Theoretische Informatik II

Einheit 5.4

Elementare Berechenbarkeitstheorie I:

Grundkonzepte und ihre Eigenschaften

1. Grundgesetze der Berechenbarkeit
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit
   und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

Elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
  - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
  - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
  - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
  - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?
    Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten hängen nicht vom Berechnungsmodell ab**
  - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sind allgemeine Konzepte
- **Löse Theorie von Betrachtung konkreter Modelle**
  - Formuliere Grundeigenschaften (Axiome) berechenbarer Funktionen
  - Beweise diese Eigenschaften mit einem Modell (Turingmaschine)
  - Stütze alle Beweise für Aussagen nur noch auf diese Eigenschaften
    denn sie gelten für alle gleichmächtigen Berechnungsmodelle

Formuliere Theorie berechenbarer Funktionen

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
  - (Semi-)Entscheidbarkeit einer Menge ist äquivalent zur Berechenbarkeit ihrer (partiell-)charakteristischen Funktion
- **Es reicht Berechenbarkeit auf Zahlen zu betrachten**
  - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
    - · Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
    - · Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
  - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
  - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Es reicht einstellige Funktionen auf $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ zu betrachten**
  - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
    z.B. ist $f{:}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f'{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $f'\langle i,j\rangle := f(i,j)$ simulierbar

Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit

Berechenbare Funktionen lassen sich aufzählen

- **Turingmaschinen sind als Wörter codierbar**
  - Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma=\{0,1,B\}$ und $F=\{q_1\}$ zu betrachten
  - Definiere code($\delta(q,X)$) $\equiv\ q\,X\,p\,Y\,D$, falls $\delta(q,X)=(p,Y,D)$
  - Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort

    code($\delta(q_0,0)$)#code($\delta(q_0,1)$)#code($\delta(q_0,B)$)#...#code($\delta(q_n,B)$)
  - Codiere Alphabet $\{q_0,..,q_n,0,1,B,L,R,\#\}$ als Wörter über $\Delta = \{0,1,B\}$
- **Wörter über einem Alphabet sind numerierbar**
  - Bestimme lexikographische Ordnung der Wörter über $\Delta = \{x_1,..,x_n\}$

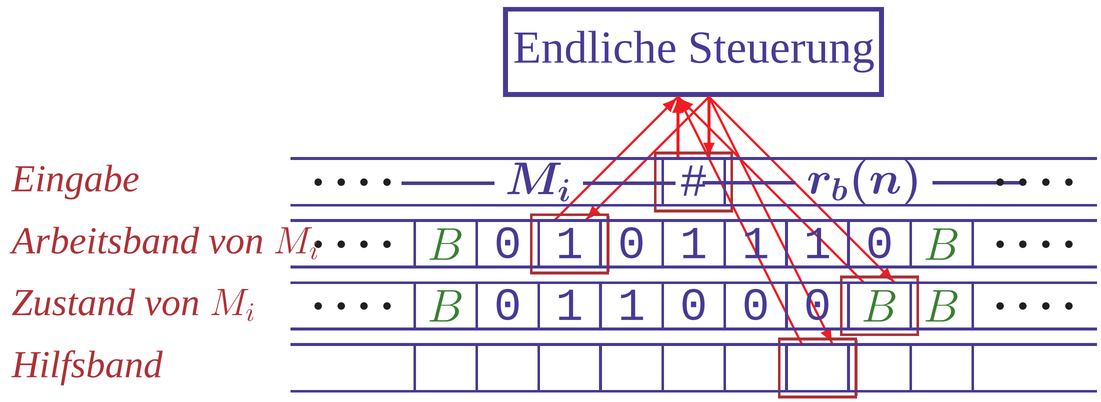
    $\epsilon < x_1 < \ldots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \ldots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \ldots$
  - Zähle entsprechend durch: $w_0{:=}\epsilon$, $w_1{:=}x_1$, .. $w_n{:=}x_n$, $w_{n+1}{:=}x_1x_1$, ...
- **Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar**
  - Zähle Wörter über Δ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
  - $\boldsymbol{M_i}$ ist die Turingmaschine, deren Codierung an i-ter Stelle erscheint
  - Die Nummer i wird auch die **Gödelnummer** von M_i genannt

Numerierung von TM liefert zwei Kernaxiome

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**
  - $\boldsymbol{\varphi_i}$ ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf $\mathbb{N}$
    - $\varphi(i){:=}\varphi_i := r_b^{-1}\circ f_{M_i}\circ r_b$, wobei $r_b{:}\mathbb{N}{\rightarrow}\{0,1\}^*$ Binärcodierung von $\mathbb{N}$
  - $\boldsymbol{\Phi_i}$ ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von M_i
    - $\Phi(i)(n){:=}\Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$
- **$\varphi{:}\mathbb{N}{\longrightarrow}\mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv**
  - Jede programmierbare Funktion hat einen Index
  - Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme
- Axiom 1**: Für alle i gilt domain(Φ_i)=domain(φ_i)**
  - Per Konstruktion ist Φ_i auf den gleichen Eingaben definiert wie φ_i
- Axiom 2**: $\{\langle i,n,t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ ist entscheidbar**
  - Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal t Schritte
  - Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

