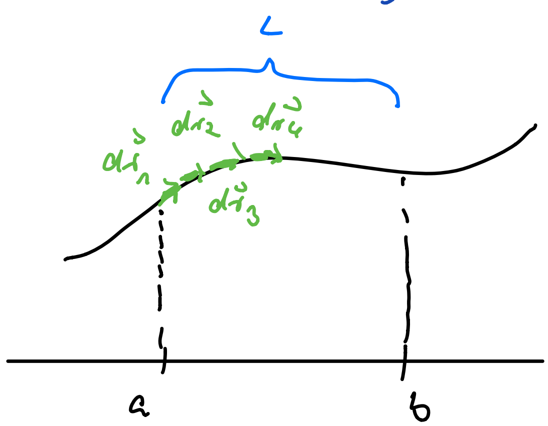
Fortsetzung 1.8 Bogenlänge

Otto, 6.3 und 4.4

Weg 2: Parametrisierung des Bogenelementes

$$\int |d\vec{r}_i| = \int \sqrt{ds^2}$$ direkt $\Rightarrow$ "Wegintegral" oder "Linienintegral"



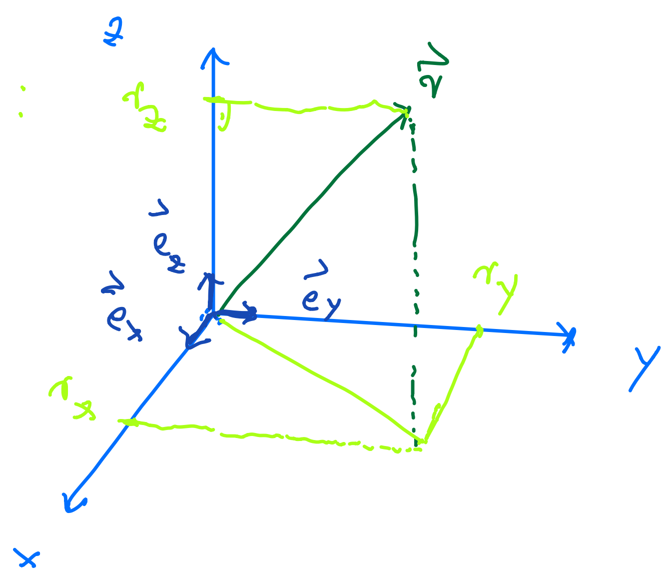
Linienelement: $ds^2 := d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

Nebenbemerkung:
- Das Linienelement ds^2 leitet sich aus dem totalen Differential einer Kurve ab
- Es wird Linien- oder auch Bogenelement genannt

Wie sieht das Linienelement in den verschiedenen Koordinatensystemen aus?

Koordinatensysteme:

a) Kartesische Koordinaten x, y, z



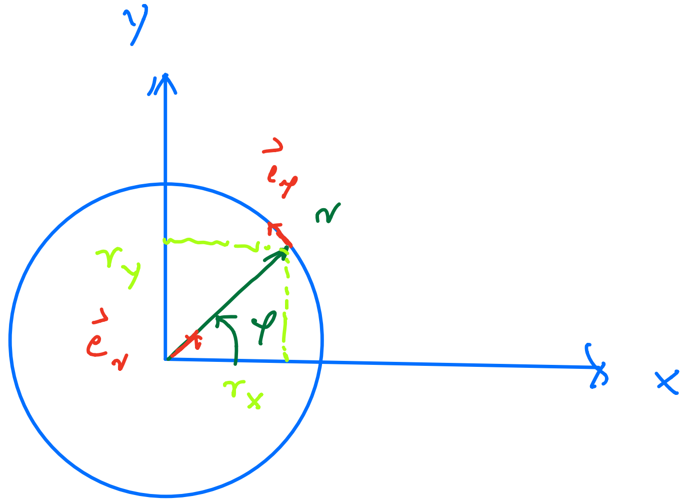
$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) \quad \text{mit} \quad |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Basisvektoren:

