimme **Präfix** eines Atoms P

- Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
- Letzte modale Position vor P für Logik S5

- Definiere **modale Substitution** σ_M

- Abbildung von ν -Positionen in Strings über modalen Positionen
- σ_M induziert **Reduktionsordnung** \sqsubseteq_M auf modalen Positionen:
Ist $\sigma_M(u) = v_1 \dots v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_M u$ für jede π -Position v_i

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
- **σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme**
 - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
- **σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme**
 - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
- **σ_M : Ersetze φ -Variablen durch Strings**
 - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
- **σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme**
 - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
- **σ_M : Ersetze φ -Variablen durch Strings**
 - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
 - Gesamte **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_M)^+$ ist azyklisch
 - Kommt eine δ -Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u)|$
($|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u)| \leq |\sigma_M(pre_v)| + 1$ für T und D)
 - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

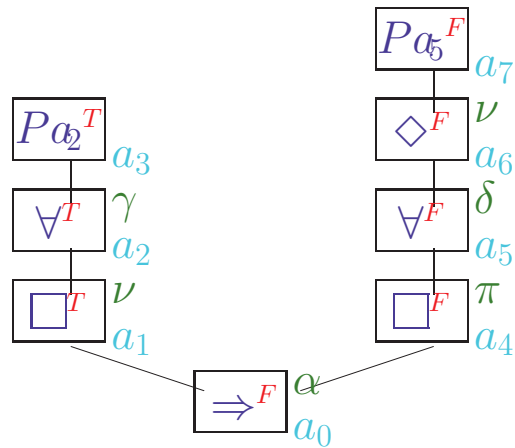
- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
- **σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme**
 - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
- **σ_M : Ersetze φ -Variablen durch Strings**
 - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
 - Gesamte Reduktionsordnung $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_M)^+$ ist azyklisch
 - Kommt eine δ -Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(\text{pre}_v)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_u)|$
($|\sigma_M(\text{pre}_v)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_u)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_v)| + 1$ für T und D)
 - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1
- **Modale Multiplizität $\mu_M(a_i)$**
 - Anzahl der Kopien des ν -Knotens im Baum

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
- **σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme**
 - Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
- **σ_M : Ersetze φ -Variablen durch Strings**
 - Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
 - Gesamte Reduktionsordnung $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_M)^+$ ist azyklisch
 - Kommt eine δ -Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u)|$
($|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u)| \leq |\sigma_M(pre_v)| + 1$ für T und D)
 - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1
- **Modale Multiplizität $\mu_M(a_i)$**
 - Anzahl der Kopien des ν -Knotens im Baum

Eine modale Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität $\mu = (\mu_Q, \mu_M)$, eine zulässige Substitution $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$ und eine Menge \mathcal{C} von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus \mathcal{C} enthält

