Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik.

Von

R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy in Göttingen.

Ersetzt man bei den klassischen linearen Differentialgleichungsproblemen der mathematischen Physik die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten in einem — etwa rechtwinklig angenommenen — Gitter, so gelangt man zu algebraischen Problemen von sehr durchsichtiger Struktur. Die vorliegende Arbeit untersucht nach einer elementaren Diskussion dieser algebraischen Probleme vor allem die Frage, wie sich die Lösungen verhalten, wenn man die Maschen des Gitters gegen Null streben läßt. Dabei beschränken wir uns vielfach auf die einfachsten, aber typischen Fälle, die wir derart behandeln, daß die Anwendbarkeit der Methoden auf allgemeinere Differenzengleichungen und solche mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen deutlich wird.

Entsprechend den für Differentialgleichungen geläufigen Fragestellungen behandeln wir Randwert- und Eigenwertprobleme für elliptische Differenzengleichungen und das Anfangswertproblem für hyperbolische bzw. parabolische Differenzengleichungen. Wir werden an einigen typischen Beispielen beweisen, daß der Grenzübergang stets möglich ist, nämlich daß die Lösungen der Differenzengleichungen gegen die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungsprobleme konvergieren; ja wir werden sogar erkennen, daß bei elliptischen Gleichungen i. a. die Differenzenquotienten beliebig hoher Ordnung gegen die entsprechenden Differentialquotienten streben. Die Lösbarkeit der Differentialgleichungsprobleme setzen wir nirgends voraus; vielmehr erhalten wir durch den Grenzübergang hierfür einen einfachen Beweis [1]). Während aber beim elliptischen

---

[1]) Unsere Beweismethode läßt sich ohne Schwierigkeit so erweitern, daß sie bei beliebigen linearen elliptischen Differentialgleichungen das Rand- und Eigenwertproblem und bei beliebigen linearen hyperbolischen Differentialgleichungen das Anfangswertproblem zu lösen gestattet.

Falle einfache und weitgehend von der Wahl des Gitters unabhängige Konvergenzverhältnisse herrschen, werden wir bei dem Anfangswertproblem hyperbolischer Gleichungen erkennen, daß die Konvergenz allgemein nur dann vorhanden ist, wenn die Verhältnisse der Gittermaschen in verschiedenen Richtungen gewissen Ungleichungen genügen, die durch die Lage der Charakteristiken zum Gitter bestimmt werden.

Das typische Beispiel ist für uns im elliptischen Falle das Randwertproblem der Potentialtheorie. Seine Lösung von der Lösung des entsprechenden Differenzengleichungsproblems her ist übrigens in den letzten Jahren mehrfach behandelt worden[2]). Allerdings werden dabei im Gegensatz zu der vorliegenden Arbeit meist spezielle Eigenschaften der Potentialgleichung benutzt, so daß die Anwendbarkeit der Methode auf andere Probleme nicht ohne weiteres zu übersehen ist.

Abgesehen von dem gekennzeichneten Hauptziel der Arbeit werden wir im Anschluß an die elementare algebraische Diskussion des Randwertproblems elliptischer Gleichungen dessen Zusammenhang mit dem aus der Statistik bekannten Probleme der Irrwege erörtern.

I. Der elliptische Fall.

§ 1.

Vorbemerkungen.

1. Definitionen.

Wir betrachten zunächst in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y ein quadratisches Punktgitter der Maschenweite $h > 0$, etwa alle Punkte mit den Koordinaten $x = nh$, $y = mh$,

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

---

[2]) J. le Roux, Sur le problème de Dirichlet, Journ. de mathém. pur. et appl. (6) **10** (1914), p. 189. R. G. D. Richardson, A new method in boundary problems for differential equations, Transactions of the Americ. Mathem. Soc. **18** (1917), p. 489 ff. H. B. Philips and N. Wiener, Nets and the Dirichlet Problem, Publ. of the Mass. Institute of Technology (1925).

Leider waren diese Abhandlungen dem ersten der drei Verfasser bei der Abfassung seiner Note „Zur Theorie der partiellen Differenzengleichungen", Gött. Nachr. 23. X. 1925, an welche die vorliegende Arbeit anschließt, entgangen.

Vgl. ferner: L. Lusternik, Über einige Anwendungen der direkten Methoden in der Variationsrechnung, Recueil de la Société Mathém. de Moscou, 1926. G. Bouligand, Sur le problème de Dirichlet, Ann. de la soc. polon. de mathém. **4**, Krakau 1926.

Über die Bedeutung des Differenzenansatzes und über weitere sie verwendende Arbeiten vgl. R. Courant, Über direkte Methoden in der Variationsrechnung, Math. Annalen **97**, S. 711 und die dort angegebene Literatur.

Es sei G ein Gebiet der Ebene, begrenzt von einer stetigen, doppelpunktfreien geschlossenen Kurve. Dann soll das zugehörige — bei genügend kleiner Maschenweite eindeutig bestimmte — Gittergebiet G_h aus allen denjenigen Gitterpunkten bestehen, welche in G liegen und sich von einem festen vorgegebenen Gitterpunkt aus G durch eine zusammenhängende Kette von Gitterpunkten verbinden lassen. Wir nennen zusammenhängende Kette von Gitterpunkten eine Folge solcher Punkte, bei der jeder Punkt einer der vier Nachbarpunkte des folgenden ist. Als Randpunkt von G_h bezeichnen wir einen solchen, dessen vier Nachbarpunkte nicht alle zu G_h gehören. Alle anderen Punkte von G_h nennen wir innere Punkte.