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

orthonormales System, d.h. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

b) Polarkoordinaten (2-Dim.) r, φ



$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $|\vec{r}| = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$

mit

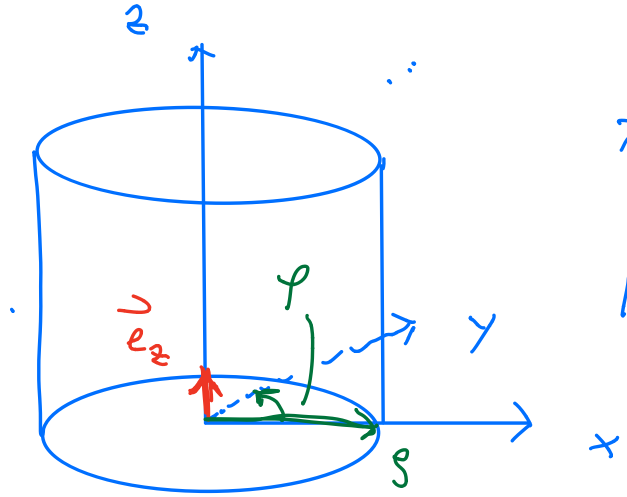
$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ und $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$

in der kartesischen Basis (x, y).

Nebenbemerkung:
Die Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ in der (r, φ)-Basis lauten: $\vec{e}_r = (1, 0)$, $\vec{e}_\varphi = (0, 1)$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ sind ebenfalls orthonormal.

c) Zylinderkoordinaten (3 Dim.) ϱ, φ, z



Radius in der x,y-Ebene

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$$

Umkehrung von kartesischen in Zylinderkoordinaten:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Einheitsvektoren (in x,y,z-Basis):

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nebenbemerkung: $\vec{e}_\varrho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ in (ϱ, φ, z)-Basis:

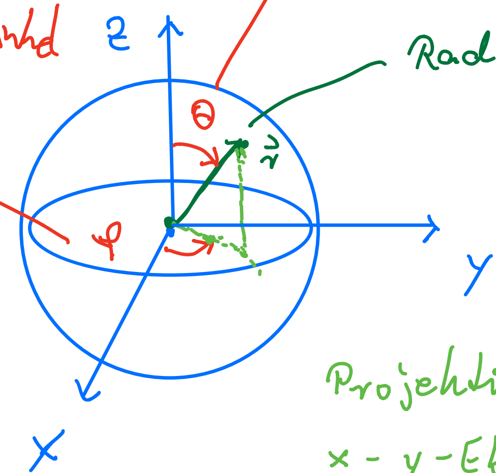
$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Kugelkoordinaten (3D) r, θ, φ

Polarwinkel, $\theta \in [0, \pi]$

Azimuthalwinkel $\varphi \in [0, 2\pi]$

Radius r



Projektion von $\vec{r}$ in x-y-Ebene: $r \sin\theta$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

Umrechnung von kartesischen in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

Basisvektoren (in x, y, z - Basis):

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nebenbemerkung: $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ in (r, θ, φ)-Basis?

Zurück zu den Linienelementen:

- kartesische KO: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Polarkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$
- Zylinderkoordinaten: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$
- Kugelkoordinaten: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$

Beispiel: Nochmal Kreisumfang in Polarkoordinaten allgemein, aber nun mittels Weg 2!

$$L = \int |d\vec{r}_i| = \int \sqrt{ds^2} \overset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

Die Kreisgleichung lautet

$$\vec{r}(t) = \left(r(t) \cos(\varphi(t)), \; r(t) \sin(\varphi(t)) \right)$$

$$= \int_C \sqrt{dr^2(t) + r^2(t) \, d\varphi^2(t)} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{dt^2 \frac{dr^2(t)}{dt^2} + r^2(t) \, dt^2 \frac{d\varphi^2(t)}{dt^2}} \quad , \text{da } \varphi(0) = 0, \; \varphi(2\pi) = 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2(t) \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2}$$ ✓ wie vorher

Otto, Kap. 12

1.9 Konservative Kräfte und Arbeit

1.9.1 Arbeit und Wegintegrale

Was ist Arbeit?

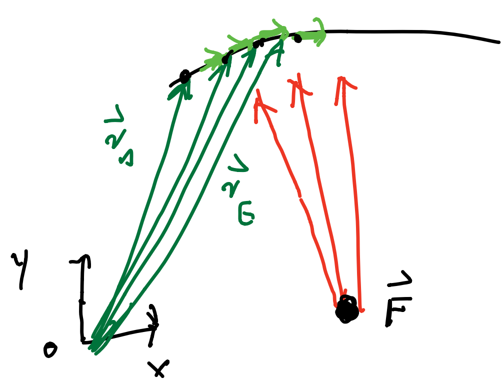
Arbeit = "Kraft mal Weg"

Wichtig: Zahl — Vektor · Vektor

Welche Arbeit wird geleistet?

$$W = \int_{r_A}^{r_E} \vec F \cdot d\vec r$$

= "Wegintegral"!