MODALER MATRIXBEWEIS

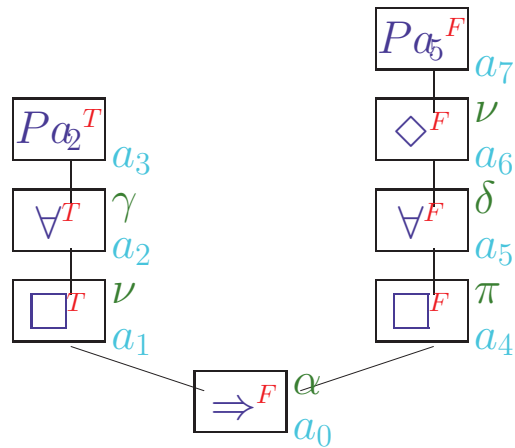


$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{S5}$$

- Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt

MODALER MATRIXBEWEIS

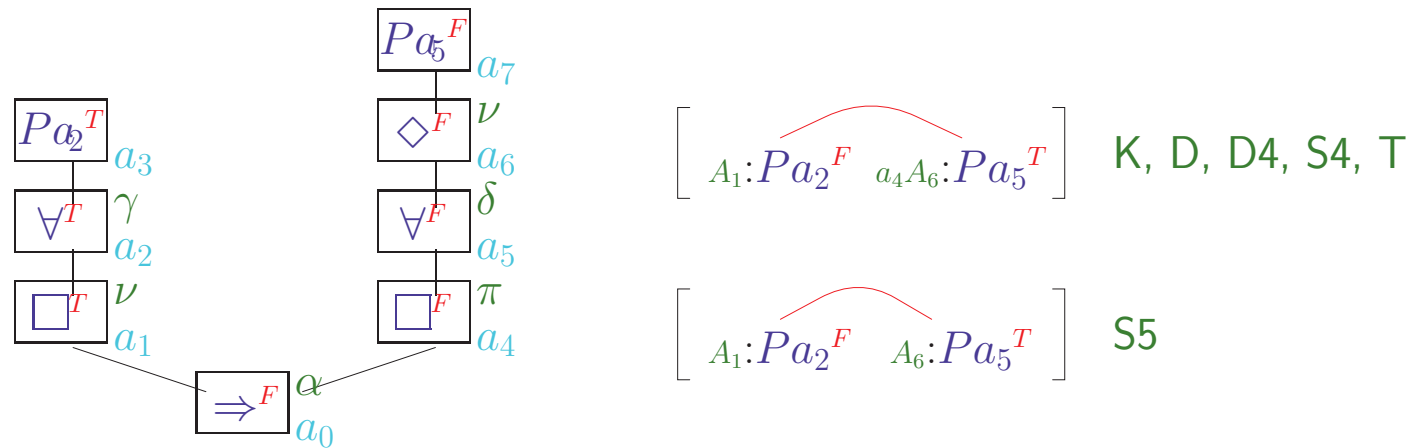


$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{S5}$$

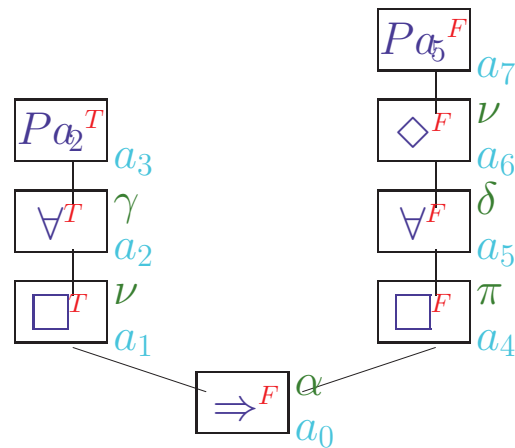
- Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt
- Terme gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$
 - Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$

MODALER MATRIXBEWEIS



- **Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**
- **Terme gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$**
 - Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$
- **Drei allgemeinste Unifikatoren**
 - $\sigma_{M_1} = [a_4A_6/A_1]$ zulässig für D4 und S4
 - $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1, \varepsilon/A_6]$ zulässig für S4 und T
 - $\sigma_{M_3} = [a_4/A_1, a_4/A_6]$ zulässig für für S5
 - σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzt Längenbedingung für D
 - σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ -Positionen für T, σ_{M_2} für D4

MODALER MATRIXBEWEIS



$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{S5}$$

- **Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**
- **Terme gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$**
 - Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$
- **Drei allgemeinste Unifikatoren**
 - $\sigma_{M_1} = [a_4A_6/A_1]$ zulässig für D4 und S4
 - $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1, \varepsilon/A_6]$ zulässig für S4 und T
 - $\sigma_{M_3} = [a_4/A_1, a_4/A_6]$ zulässig für für S5
 - σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzt Längenbedingung für D
 - σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ -Positionen für T, σ_{M_2} für D4
- **Die Formel ist gültig in D4, T, S4, S5 aber nicht in D**

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
 - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 14

EXTENSIONSVERFAHREN FÜR MODALLOGIK

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
 - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 14
- **Komplementaritätstest unify_check wird erweitert**
 - Bekanntes Termunifikationsverfahren
 - Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
 - Überprüfung der Zulässigkeit

EXTENSIONSVERFAHREN FÜR MODALLOGIK

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
 - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 14
- **Komplementaritätstest unify_check wird erweitert**
 - Bekanntes Termunifikationsverfahren
 - Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
 - Überprüfung der Zulässigkeit
- **Anwendbar auf D, D4, T, S4, S5**
 - Regeln für Präfixunifikation in K, K4 vorhanden
 - Matrixcharakterisierung für K, K4, B formal noch nicht abgesichert

EXTENSIONSVERFAHREN FÜR MODALLOGIK

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
 - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 14
- **Komplementaritätstest unify_check wird erweitert**
 - Bekanntes Termunifikationsverfahren
 - Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
 - Überprüfung der Zulässigkeit
- **Anwendbar auf D, D4, T, S4, S5**
 - Regeln für Präfixunifikation in K, K4 vorhanden
 - Matrixcharakterisierung für K, K4, B formal noch nicht abgesichert

Weitere Details in Literatur auf Webseite