Axiom 3: Die universelle Funktion ist berechenbar

$u:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $u\langle i,n\rangle=\varphi_i(n)$ ist berechenbar (UTM Theorem)



- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**
  - Programmnummer i und Eingabewert n, binär codiert
  - Arbeitsband von M_i
  - Aktueller Zustand von M_i (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)
- **Generiere und simuliere Programm von M_i**
  - Generiere das Wort, das M_i über Δ codiert; schreibe es auf Band 1
  - Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe q_0 auf Band 3
  - Simuliere Einzelschritte von M_i durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
  - Terminiert M_i (Zustand q_1), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

Axiom 4: Programme sind effektiv kombinierbar

Es gibt eine berechenbare totale Funktion s:$\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ mit
$\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$ für alle $m,n,i\in\mathbb{N}$ (SMN Theorem)

Technisches Lemma ohne gute Intuition

- **Konstruiere eine Turingmaschine M für s:**
  - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m,n\rangle$
  - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der m-ten Turingmaschine M_m
  - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine $M_{\langle\rangle}$, welche bei Eingabe einer Zahl i den Wert $f_{M_{\langle\rangle}}(i) = \langle n,i\rangle$ berechnet.
  - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, die bei Eingabe einer Zahl i zunächst $M_{\langle\rangle}$ simuliert und M_m auf das Ergebnis anwendet.
  - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m,n\rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
  - Per Konstruktion ist die Funktion s berechenbar
  - s ist total, weil M für jede Eingabe $\langle m,n\rangle$ ein Ergebnis produziert
  - Es gilt $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\langle\rangle}}(i)) = \varphi_m\langle n,i\rangle$

Konsequenzen des SMN Theorems

Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i\rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$**

  Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(n) := s\langle m, n\rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

  Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

  Intuitiv: h berechnet die Gödelnummer der Kombination von M_i und M_j

  Beweis: die Funktion f mit $f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

  Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i,j\rangle}(x) = f\langle\langle i, j\rangle, x\rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

- **Es gibt berechenbare totale Funktionen f, g mit**
  - $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n)+1$ für alle i, n
  - $\varphi_{g\langle i,j\rangle}(n) = \varphi_i(n)+\varphi_j(n)$ für alle i, j, n

  ⋮

Rekursions- und Selbstreproduktionstheorem
technische Aussagen mit vielfachen Anwendungen

- **Zu jeder berechenbaren totalen Funktion f gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_{f(n)}(x) = \varphi_n(x)$ für alle x**

  Die Funktion g mit $g\langle i, x\rangle := \varphi_{u\langle i,i\rangle}(x) = u\langle u\langle i, i\rangle,\ x\rangle$ ist berechenbar.

  Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $g\langle i, x\rangle = \varphi_{h(i)}(x)$

  Ebenso gibt es ein $h' \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h'(i)}(x) = g'\langle i, x\rangle := u\langle i, h(x)\rangle = \varphi_i(h(x))$.

  Wähle $n = h(h'(j))$, wobei j die Gödelnummer von f ist.

  Dann gilt $\varphi_{f(n)}(x) = \varphi_{f(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_j(h(h'(j)))}(x) = \varphi_{\varphi_{h'(j)}(h'(j))}(x)$

  $= \varphi_{u\langle h'(j),h'(j)\rangle}(x) = g\langle h'(j), x\rangle = \varphi_{h(h'(j))}(x) = \varphi_n(x)$

  Anmerkung: $h \circ h'$ ist eine Art universeller Fixpunktkombinator für berechenbare Funktionen

- **Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(x) = n$ für alle x**

  Es gibt ein $f \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{f(i)}(x) = g\langle i, x\rangle := i$ für alle i, x.

  Für f gibt es nach dem Rekursionssatz ein n mit $\varphi_n(x) = \varphi_{f(n)}(x) = n$.

Alle Erkenntnisse der Berechenbarkeitstheorie folgen aus nur vier Axiomen

Berechenbare Funktionen sind effektiv numerierbar

Es gibt Funktionen $\varphi:\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ und $\Phi:\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ mit

1. φ_i und Φ_i haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom i-ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu φ_i gehörende Rechenzeitfunktion

2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

– Die Funktion $u:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $u\langle i,n\rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$

Zentrale Berechenbarkeitskonzepte neu erklärt

- **Berechenbare Funktion $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$** („$f$ ist **(partiell) rekursiv**")
  - Es gibt ein $i\in\mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von f)
  - f heißt **total rekursiv**, wenn f berechenbar und total ist
- **Entscheidbare Menge M** ('M ist **rekursiv**")

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört oder nicht
  - Die charakteristische Funktion χ_M ist berechenbar

    $$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Semi-entscheidbare Menge M**