Bestimme die wirkende Kraft $\vec F(\vec r)$ in jedem einzelnen $d\vec r$!

Wie kann die resultierende Bewegung beschrieben werden?

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung ermitteln!

Bewegungsgleichung = Gleichung, die die Bewegung komplett beschreibt und vorhersagt!

Sie ist gegeben durch: $\vec{F}_{ges} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$

Berechnung der Arbeit:

$$W = \int_{r_a}^{r_e} \vec{F}_{ges}\, d\vec{r} = \int_{r_a}^{r_e} m\ddot{\vec{r}}\, d\vec{r} \overset{\text{falls } m \text{ konstant}}{=} m \int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}}\, d\vec{r}$$

$$= m \int_{r_a}^{r_e} \ddot{\vec{r}}\, \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = m \int_{t_a}^{t_e} \ddot{\vec{r}}\, \dot{\vec{r}}\, dt$$

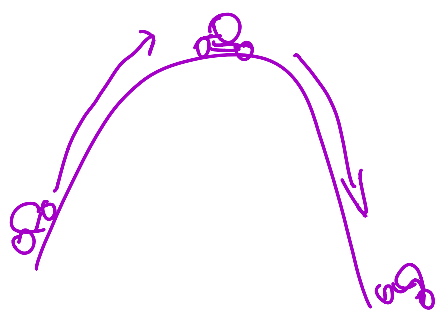
$$= \underbrace{m \int d\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)}_{} = \frac{m}{2} \int_{v(t_a)}^{v(t_e)} d(v^2)$$

Test: Substitution $u = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow du = \frac{1}{2}\cdot 2\,\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\, dt$

$$= \frac{m}{2}\left[v^2(t_e) - v^2(t_a)\right] = E_{kin}(t_e) - E_{kin}(t_a)$$

⇒ Gesamtarbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien $\frac{1}{2}mv^2$, die der Körper jeweils am Ort r_e und r_a besitzt.

Potentielle Energie!



$$\overbrace{\sum \vec{F}_{ges}\,\Delta\vec{r}}^{\text{Gesamtarbeit}} = E_{kin}(t_e) - E_{kin}(t_a)$$

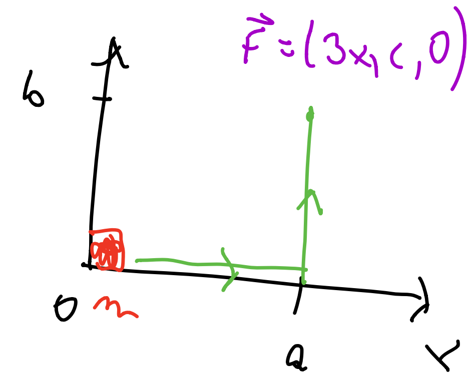
$$\underbrace{\int \vec{F}_{ges}\, d\vec{r}}_{\text{„}E_{pot}\text{“ ?}} = E_{kin}(t_e) - E_{kin}(t_a)$$

⇒ welche Eigenschaft muss das Kraftfeld haben, damit die Gesamtenergie erhalten ist?

Bsp. A: Kraftfeld $\vec{F} = (3x, \underset{\uparrow \text{const.}}{c}, 0)$

→ Kraftfeld wächst linear in x-Richtung, konstant in y-Richtung (d.h. $= 0$ setzen) und hat keine Komponente in z-Richtung

$$W_{ges1} = \int_{C_1} \vec{F} \, d\vec{r}$$



$$= \int_{(0,0)}^{(a,0)} \vec{F} \, d\vec{r} + \int_{(a,0)}^{(a,b)} \vec{F} \, d\vec{r}$$

$\underline{d\vec{r} = dx + dy}$

$$\int_{(0,0)}^{(a,0)} (F_x \, dx + F_y \, dy) + \int_{(a,0)}^{(a,b)} (F_x \, dx + F_y \, dy)$$

$$= \int_0^a F_x \, dx + \cancel{\int_0^0 F_y \, dy} + \cancel{\int_a^a F_x \, dx} + \int_0^b F_y \, dy$$

$$= \int_0^a F_x \, dx + \int_0^b F_y \, dy = \int_0^a 3x \, dx + \int_0^b c \, dy$$

$$= \left[3\frac{x^2}{2}\right]_0^a + c\left[y\right]_0^b = \frac{3a^2}{2} + cb$$