Wir betrachten Funktionen $u, v, \ldots$ des Ortes im Gitter, d. h. Funktionen, welche nur für die Gitterpunkte definiert sind. Wir bezeichnen sie auch mit $u(x, y)$, $v(x, y), \ldots$. Für ihre vorderen und hinteren Differenzenquotienten verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

$$\frac{1}{h}(u(x+h, y) - u(x, y)) = u_x, \quad \frac{1}{h}(u(x, y+h) - u(x, y)) = u_y,$$

$$\frac{1}{h}(u(x, y) - u(x-h, y)) = u_{\bar{x}}, \quad \frac{1}{h}(u(x, y) - u(x, y-h)) = u_{\bar{y}}.$$

Entsprechend bilden wir Differenzenquotienten höherer Ordnung, z. B.

$$(u_x)_{\bar{x}} = u_{x\bar{x}} = u_{\bar{x}x} = \frac{1}{h^2}(u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y))$$

usw.

2. Differenzenausdrücke und Greensche Umformungen.

Zu der einfachsten allgemeinen Übersicht über lineare Differenzenausdrücke zweiter Ordnung gelangen wir nach dem Muster der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, indem wir aus zwei Funktionen u und v und ihren vorderen Differenzenquotienten einen bilinearen Ausdruck

$$B(u, v) = a u_x v_x + b u_x v_y + c u_y v_x + d u_y v_y + \alpha u_x v + \beta u_y v + \gamma u v_x + \delta u v_y + g u v$$

bilden, wobei

$$a = a(x, y), \ldots, \quad \alpha = \alpha(x, y), \ldots, \quad g = g(x, y)$$

Funktionen im Gitter sind.

Aus dem Bilinearausdruck erster Ordnung leiten wir einen Differenzenausdruck zweiter Ordnung in folgender Weise ab: Wir bilden die Summe

$$h^2 \sum_{G_h}\sum B(u, v)$$

über alle Punkte eines Gebietes G_h im Gitter, wobei in $B(u, v)$ für die Differenzenquotienten zwischen einem Randpunkte und einem nicht zu G_h

gehörigen Punkte Null zu setzen ist. Die Summe formen wir nun durch partielle Summation um (d. h. wir ordnen nach v), und zerspalten sie in eine Summe über die Menge der inneren Punkte G_h' und eine Summe über die Menge der Randpunkte Γ_h. Wir erhalten so:

$$(1)\qquad h^2 \sum_{G_h}\sum B(u, v) = -h^2 \sum_{G_h'}\sum v\, L(u) - h \sum_{\Gamma_h} v\, \mathfrak{R}(u).$$

$L(u)$ ist der für alle inneren Punkte von G_h definierte lineare „Differenzenausdruck zweiter Ordnung“:

$$L(u) = (a u_x)_{\bar{x}} + (b u_x)_{\bar{y}} + (c u_y)_{\bar{x}} + (d u_y)_{\bar{y}}$$
$$- \alpha u_x - \beta u_y + (\gamma u)_{\bar{x}} + (\delta u)_{\bar{y}} - g u.$$

$\mathfrak{R}(u)$ ist für jeden Randpunkt ein linearer Differenzenausdruck, dessen genaue Gestalt wir hier nicht angeben.

Ordnet man $\sum\limits_{G_h}\sum B(u, v)$ nach u, so erhält man

$$(2)\qquad h^2 \sum_{G_h}\sum B(u, v) = -h^2 \sum_{G_h'}\sum u\, M(v) - h \sum_{\Gamma_h} u\, \mathfrak{S}(v).$$

$M(v)$ heißt der zu $L(u)$ adjungierte Differenzenausdruck; er lautet:

$$M(v) = (a v_x)_{\bar{x}} + (b v_y)_{\bar{x}} + (c v_x)_{\bar{y}} + (d v_y)_{\bar{y}}$$
$$+ (\alpha v)_{\bar{x}} + (\beta v)_{\bar{y}} - \gamma v_x - \delta v_y - g v,$$

während $\mathfrak{S}(v)$ ein $\mathfrak{R}(u)$ entsprechender Differenzenausdruck für den Rand ist.

Die Formeln (1), (2) und die aus ihnen folgende Formel

$$(3)\qquad h^2 \sum_{G_h'}\sum (v\, L(u) - u\, M(v)) + h \sum_{\Gamma_h} (v\, \mathfrak{R}(u) - u\, \mathfrak{S}(v)) = 0$$

nennen wir die Greenschen Formeln.

Der einfachste und wichtigste Fall ergibt sich, wenn die Bilinearform symmetrisch ist, d. h. wenn die Gleichungen $b = c$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ bestehen. In diesem Falle stimmt der Ausdruck $L(u)$ mit seinem adjungierten $M(u)$ überein; wir nennen ihn deshalb selbstadjungiert, und er ist schon aus dem quadratischen Ausdruck

$$B(u, u) = a u_x^2 + 2 b u_x u_y + d u_y^2 + 2 \alpha u_x u + 2 \beta u_y u + g u^2$$

ableitbar.

Wir beschränken uns im folgenden meist auf Ausdrücke $L(u)$, die sich selbst adjungiert sind. Der Charakter des Differenzenausdruckes $L(u)$ hängt vor allem von der Natur derjenigen Glieder aus der quadratischen Form $B(u, u)$ ab, die in den ersten Differenzenquotienten quadratisch sind. Wir nennen diesen Teil von $B(u, u)$ die charakteristische Form:

$$P(u, u) = a u_x^2 + 2 b u_x u_y + d u_y^2.$$

Je nachdem nun $P(u,u)$ in den Differenzenquotienten (positiv) definit oder indefinit ist, nennen wir den zugehörigen Differenzenausdruck $L(u)$ elliptisch oder hyperbolisch.

Der Differenzenausdruck

$$\Delta u = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}},$$

mit dem wir uns vorzugsweise in den folgenden Paragraphen beschäftigen werden, ist elliptisch. Er entsteht nämlich aus dem quadratischen Ausdruck

$$B(u,u) = u_x^2 + u_y^2 \quad \text{bzw.} \quad u_{\bar{x}}^2 + u_{\bar{y}}^2.$$

Die zugehörigen Greenschen Formeln lauten also:

$$(4) \qquad h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2) = -h^2 \sum_{G_h'}\sum u\,\Delta u - h \sum_{\Gamma_h} u\,\Re(u),$$ [3]

$$(5) \qquad h^2 \sum_{G_h'}\sum (v\,\Delta u - u\,\Delta v) + h \sum_{\Gamma_h} (v\,\Re(u) - u\,\Re(v)) = 0.$$

Der Differenzenausdruck $\Delta u = u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}}$ ist offenbar das Analogon des Differentialausdruckes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ für eine Funktion $u(x,y)$ der kontinuierlichen Variablen x und y. Ausführlich geschrieben lautet der Differenzenausdruck

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\{u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y)\}.$$

Es ist also $\frac{h^2}{4}\Delta u$ der Überschuß des arithmetischen Mittels der Funktionswerte in den vier Nachbarpunkten über den Funktionswert in dem betreffenden Punkt.

Ganz ähnliche Überlegungen führen zu linearen Differenzenausdrücken vierter Ordnung und entsprechenden Greenschen Formeln, wenn wir von bilinearen Differenzenausdrücken ausgehen, welche aus Differenzenquotienten zweiter Ordnung gebildet sind. Wir begnügen uns mit dem Beispiel des Differenzenausdruckes

$$\Delta\Delta u = u_{xx\bar{x}\bar{x}} + 2u_{x\bar{x}y\bar{y}} + u_{yy\bar{y}\bar{y}}.$$

Er entspringt aus dem quadratischen Ausdruck

$$B(u,u) = (u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}})^2 = (\Delta u)^2,$$

wenn wir die Summe

$$h^2 \sum_{G_h'}\sum \Delta u\,\Delta v$$

---

[3]) Der Randausdruck $\Re(u)$ läßt sich hier so beschreiben: Sind $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ die Funktionswerte in dem betreffenden Randpunkte und seinen ν Nachbarpunkten ($\nu \leqq 3$), so ist

$$\Re(u) = \frac{1}{h}(u_1 + \ldots + u_\nu - \nu u_0).$$

nach v ordnen, etwa indem wir in der Formel (5) an Stelle von u den Ausdruck $\varDelta u$ setzen. Wir müssen dabei beachten, daß in dem Ausdruck $\varDelta\varDelta u$ der Funktionswert an einer Stelle mit den Funktionswerten in seinen Nachbarpunkten und deren Nachbarpunkten verknüpft ist und daher nur für solche Punkte des Gebietes G_h definiert ist, die innere Punkte auch von G_h' sind (vgl. 5) und deren Gesamtheit wir mit G_h'' bezeichnen wollen. Wir erhalten dann die Greensche Formel

$$(6) \qquad h^2 \sum_{G_h'}\sum \varDelta u\cdot\varDelta v = h^2 \sum_{G_h''}\sum v\cdot\varDelta\varDelta u + h \sum_{\Gamma_h+\Gamma_h'} v\cdot\Re(u),$$

wo $\Re(u)$ ein für jeden Punkt des Randstreifens $\Gamma_h+\Gamma_h'$ definierbarer linearer Differenzenausdruck ist, den wir nicht näher angeben. Γ_h' bedeutet dabei die Menge der Randpunkte von G_h'.

§ 2.

Randwertprobleme und Eigenwertprobleme.

1. Die Theorie des Randwertproblems.

Die Randwertaufgabe für lineare elliptische homogene Differenzengleichungen zweiter Ordnung, welche der klassischen Randwertaufgabe für partielle Differentialgleichungen entspricht, formulieren wir folgendermaßen:

In einem Gittergebiete G_h sei ein selbstadjungierter elliptischer linearer Differenzenausdruck zweiter Ordnung $L(u)$ gegeben. Er möge aus einem quadratischen Ausdruck $B(u, u)$ entspringen, der positiv-definit ist in dem Sinne, daß er nicht verschwinden kann, wenn nicht u_x und u_y selbst verschwinden.

Man bestimme nun in G_h eine solche der Differenzengleichung

$$L(u) = 0$$

genügende Funktion u, welche in den Randpunkten dieses Gittergebietes mit vorgegebenen Werten übereinstimmt.

Unsere Forderung wird dargestellt durch ebenso viele lineare Gleichungen wie es innere Gitterpunkte des Gittergebietes, also zu bestimmende Funktionswerte u gibt[4]). Einige dieser Gleichungen, nämlich soweit sie zu Gitterpunkten gehören, welche mit ihren vier Nachbarn im Innern liegen, sind homogen; andere, bei welchen Randpunkte des Gittergebietes mit eingehen, sind inhomogen. Setzen wir die rechten Seiten dieses in-

[4]) Bildet man zu einer beliebigen Differenzengleichung zweiter Ordnung $L(u) = 0$, indem man sie als ein lineares Gleichungssystem auffaßt, das transponierte Gleichungssystem, so wird dieses durch die adjungierte Differenzengleichung $M(v) = 0$ dargestellt. Die oben betrachtete selbstadjungierte Differenzengleichung stellt also ein lineares Gleichungssystem mit symmetrischem Koeffizientenschema dar.

homogenen Gleichungssystems, d. h. die Randwerte von u gleich Null, so folgt aus der Greenschen Formel (1), wenn wir dort $u = v$ setzen, sofort das Verschwinden von $B(u, u)$ und wegen des Definitheitscharakters von $B(u, u)$ das Verschwinden von u_x, u_y und damit auch von u. Die Differenzengleichung hat also die Lösung $u = 0$, wenn die Randwerte verschwinden, oder mit anderen Worten, die Lösung ist durch die Randwerte, wenn überhaupt, eindeutig bestimmt, da die Differenz zweier Lösungen mit denselben Randwerten verschwinden muß. Wenn aber ein lineares Gleichungssystem mit ebenso vielen Unbekannten wie Gleichungen die Eigenschaft besitzt, daß bei verschwindenden rechten Seiten auch die Unbekannten sämtlich verschwinden müssen, so besagt der Fundamentalsatz der Gleichungstheorie, daß bei beliebig vorgegebenen rechten Seiten genau eine Lösung vorhanden sein muß. In unserem Falle folgt somit die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe.

Wir sehen also, daß bei unseren elliptischen Differenzengleichungen die eindeutige Bestimmtheit und die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe durch den Fundamentalsatz der Theorie der linearen Gleichungen miteinander zusammenhängen, während in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen bekanntlich beide Tatsachen mit ganz verschiedenen Methoden bewiesen werden müssen. Der Grund für diese Schwierigkeit ist darin zu erblicken, daß Differentialgleichungen nicht mehr mit endlich vielen Gleichungen äquivalent sind; und man sich daher nicht mehr auf die Gleichheit der Anzahl von Unbekannten und Gleichungen berufen kann.

Da die Differenzengleichung

$$\Delta u = 0$$

aus dem positiv-definiten quadratischen Ausdruck

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2)$$

entspringt, ist also das Randwertproblem dieser Differenzengleichung stets eindeutig lösbar.

Ganz entsprechend wie für die Differenzengleichungen zweiter Ordnung entwickelt sich die Theorie für Differenzengleichungen höherer, z. B. vierter Ordnung, wofür das Beispiel der Differenzengleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

genügen möge. Hier müssen die Werte der Funktion u in dem Randstreifen $\Gamma_h + \Gamma_h'$ vorgegeben werden. Offenbar liefert auch die Differenzengleichung $\Delta\Delta u = 0$ ebensoviel lineare Gleichungen wie unbekannte Funktionswerte in den Punkten von G_h''. Um die eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe nachzuweisen, brauchen wir wieder nur zu zeigen, daß eine Lösung, deren Werte im Randstreifen $\Gamma_h + \Gamma'_h$ Null sind, notwendig identisch verschwindet. Zu dem Zweck bemerken wir, daß die Summe über den zugehörigen quadratischen Ausdruck:

$$h^2 \sum_{G''_h}\sum (\Delta u)^2 \tag{7}$$

für eine solche Funktion verschwindet, wie wir sofort erkennen, wenn wir diese Summe nach der Greenschen Formel (6) umformen. Das Verschwinden der Summe (7) zieht aber das Verschwinden von Δu in allen Punkten von G'_h nach sich, und das kann bei verschwindenden Randwerten nach dem oben Bewiesenen nur stattfinden, wenn die Funktion u überall den Wert Null annimmt. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen und die eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe des Differenzenausdruckes sichergestellt [5]).

2. Beziehungen zu Minimumproblemen.

Die obige Randwertaufgabe steht in Zusammenhang mit dem folgenden Minimumproblem: Unter allen im Gittergebiet G_h definierten Funktionen $\varphi(x, y)$, welche in den Randpunkten vorgeschriebene Werte annehmen, ist eine solche $\varphi = u(x, y)$ zu suchen, für welche die über das Gittergebiet erstreckte Summe

$$h^2 \sum_{G_h}\sum B(\varphi, \varphi)$$

einen möglichst kleinen Wert annimmt. Dabei setzen wir voraus, daß der quadratische Differenzenausdruck erster Ordnung $B(u, u)$ in dem oben (vgl. S. 36) genannten Sinne positiv-definit ist. Daß sich aus dieser Minimumforderung als Bedingung für die Lösung $\varphi = u(x, y)$ die Differenzengleichung $L(\varphi) = 0$ ergibt, wo $L(\varphi)$ der in der obigen (vgl. S. 35 (1)) Weise aus $B(\varphi, \varphi)$ abgeleitete Differenzenausdruck zweiter Ordnung ist, erkennt man entweder nach den Regeln der Differentialrechnung, indem man die Summe $h^2 \sum_{G_h}\sum B(\varphi, \varphi)$ als Funktion der endlichen vielen Werte von φ in den Gitterpunkten ansieht oder analog dem üblichen Verfahren in der Variationsrechnung.

Beispielsweise ist das Randwertproblem, eine Lösung der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ zu finden, die vorgegebene Randwerte annimmt, mit der Aufgabe

[5]) Vergleiche für die wirkliche Durchführung der Lösung unserer Randwertprobleme durch iterierende Verfahren u. a. die Abhandlung: Über Randwertaufgaben bei partiellen Differenzengleichungen von R. Courant, Zeitschr. f. angew. Mathematik u. Mechanik **6** (1925), S. 322—325. Im übrigen sei verwiesen auf den Bericht von H. Henky, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **2** (1922), S. 58 ff.

gleichwertig, die Summe $h^2 \sum_{G_h} \sum (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)$ unter allen Funktionen, die die Randwerte annehmen, zum Minimum zu machen.

Ganz Ähnliches gilt für Differenzengleichungen vierter Ordnung, wobei wir uns wiederum auf das Beispiel von $\Delta \Delta \varphi = 0$ beschränken. Die zu dieser Differenzengleichung gehörige Randwertaufgabe ist mit dem Problem gleichwertig, die Summe $h^2 \sum_{G_h'} \sum (\Delta \varphi)^2$ unter allen Funktionen $\varphi(x, y)$ zum Minimum zu machen, deren Werte in dem Randstreifen Γ_h' vorgegeben sind. Außer dieser Summe führen auch noch andere in den zweiten Ableitungen quadratische Ausdrücke durch die Forderung, sie zum Minimum zu machen, auf die Gleichung $\Delta \Delta u = 0$, so z. B. die Summe:

$$h^2 \sum_{G_h'} \sum (u_{xx}^2 + 2 u_{xy}^2 + u_{yy}^2),$$

in der sämtliche in G_h auftretenden zweiten Differenzenquotienten vorkommen sollen.

Daß die gestellten Minimumprobleme immer eine Lösung besitzen, folgt aus dem Satz, daß eine stetige Funktion von endlichen vielen Veränderlichen (den Funktionswerten von φ in den Gitterpunkten) stets ein Minimum besitzen muß, wenn diese Funktion nach unten beschränkt ist und wenn sie gegen Unendlich strebt, sobald mindestens eine der unabhängigen Veränderlichen es tut[6]).

3. Die Greensche Funktion.

Ähnlich wie die Randwertaufgabe der homogenen Gleichung $L(u) = 0$ kann man auch die Randwertaufgabe der unhomogenen Gleichung $L(u) = -f$ behandeln. Es genügt, bei der unhomogenen Gleichung sich auf den Fall zu beschränken, daß die Randwerte von u überall verschwinden, da wir für andere Randwerte die Lösung durch Addition einer geeigneten Lösung der homogenen Gleichung erhalten. Um das lineare Gleichungssystem, welches durch die Randwertaufgabe von $L(u) = -f$ repräsentiert ist, zu lösen, wählen wir zunächst die Funktion $f(x, y)$ so, daß sie in einem Gitterpunkte mit den Koordinaten $x = \xi$, $y = \eta$ den Wert $-\frac{1}{h^2}$, in allen andern Gitterpunkten den Wert Null annimmt. Ist $K(x, y; \xi, \eta)$ die am Rande verschwindende Lösung der so entstehenden speziellen noch vom Parameterpunkt (ξ, η) abhängigen Differenzengleichung, so wird die zu

[6]) Daß die Voraussetzungen für die Anwendungen dieses Satzes gegeben sind, ist sehr leicht einzusehen.

einer beliebigen Funktion gehörige Lösung durch die Summe

$$u(x, y) = h^2 \sum_{(\xi, \eta) \text{ in } G_h} \sum K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)$$

dargestellt.

Die Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ in ihrer Abhängigkeit von den Punkten (x, y) und (ξ, η) nennen wir die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$. Bezeichnen wir mit $\overline{K}(x, y; \xi, \eta)$ die Greensche Funktion des adjungierten Ausdruckes $M(v)$, so gilt die Relation

$$K(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) = \overline{K}(\xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}),$$

die man auch unmittelbar aus der Greenschen Formel (5) folgert, wenn man dort $u = K(x, y; \xi, \eta)$ und $v = \overline{K}(x, y; \bar{\xi}, \bar{\eta})$ setzt. Für einen selbstadjungierten Differenzenausdruck ergibt sich aus der obigen Beziehung die Symmetrierelation:

$$K(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta) = K(\xi, \eta; \bar{\xi}, \bar{\eta}).$$

4. Eigenwertprobleme.

Selbstadjungierte Differenzenausdrücke $L(u)$ geben Anlaß zu Eigenwertproblemen von folgendem Typ: Es sind die Werte eines Parameters λ — die Eigenwerte — zu suchen, für die die Differenzengleichung

$$L(u) + \lambda u = 0$$

in G_h eine auf dem Rande Γ_h verschwindende Lösung — die Eigenfunktion — besitzt.

Das Eigenwertproblem ist äquivalent dem Hauptachsenproblem der quadratischen Form $B(u, u)$. Es gibt ebenso viele Eigenwerte $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)}$ wie innere Gitterpunkte im Gebiet G_h und ebenso viele zugehörige Eigenfunktionen $u^{(1)}, \ldots, u^{(N)}$. Das System der Eigenfunktionen und Eigenwerte und ihre Existenz ergibt sich aus dem Minimumproblem:

Unter allen am Rande verschwindenden Funktionen $\varphi(x, y)$, die den $m - 1$ Orthogonalitätsbedingungen

$$h^2 \sum_{G_h} \sum \varphi u^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, m - 1)$$

und der Normierungsbedingung

$$h^2 \sum_{G_h} \sum \varphi^2 = 1$$

genügen, ist diejenige $\varphi = u$ gesucht, für die die Summe

$$h^2 \sum_{G_h} \sum B(\varphi, \varphi)$$

den kleinsten Wert annimmt. Der Wert dieses Minimums ist der m-te Eigenwert und die Funktion, für die es angenommen wird, ist die m-te Eigenfunktion [7]).

§ 3.[8])

Zusammenhänge mit dem Problem der Irrwege.

Unser Thema steht in Beziehung zu einer Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich dem Problem der Irrwege in einem begrenzten Gebiet [9]). Man stelle sich in einem Gittergebiet G_h die Gitterstrecken als Wege vor, längs deren ein Partikel von einem Gitterpunkt zu einem Nachbarpunkt wandern kann. In diesem Straßennetz möge nun unser Partikel ziellos herumirren, indem es an jeder Straßenecke unter den vier verfügbaren Richtungen eine nach dem Zufall auswählt — alle vier seien gleich wahrscheinlich —. Die Irrfahrt endet, sobald ein Randpunkt von G_h erreicht ist, wo unsere Partikel absorbiert werden mögen.

Wir fragen:

1. Welches ist die Wahrscheinlichkeit $w(P;R)$ daß man bei der Irrfahrt von einem Punkte P ausgehend irgend einmal in dem Randpunkte R ankommt?

2. Welches ist die mathematische Hoffnung $v(P;Q)$, daß man bei einer solchen von P ausgehenden Irrfahrt, ohne den Rand zu treffen, einen Punkt Q von G_h berührt?

---

[7]) Wegen der Orthogonalität $h^2 \sum\limits_{G_h}\sum u^{(\nu)} u^{(\mu)} = 0 \quad (\nu \neq \mu)$ der Eigenfunktionen läßt sich jede am Rande verschwindende Funktion $g(x,y)$ des Gitters nach den Eigenfunktionen in der Form

$$y = \sum_{\nu=1}^{N} c^{(\nu)} u^{(\nu)}$$

entwickeln, wo die Koeffizienten $c^{(\nu)}$ durch die Gleichung

$$c^{(\nu)} = \sum_{G_h}\sum g\, u^{(\nu)}$$

bestimmt sind.

Auf diese Weise erhalten wir insbesondere die folgende Darstellung der Greenschen Funktion:

$$K(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{h^2}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{u^{(\nu)}(x,y)\cdot u^{(\nu)}(\xi,\eta)}{\lambda^{(\nu)}}.$$

[8]) Für die Durchführung des Grenzüberganges in § 4 ist § 3 entbehrlich.

[9]) Gerade in der Art wie hier die Grenzen des Gebietes hineinspielen, liegt ein wesentlicher Unterschied der folgenden Betrachtung gegenüber bekannten Überlegungen, die z. B. im Zusammenhange mit der Brownschen Molekularbewegung durchgeführt worden sind.

Diese Wahrscheinlichkeit bzw. mathematische Hoffnung wollen wir durch folgenden Prozeß genauer erklären. Wir denken uns im Punkte P die Einheit irgendeiner Substanzmenge vorhanden. Die Substanz möge sich in unserem Straßennetz mit einer konstanten Geschwindigkeit ausbreiten, etwa in der Zeiteinheit eine Gitterstrecke zurücklegen. In jedem Gitterpunkte soll nach jeder der vier Richtungen genau ein Viertel der dort ankommenden Substanz weiterströmen. Die Substanzmenge, die in einem Randpunkte ankommt, soll dort festgehalten werden. Ist der Ausgangspunkt P ein Randpunkt, so soll die Substanzmenge überhaupt dort bleiben.

Unter der Wahrscheinlichkeit $w(P;R)$ überhaupt bei einer von P ausgehenden Irrfahrt an den Randpunkt R zu gelangen, ohne vorher den Rand berührt zu haben, verstehen wir die Substanzmenge, die sich nach unendlicher Zeit in diesem Randpunkte angesammelt hat.

Unter der Wahrscheinlichkeit $E_n(P;Q)$ in genau n Schritten vom Punkte P zum Punkte Q zu gelangen, ohne den Rand zu berühren, verstehen wir die im Punkte Q nach n Zeiteinheiten befindliche Substanzmenge, falls P und Q innere Punkte sind. Ist P oder Q ein Randpunkt, so setzen wir sie gleich Null.

Die Größe $E_n(P;Q)$ ist gerade die Anzahl der von P nach Q führenden den Rand nicht treffenden Wege von n Schritten, durch 4^n dividiert; es ist also $E_n(P;Q) = E_n(Q;P)$.

Unter der mathematischen Hoffnung $v(P;Q)$ bei einem oben gekennzeichneten Irrwege überhaupt einmal von P aus zum Punkte Q zu gelangen, verstehen wir die unendliche Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten

$$v(P;Q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu(P;Q),$$ [10]

also für innere Punkte P und Q die Summe aller Substanzmengen, die in den verschiedenen Zeitmomenten den Punkt Q durchlaufen haben. Es wird also dem Erreichen des Punktes Q der Erwartungswert 1 zugeschrieben. Für Randpunkte ist diese Hoffnung gleich Null.

Bezeichnen wir die im Randpunkte R mit genau n Schritten ankommende Menge mit $F_n(P;R)$, so ist die Wahrscheinlichkeit $w(P;R)$ durch die unendliche Reihe

$$w(P;R) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(P;R)$$

dargestellt, deren sämtliche Glieder positiv sind, und deren Teilsummen nie größer als Eins sein können, weil die am Rande ankommende Substanz

[10]) Ihre Konvergenz werden wir sogleich beweisen.

nur einen Teil der ursprünglichen Substanzmenge ausmacht. Damit ist aber die Konvergenz dieser Reihe gesichert.

Man kann nun leicht einsehen, daß die Wahrscheinlichkeiten $E_n(P;Q)$, d. h. die nach genau n Schritten in einem Punkte Q anlangende Substanzmenge mit wachsendem n gegen Null strebt. Ist nämlich in irgendeinem Punkte Q, von dem aus ein Randpunkt R in m Schritten zu erreichen sei, $E_n(P;Q) > \alpha > 0$, so wird nach m Schritten in diesem Randpunkt R mindestens die Substanzmenge $\frac{\alpha}{4^m}$ ankommen; da aber wegen der Konvergenz der Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(P;R)$ die an den Randpunkt R ankommende Substanzmenge mit der Zeit gegen Null strebt, so müssen auch die Größen $E_n(P;Q)$ selber mit wachsendem n gegen Null streben; d. h. die Wahrscheinlichkeit bei einem unendlich langen Wege im Innern zu bleiben, ist Null.

Hieraus ergibt sich, daß die gesamte Substanzmenge schließlich an den Rand ankommen muß; mit anderen Worten, daß die über alle Randpunkte R erstreckte Summe

$$\sum_R w(P;R) = 1$$

ist.

Wir haben noch die Konvergenz der unendlichen Reihe für die mathematische Hoffnung $v(P;Q)$

$$v(P;Q) = \sum_{\nu=0}^{\infty} E_\nu(P;Q)$$

zu beweisen.

Zu dem Zweck bemerken wir, daß die Größen $E_n(P;Q)$ der folgenden Relation genügen

$$E_{n+1}(P;Q) = \frac{1}{4}\{E_n(P;Q_1) + E_n(P;Q_2) + E_n(P;Q_3) + E_n(P;Q_4)\}$$
$$[n \geqq 1],$$

wo Q_1 bis Q_4 die vier Nachbarpunkte des inneren Punktes Q sind. D. h. die nach $n+1$ Schritten im Punkte Q ankommende Substanzmenge besteht aus dem vierten Teil der nach n Schritten in den vier Nachbarpunkten von Q ankommenden Substanzmenge. Ist einer der Nachbarpunkte von Q z. B. $Q_1 = R$ Randpunkt, so kommt die Tatsache, daß zum Punkte Q von diesem Randpunkte aus keine Substanzmenge weiter fließt, dadurch zum Ausdruck, daß wir $E_n(P;R)$ gleich Null gesetzt haben. Ferner ist für einen inneren Punkt $E_0(P;P) = 1$ und sonst $E_0(P;Q) = 0$.

Aus diesen Relationen ergeben sich für die Teilsummen

$$v_n(P;Q) = \sum_{\nu=0}^{n} E_\nu(P;Q)$$

die Gleichungen

$$v_{n+1}(P;Q) = \frac{1}{4}\{v_n(P;Q_1) + v_n(P;Q_2) + v_n(P;Q_3) + v_n(P;Q_4)\},$$

wenn P nicht mit Q zusammenfällt; andernfalls ist

$$v_{n+1}(P;P) = 1 + \frac{1}{4}\{v_n(P;P_1) + v_n(P;P_2) + v_n(P;P_3) + v_n(P;P_4)\},$$

d. h. die Hoffnung, von einem Punkte zu sich selbst zurückzukommen, setzt sich zusammen aus der Hoffnung, auf einem nicht verschwindenden Wege den Punkt P wieder zu erreichen, nämlich $\frac{1}{4}\{v_n(P;P_1) + v_n(P;P_2) + v_n(P;P_3) + v_n(P;P_4)\}$ und aus der Hoffnung Eins, die ausdrückt, daß ursprünglich die gesamte Substanz in diesem Punkte vorhanden war.

