Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XX, pag. 113.)

4.

Es sollen jetzt im Anschluss an die vorangegangenen Entwickelungen verschiedene neue Sätze aufgestellt und bewiesen werden, die sowohl an sich von Interesse, wie auch in der Functionentheorie von Nutzen sind. Dabei bedienen wir uns der folgenden Bezeichnungen.

Sind mehrere Punktmengen P_1, P_2, P_3, paarweise ohne Zusammenhang, so wollen wir, wenn P die aus ihrer Zusammenfassung hervorgehende Menge ist, an Stelle einer früher gebrauchten Formulirung (Bd. XVII, pag. 355) die bequemere wählen:

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \cdots.$$

Und im Einklange hiermit möge, wenn Q eine in P enthaltene Menge und R diejenige Menge ist, welche übrig bleibt, wenn man Q von P entfernt, geschrieben werden:

$$R \equiv P - Q.$$

Eine Punktmenge Q, die wir uns in einem n-dimensionalen stetigen Raume liegend denken, kann so beschaffen sein, dass *kein* zu ihr gehöriger Punkt zugleich Grenzpunkt derselben ist; eine solche Menge, für welche also

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0,$$

nennen wir eine *isolirte* Punktmenge. Hat man *irgend* eine Punktmenge P, die *nicht* isolirt ist, so geht aus ihr eine *isolirte* Q dadurch hervor, dass man von ihr die Menge $\mathfrak{D}(P, P')$ entfernt.

Hier ist also:

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

und folglich:

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Jede Punktmenge kann also zusammengesetzt werden aus einer isolirten Menge Q und aus einer andern R, welche Divisor der Ableitung P' ist. Beachten wir ferner, worauf wiederholt aufmerksam gemacht worden ist, dass jede höhere Ableitung einer P in der vorhergehenden Ableitung enthalten ist, so folgt, dass:

$$P' - P'',\ P'' - P''',\ \cdots,\ P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)},\ \cdots$$

lauter *isolirte* Mengen sind.

Man hat aber die für das folgende wichtigen Zerlegungen:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

und:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \text{in infinitum} + P^{(\infty)}.$$

Von isolirten Punktmengen gilt nun der folgende Satz:

Theorem I. *Jede isolirte Punktmenge ist abzählbar, gehört also zur ersten Classe.*

Beweis. Q sei irgend eine innerhalb eines n-dimensionalen Raumes gelegene *isolirte* Punktmenge, q sei ein Punkt derselben, $q', q'', q''', \cdots$ seien die übrigen Punkte von Q.

Die Entfernungen $\overline{qq'}, \overline{qq''}, \overline{qq'''}, \cdots$ haben eine *untere Grenze*, welche mit ϱ bezeichnet werde.

Ebenso sei ϱ' die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q'q}, \overline{q'q''}, \overline{q'q'''}, \cdots$, ϱ'' die untere Grenze der Entfernungen $\overline{q''q}, \overline{q''q'}, \overline{q''q'''}, \cdots$ u. s. w.

Alle diese Grössen $\varrho, \varrho', \varrho'', \cdots$ *sind von Null verschieden*, weil Q eine *isolirte* Menge ist.

Man beschreibe mit q als Mittelpunkt dasjenige $(n-1)$-dimensionale Gebilde, dessen Punkte von q die Entfernung $\frac{\varrho}{2}$ haben; dieses Gebilde begrenzt eine n-dimensionale Vollkugel, welche wir mit K bezeichnen wollen. Ganz ebenso bilde man eine zum Punkte q' als Mittelpunkt gehörige Vollkugel K' mit dem Radius $\frac{\varrho'}{2}$, eine zum Punkte q'' als Mittelpunkt gehörige Vollkugel K'' mit dem Radius $\frac{\varrho''}{2}$ u. s. w.

Es ist nun wesentlich, dass irgend zwei dieser Vollkugeln, z. B. K und K' sich höchstens berühren können, sonst aber ganz ausser einander liegen.

Dies hängt damit zusammen, dass, wie aus der Definition der Grössen ϱ und ϱ' folgt, beide kleiner oder gleich $\overline{qq'}$, also die Radien $\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho'}{2}$ der beiden Kugeln K und K' nicht grösser sind als die Hälfte der Centrallinie $\overline{qq'}$.

Somit bilden die Vollkugeln $K, K', \cdots$ einen Inbegriff von ausser einander liegenden n-dimensionalen Theilgebieten des zu Grunde gelegten n-dimensionalen Raumes; ein derartiger Inbegriff ist aber, wie im XX. Bd. pag. 117 bewiesen worden ist, immer *abzählbar*. Folglich bilden auch die Mittelpunkte $q, q', q'', \cdots$ eine abzählbare Menge, d. h. Q ist abzählbar.

Wir sind nun im Stande die folgenden Sätze zu bringen.

Theorem II. *Ist die Ableitung P' einer Punktmenge P abzählbar, so ist P gleichfalls abzählbar.*

Beweis. Man bezeichne den grössten gemeinsamen Divisor von P und P' mit R, so dass:

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P')$$

und setze:

$$P - R \equiv Q.$$

Q ist alsdann, wie wir schon oben gesehen haben, eine *isolirte* Menge, also abzählbar nach Th. I.

R ist abzählbar, weil es ein Bestandtheil der als abzählbar vorausgesetzten Menge P' ist.

Die Zusammenfassung zweier abzählbaren Mengen ergiebt aber stets wieder eine abzählbare Menge; daher ist $P \equiv Q + R$ abzählbar.

Theorem III. *Jede Punktmenge der ersten Gattung und n^{ter} Art ist abzählbar.*

1^{ter} Beweis. Für Punktmengen 0^{ter} Art ist der Satz einleuchtend, weil solche offenbar *isolirte* Punktmengen sind. Wir wollen nun eine vollständige Induction ausführen, indem wir annehmen, es sei der Satz für Punktmengen 0^{ter}, 1^{ter}, $2^{\text{ter}} \cdots (n-1)^{\text{ter}}$ Art richtig und wollen unter dieser Voraussetzung zeigen, dass er auch richtig ist für Punktmengen der n^{ten} Art.

Ist P eine Pm. der n^{ten} Art, so ist P' von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Art; P' ist also abzählbar der Voraussetzung nach, folglich auch P abzählbar nach Th. II.

2^{ter} Beweis. Ist P eine Punktmenge n^{ter} Art, so ist $P^{(n)}$ von der 0^{ten} Art, also eine isolirte Pm.

Man hat nun:

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}.$$

Hier sind alle Bestandtheile auf der rechten Seite $(P' - P'')$, $(P'' - P''')$, $\cdots$, $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$ und $P^{(n)}$ *isolirte* Mengen, also nach Th. I sämmtlich abzählbar, folglich ist auch die aus ihrer Zusammenfassung entstehende Menge P' abzählbar, daher nach Th. II auch P abzählbar.

Theorem IV. *Jede Punktmenge P der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus der Zerlegung:

$$P' \equiv (P' - P'') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \cdots \text{ in infinitum} + P^{(\infty)}.$$

Da nämlich alle Bestandtheile der rechten Seite abzählbar sind und die *Anzahl* dieser Bestandtheile eine *abzählbar unendliche* ist, so folgt daraus die Abzählbarkeit von P' und nach Th. II diejenige von P.

Versteht man unter α irgend eines der in Bd. XVII pag. 357 eingeführten *Unendlichkeitssymbole*, so hat man den umfassenderen Satz:

Theorem V. *Jede Punktmenge P zweiter Gattung, für welche $P^{(\alpha)}$ abzählbar, ist selbst abzählbar.*

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hülfe vollständiger Induction ebenso geführt wie die Beweise der Theoreme III und IV.

Die letzten Sätze kann man auch in folgender Weise formuliren:

Ist P eine nicht abzählbare Punktmenge, so ist auch $P^{(\alpha)}$ nicht abzählbar, sowohl wenn α eine endliche ganze Zahl, wie auch wenn es eines der Unendlichkeitssymbole ist. —

Bei Untersuchungen, welche die Herren du Bois-Reymond und Harnack über gewisse Verallgemeinerungen von Sätzen der Integralrechnung angestellt haben, werden lineare Punktmengen gebraucht, welche die Beschaffenheit haben, dass sie sich in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, *so dass die Summe aller Intervalle kleiner ist, als eine beliebig vorgegebene Grösse.*

Damit eine lineare Punktmenge die hierdurch ausgedrückte Eigenschaft besitze, ist es offenbar nothwendig, dass sie in keinem noch so kleinen Intervalle überalldicht sei; doch scheint diese letztere Bedingung nicht auszureichen um einer Punktmenge die erwähnte Beschaffenheit zu verleihen. Dagegen sind wir im Stande den folgenden Satz zu beweisen.

Theorem VI. *Ist eine in einem Intervalle $(a,.b)$ enthaltene lineare Punktmenge P so beschaffen, dass ihre Ableitung P' abzählbar ist, so ist es immer möglich P in eine endliche Anzahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme einzuschliessen.*

Bei dem gleich folgenden Beweise werden hülfsweise die folgenden Sätze gebraucht, von denen der erste eine bekannte Eigenschaft stetiger Functionen ausspricht, die beiden anderen von unseren früheren Betrachtungen her bekannt sind.

Hülfssatz I. Eine in einem Intervalle (c, d) der stetigen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$, welche an den Grenzen *ungleiche* Werthe $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ hat, nimmt irgend einen in den Grenzen $\varphi(c)$ und $\varphi(d)$ liegenden Werth y zum Mindesten einmal an.

Hülfssatz II. Eine in einer unendlichen Graden liegende unendliche Anzahl von Intervallen, die ausser einander liegen, höchstens an ihren Grenzen zusammenstossen, ist immer abzählbar.

Hülfssatz III. Hat man eine abzählbar unendliche Menge von Grössen:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots,$$

so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle eine Grösse η finden, welche unter jenen Grössen nicht vorkommt.

Beweis von Theorem VI. Das Intervall (a, b), in welchem P liegt, nehmen wir zur Vereinfachung so an, dass $a = 0$, $b = 1$, auf welchen Fall sich der allgemeine durch Transformation leicht zurückführen lässt. P liegt also im Intervall $(0, 1)$, das Gleiche gilt offenbar von P' und von derjenigen Menge, welche aus der Zusammenfassung der Punkte von P und P' hervorgeht und die wir mit Q bezeichnen wollen.

Es ist:

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Wir bezeichnen ferner mit R diejenige Pm. im Intervalle $(0, 1)$, welche von letzterem nach Abzug der Menge Q übrig bleibt, so dass:

$$(0, 1) \equiv Q + R. \tag{1}$$

Mit der vorausgesetzten Abzählbarkeit der Menge P' hängt zunächst folgendes zusammen:

1. Es ist auch P abzählbar nach Th. II, *daher ist auch Q abzählbar.*

2. Es ist P und daher auch P' in keinem Intervalle überalldicht; wäre nämlich P überalldicht im Intervalle (i, k), so würden alle Punkte des letzteren zu P' gehören und es könnte P' nicht abzählbar sein, nach Hülfssatz III. *Daher ist auch Q in keinem Intervalle überalldicht.* Die Coordinatenwerthe, welche den Punkten der abzählbaren Menge Q entsprechen, mögen sein:

$$u_1, u_2, \cdots, u_\nu, \cdots. \tag{2}$$

Betrachten wir nunmehr die Menge R, so lässt sich zeigen, dass die ihren Punkten entsprechenden Coordinatenwerthe übereinstimmen mit sämmtlichen *inneren* Werthen einer unendlichen Reihe von Intervallen:

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \cdots, (c_\nu, d_\nu), \cdots, \tag{3}$$

welche ausser einander liegen und natürlich im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Da nur die *inneren* Werthe dieser Intervalle zu Punkten der Menge R gehören, so folgt aus der Relation (1) sofort, dass die Grenzen c_ν und d_ν dieser Intervalle Punkten der Menge Q entsprechen, also in der Reihe (2) vorkommen.

In der That sei r ein Punkt von R, so können Punkte von Q nicht unendlich nahe an r herantreten, weil sonst r ein Grenzpunkt von P wäre, folglich zu Q gehören würde. Es muss nun links von r ein Punkt c und rechts von r ein Punkt d liegen, so dass im Innern des Intervalles (c, d) kein Punkt von Q liegt, dagegen ausserhalb dieses Intervalles Punkte von Q in beliebiger Nähe von c und d vorkommen; weil aber jeder Grenzpunkt von Q zu Q mitgehört, so sind c und d selbst zu Q gehörige Punkte. Die unendlich vielen Intervalle (c, d), welche auf solche Weise entstehen, liegen alle offenbar ausser einander und bilden daher nach Hülfssatz II eine abzählbare Menge (3), wie zu beweisen war. —

Die Grösse des Intervalles (c_ν, d_ν) ist, da wir $c_\nu < d_\nu$ voraussetzen:

$$= d_\nu - c_\nu.$$

Die Summe aller dieser Intervallgrössen wollen wir σ nennen, so dass:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma. \tag{4}$$

Von vornherein sieht man, dass $\sigma \overline{\gtrless} 1$, weil die Intervalle alle ausser einander liegen und im Intervalle $(0, 1)$ enthalten sind. Wären wir nun im Stande zu zeigen, dass $\sigma = 1$, also die Möglichkeit $\sigma < 1$ ausgeschlossen ist, so würde damit, wie eine höchst einfache an die Bedeutung der Intervalle (c_ν, d_ν) anknüpfende Betrachtung zeigt, unser Theorem VI bewiesen sein.

Es geht also unser Beweis darauf aus zu zeigen, dass die Annahme $\sigma < 1$ zu einem Widerspruche führt. —

Zu dem Ende definiren wir für $0 < x \leq 1$ eine Function $f(x)$ wie folgt: Man summire die Grössen aller Intervalle (c_ν, d_ν), soweit die letzteren in das Innere des Intervalles $(0, x)$ hineinfallen und setze diese Summe $= f(x)$. (Dabei soll von einem Intervalle (c_ν, d_ν), welches theilweise ausserhalb $(0, x)$ liegt, nur der entsprechende in das Innere von $(0, x)$ fallende Theil in diese Summe aufgenommen werden.)

Man hat offenbar:

$$f(1) = \sigma.$$

Setzt man ausserdem fest, dass $f(0) = 0$ sei, so folgt leicht, dass $f(x)$ eine *stetige* Function von x ist für $0 \leq x \leq 1$.

Aus der Definition von $f(x)$ folgt nämlich unmittelbar, dass wenn x und $x + h$ zwei verschiedene Werthe des Intervalles $(0, 1)$ sind, man für positive Werthe von h hat:

$$f(x + h) - f(x) \begin{smallmatrix} \geq 0 \\ \leq h \end{smallmatrix}.$$

Hieraus folgert man die Stetigkeit von $f(x)$.

Es zeigt sich ferner sofort, wenn man auf die Definition von $f(x)$ zurückgeht, dass *wenn x und $x + h$ zwei verschiedene Werthe eines und desselben Theilintervalles (c_ν, d_ν) sind, man hat:*

$$f(x + h) - f(x) = h,$$

also auch:
$$(x+h) - f(x+h) = x - f(x).$$

Führt man daher die Function
$$\varphi(x) = x - f(x),$$
ein, so ist auch $\varphi(x)$ eine *stetige* Function von x, welche, wenn x von 0 bis 1 wächst, sich ohne Abnahme von 0 bis $1 - \sigma$ ändert. *Diese Aenderung geschieht so, dass innerhalb eines der Theilintervalle* (c_ν, d_ν) *die stetige Function* $\varphi(x)$ *einen constanten Werth behält.*

Daraus folgt für die Function $\varphi(x)$ die Eigenthümlichkeit, dass *alle von ihr angenommenen Werthe durch die Werthreihe:*

(5) $$\varphi(u_1),\ \varphi(u_2),\ \cdots,\ \varphi(u_\nu),\ \cdots$$

erschöpft werden.

In der That kann x entweder einem der Werthe u_ν gleich sein, in diesem Falle haben wir:
$$\varphi(x) = \varphi(u_\nu).$$

Oder es ist x ein Werth im Innern eines der Intervalle (c_ν, d_ν); in diesem Falle haben wir wegen der Constanz von $\varphi(x)$ innerhalb eines solchen Intervalles:
$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu).$$

Nun gehören aber, wie wir oben gesehen, die Werthe c_ν und d_ν gleichfalls zu der Reihe (2), es ist etwa:
$$c_\nu = u_\lambda.$$

Folglich hat man auch in diesem Falle:
$$\varphi(x) = \varphi(u_\lambda).$$

In der Reihe (5) sind also alle Werthe enthalten, welche $\varphi(x)$ überhaupt annehmen kann.

Die Werthmenge, welche die stetige Function $\varphi(x)$ annehmen kann, ist somit *abzählbar*.

Wäre nun $\sigma < 1$, also $1 - \sigma$ von Null verschieden, so würde nach Hülfssatz I die stetige Function $\varphi(x)$ jeden Werth y zwischen 0 und $1 - \sigma$ mindestens einmal annehmen. Folglich würden in der Reihe (5), welche, wie soeben gezeigt worden ist, alle von der Function $\varphi(x)$ angenommenen Werthe erschöpft, alle möglichen Zahlen des Intervalles $(0,\ 1 - \sigma)$ vorkommen, was dem Hülfssatze III entgegen steht. Somit bleibt nur die Annahme $\sigma = 1$ übrig, was zu beweisen war.

Zum Schlusse möchte ich eine in der vorigen Nummer dieser Abhandlung (Bd. XX pag. 118) enthaltene Constantenangabe berichtigen, wenn auch für die dortigen Zwecke auf deren Genauigkeit nichts ankommt. Der n-dimensionale Rauminhalt des mit B bezeichneten Gebildes findet sich bei genauerer Untersuchung:

$$= \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

eine Zahl, die nur in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ mit $2^n\pi$ zusammenfällt, sonst aber kleiner als $2^n\pi$ ist.

Harzburg, 1. September 1882.