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört, aber nicht immer anhält
  - Die partielle charakteristische Funktion ψ_M ist berechenbar

    $$\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x\in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Neu: (rekursiv) aufzählbare Menge M**

  Es gibt ein Programm, das schrittweise alle Elemente von M generiert
  - $M=\emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion f mit $M = \text{range}(f)$

    $$\text{range}(f) = \{n\in\mathbb{N} \mid \exists i\in\mathbb{N}\ f(i)=n\}$$

Anmerkungen zur Aufzählbarkeit

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**
  - M abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion f von $\mathbb{N}$ nach M gibt
  - M aufzählbar, wenn M Bild einer berechenbaren Funktion ist
- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - $h = \lambda n.2n+1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf
- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, .., x_n\}$ ist Bild von f mit $f(i) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen für rekursiv aufzählbare Mengen

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   - **range(f)**$= \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total
3. **M ist semi-entscheidbar**
4. **$M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$**
   - **domain(f)**$= \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Analog für Mengen über Worten, Zahlentupeln, . . .

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist M = range($f_\perp$), wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ $\surd$
  - Andernfalls M = range(f) für ein berechenbares, totales f $\surd$
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
  - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m=f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
  - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ ist $\psi_M(m)$ = sign (min$\{\langle n,t\rangle | \Phi_i(n)=t \wedge \varphi_i(n)=m\}$)

    Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar $\surd$
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M semi-entscheidbar.
  - Dann ist ψ_M berechenbar und M=$\{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\}$ = domain(ψ_M) $\surd$

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares $f \;\Rightarrow\; M$ aufzählbar**
  - Es sei M = domain(f) = $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar $\surd$
  - Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$
  - Wir konstruieren eine berechenbare totale Funktion g mit M=range(g)

    Es sei $g\langle n,t\rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n)=t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$

    Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist g total und berechenbar
  - M=range(g): Es gilt $n \in M$=domain(φ_i)

    $\Leftrightarrow$ es gibt es eine Rechenzeit t mit $\Phi_i(n)=t$

    $\Leftrightarrow$ $g\langle n,t\rangle = n$

    $\Leftrightarrow$ $n \in$ range(g) $\surd$

Wichtige entscheidbare und aufzählbare Mengen

- **Sei f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ berechenbar**
  - **range(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #2
  - **domain(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #4
  - **graph(f) ist aufzählbar (entscheidbar, wenn f total ist)**

    Bei Eingabe $\langle i, j\rangle$ teste $f(i){=}j$ (hält immer, wenn f total)

- $\{\langle i, n, t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ **ist entscheidbar** Axiom 2

- $\{\langle i, n, y\rangle \mid \varphi_i(n){=}y\}$ **ist aufzählbar**
  - Graph der universellen Funktion

- $H = \{\langle i, n\rangle \mid n \in \textbf{domain}(\varphi_i)\}$ **ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich der universellen Funktion (Halteproblem)

- $S = \{i \mid i \in \textbf{domain}(\varphi_i)\}$ **ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i, i\rangle$ (Selbstanwendbarkeitsproblem)

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

M entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar $\surd$

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar

Falls $M{=}\emptyset$ oder $\overline{M}{=}\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar $\surd$

Andernfalls M=range(f) und $\overline{M}$=range(g) wobei f, g total berechenbar

Definiere $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i){=}n \vee g(i){=}n\}$

Dann ist h berechenbar und total, da $n\in M$ oder $n\in\overline{M}$ für jedes n gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar $\surd$

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt in §5.5)
- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**
  - Für $M = \{x_1, .., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **M ist aufzählbar g.d.w. es eine entscheidbare Menge M' gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$** (Projektionssatz)

  $\Rightarrow$: Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \langle n, y\rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y\rangle \in M'\}{+}1)$

    $= \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y\rangle{=}1\}{+}1)$ berechenbar ✓

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  - Seien M=range(h) und M'=range(h') aufzählbar
  - Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
  - Dann ist g berechenbar und range(g) = $M \cup M'$ aufzählbar
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  - Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar

    In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn n $\in M \cap M'$
- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**
  - Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
  - Dann ist g berechenbar und range(g) = $f(M)$ aufzählbar
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion**
  - Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Kein Abschluß unter Komplement oder Differenz

Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**
  - Beweisidee: $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.
- **$M \cap M'$: Durchschnitt**
  - Beweisidee: $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.
- **$\overline{M}$: Komplement**
  - Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.
- **M-M': Differenz**
  - Beweisidee: M-$M' = M \cap \overline{M'}$
- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren totalen Funktion**
  - Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

Kein Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen

Rückblick elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**
  - Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
  - Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

  Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf $\mathbb{N}$

  - Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, f, f^{-1}
  - Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, , -, f^{-1}

- **Alle Theorie stützt sich auf nur vier Gesetze**
  1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und Rechenzeiten
  2. Entscheidbarkeit der Rechenzeit
  3. Berechenbarkeit der universellen Funktion
  4. Effektive Kombinierbarkeit berechenbarer Funktionen

  Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen