Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 7 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 16.06.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was bedeutet Unlösbarkeit eines Problems? Was Unentscheidbarkeit?
- Was besagen das Selbstanwendbarkeits- und das Halte-Problem, was ist die Diagonalisierungssprache? Sind sie entscheidbar?
- Was sind das Busy-Beaver-Problem und das Post'sche Korrespondenzproblem (PKP)?
- Wie lautet der Satz von Rice und was bedeutet er? Wann ist eine Eigenschaft „nicht-trivial"?
- Wie lassen sich Diagonalisierung, funktionale Problemreduktion, Monotonie- und Wachstumsargumente sowie Abschlusseigenschaften benuten, um bestimmte Eigenschaften eines Problems zu beweisen?

Kurzquiz 7

(1) Das Komplement der Diagonalisierungssprache ist nicht aufzählbar. **ja** **nein**

(2) Die „Lazy-Beaver"-Funktion $LB(n) = min\{\text{Produktivität}(M) \mid M \in BBT(n)\}$ ist nicht berechenbar. **ja** **nein**

(3) Seien H das Halteproblem und S das Selbstanwendbarkeitsproblem. Es gilt $H \leq S$, wenn es eine Funktion f gibt, die „Eingaben" für S in „Eingaben" für H umwandelt. **ja** **nein**

(4) Aus dem Satz von Rice folgt, dass die Menge $\{j | \; j \in range(\varphi_i)\}$ genau dann unentscheidbar ist, wenn φ_i nicht total berechenbar ist. **ja** **nein**

(5) Sei $K = (234, 43), (43, 233), (22, 32)$ eine Instanz des PKP. Dann gibt es eine Lösung, weil die Zeichenkette „43" sowohl an erster als auch an zweiter Stelle eines der Tupel vorkommt. **ja** **nein**

Aufgabe 7.1 *(Diagonalisierung)*

Betrachten Sie folgenden Diagonalisierungs-Beweis:

Zu zeigen: Die Menge der Turingmaschinen $TM = \{i \mid \varphi_i \in \mathcal{R}\}$ ist nicht aufzählbar.

Annahme: TM ist aufzählbar.

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert als $f(x) = \varphi_x(x) + 1$. Da TM aufzählbar ist, gibt es eine Turingmaschine, die auf Eingabe x die entsprechende Turingmaschine mit der Gödelnummer x konstruiert und $\varphi_x(x)$ berechnet. Da φ_x berechenbar ist und die Addition ebenfalls, ist auch f berechenbar. Dann gibt es ein $j \in TM$ mit $f = \varphi_j$. Wir betrachten das Verhalten von f an der Stelle j. Dann ist $\varphi_j(j) = f(j) = \varphi_j(j) + 1$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und die Menge der Turingmaschinen T M ist nicht (rekursiv) aufzählbar.

An welcher Stelle enthält dieser Beweis einen Fehler? Warum?

Aufgabe 7.2 *(Funktionale Reduktion, Satz von Rice)*

(a) Seien $M_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 50 \wedge x \bmod 2 = 1\}$ und $M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x \bmod 2 = 0\}$.
Zeigen Sie durch funktionale Reduktion, dass $M_2 \leq M_1$ gilt.

(b) Sei s die Nachfolgerfunktion. Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von Rice, dass $M_3 = \{i \mid \varphi_i = s\}$ nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 7.3 *(Post'sches Korrespondenzproblem (PKP))*

(a) Seien $K_1 = (ab, bc), (a, ab), (bc, ca), (c, a)$, $K_2 = (ab, abab), (b, a), (aba, b), (ab, a)$ und $K_3 = (xy, xyy), (xxy, yx), (yx, xx)$ Instanzen des PKP. Sind K_1 und K_2 lösbar?
Geben Sie ein Beispiel an oder begründen Sie, warum es keine Korrespondenz geben kann.

(b) Ist das PKP immer noch unentscheidbar, wenn wir es auf ein einelementiges Alphabet beschränken? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Haus-)Aufgabe 7.4 *(Reduktion, Diagonalisierung, Satz von Rice)*

Zeigen Sie folgende Aussagen unter Benutzung von funktionaler Reduktion, Diagonalisierung oder durch Anwendung des Satzes von Rice.

(a) $M_1 = \{i \mid \varphi_i(i) = i\}$ ist nicht entscheidbar, aber aufzählbar.

(b) $M_2 = \{i \mid \varphi_{i+6}(i + 6) = \perp\}$ ist nicht aufzählbar.

(c) $M_3 = \{i \mid \varphi_i \text{ ist surjektiv}\}$ ist nicht entscheidbar.

(Haus-)Aufgabe 7.5 *(Reduktionsrelation als Ordnungsrelation)*

Die Schreibweise der funktionalen Reduktionsrelation als „$\leq$“ legt nahe, dass es sich um eine Ordnungrelation handelt. Das stimmt allerdings nicht ganz: Eine der Eigenschaften einer Ordnungsrelationen ist nicht erfüllt. Welche ist dies? Zeigen Sie, dass die beiden anderen Eigenschaften einer Ordnungsrelation für die Reduktionsrelation $\leq$ erfüllt sind.
Hinweis: Eine Relation ist eine Ordnungsrelation, g.d.w. sie reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv ist.

(Haus-)Aufgabe 7.6 *(PKP)*

Sei PKP' = $\{(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \{0, 1\} \wedge \exists i_1, \ldots i_n . u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n}\}$, also eine Einschränkung des PKP auf ein zweielementiges Alphabet. Zeigen Sie durch Reduktion von PKP auf PKP', dass auch PKP' unentscheidbar ist.

Achtung – Hörsaaländerung am 19.06.2009!!!

Am 19.06. findet die Vorlesung um 8.30 Uhr in Haus 1, HS10 (Raum 2.15, über der Mensa!) statt.

Zur Erinnerung...

In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

Und ganz wichtig:

Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!