Es genügen also die Größen $v_n(P;Q)$ der folgenden Differenzengleichung[11])

$$\Delta v_n(P;Q) = \frac{4}{h^2} E_n(P;Q), \qquad \text{wenn} \quad P \neq Q \quad \text{ist},$$

$$\Delta v_n(P;Q) = \frac{4}{h^2}(E_n(P;Q) - 1), \quad \text{wenn} \quad P = Q \quad \text{ist}.$$

$v_n(P;Q)$ ist gleich Null, wenn Q ein Randpunkt ist.

Die Lösung dieser Randwertaufgabe ist, wie schon früher auseinandergesetzt, für irgendwelche rechten Seiten eindeutig bestimmt (vgl. S. 38); sie hängt stetig von den rechten Seiten ab. Da nun die Größen $E_n(P;Q)$ gegen Null streben, so konvergieren die Lösungen $v_n(P;Q)$ gegen die Lösungen $v(P;Q)$ der Differenzengleichung

$$\Delta v(P;Q) = 0, \qquad \text{wenn} \quad P \neq Q \quad \text{ist},$$

$$\Delta v(P;Q) = -\frac{4}{h^2}, \qquad \text{wenn} \quad P = Q \quad \text{ist},$$

mit den Randwerten $v(P;R) = 0$.

---

11) Dabei bezieht sich die Δ-Operation auf den variablen Punkt Q.

Diese Gleichung läßt sich als eine Gleichung vom Wärmeleitungstypus auffassen. Betrachtet man nämlich die Funktion $v_n(P;Q)$ anstatt als Funktion des Index n unserer oben zugrunde gelegten Vorstellung gemäß als Funktion der Zeit t, die zu n proportional ist, indem man $t = n\tau$ und $v_n(P;Q) = v(P;Q;t) = v(t)$ setzt, so können wir die obigen Gleichungen in der folgenden Form schreiben;

$$\Delta v(t) = \frac{4\tau}{h^2} \cdot \frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau} \quad \text{für} \quad P \neq Q,$$

$$\Delta v(t) = \frac{4\tau}{h^2}\left(\frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau} - 1\right) \quad \text{für} \quad P = Q.$$

Über den Grenzübergang von einer ähnlichen Differenzengleichung zu einer parabolischen Differentialgleichung vgl. Teil II, § 6, S. 67.

Wir sehen also, daß die mathematische Hoffnung $v(P;Q)$ existiert und nichts anderes ist als die zur Differenzengleichung $\Delta u = 0$ zugehörige Greensche Funktion $K(P;Q)$ noch mit dem Faktor 4 versehen. Die Symmetrie der Greenschen Funktion $K(P;Q) = K(Q;P)$ ist eine unmittelbare Folge der Symmetrie der Größen $E_n(P;Q)$, mit deren Hilfe sie definiert wurde.

Die Wahrscheinlichkeit $w(P;R)$ genügt hinsichtlich P der Relation

$$w(P;R) = \frac{1}{4}\{w(P_1;R) + w(P_2;R) + w(P_3;R) + w(P_4;R)\},$$

also der Differenzengleichung

$$\Delta w = 0.$$

Sind nämlich P_1, P_2, P_3, P_4 die vier Nachbarpunkte des inneren Punktes P, so muß jeder Weg von P nach R über einen dieser vier Wege führen, und jede der vier Wegrichtungen ist gleich wahrscheinlich. Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, von einem Randpunkt R zu einem andern R' zu gelangen, $w(R, R') = 0$, außer wenn die beiden Punkte R und R' zusammenfallen, wo $w(R, R) = 1$ gilt. Es ist also $w(P;R)$ die Lösung der Randwertaufgabe $\Delta w = 0$, wobei im Randpunkte R der Randwert 1 in allen anderen Punkten der Randwert 0 vorgeschrieben ist. Die Lösung der Randwertaufgabe bei beliebig vorgegebenen Randwerten $u(R)$ hat dann einfach die Gestalt $u(P) = \sum\limits_R w(P;R)\, u(R)$, wobei über alle Randpunkte R zu summieren ist[12]). Setzen wir hierin für u die Funktion $u \equiv 1$ ein, so erhalten wir wieder die Relation $1 = \sum\limits_R w(P;R)$.

Die hier gegebene Auffassung der Greenschen Funktion als Hoffnung läßt unmittelbar weitere Eigenschaften erkennen. Wir erwähnen nur die Tatsache, daß die Greensche Funktion wächst, wenn man von dem Gebiete G zu einem in G als Teilgebiet enthaltenen Teilgebiete $\overline{G}$ übergeht; es wächst dann nämlich für jedes n die Anzahl der möglichen Gitterwege, von einem Punkte P zu einem anderen Q zu gelangen, ohne den Rand zu berühren.

Natürlich herrschen für mehr als zwei unabhängige Veränderliche entsprechende Beziehungen. Wir begnügen uns mit dem Hinweis, daß auch andere elliptische Differenzengleichungen eine ähnliche Wahrscheinlichkeitsauffassung zulassen.

Führt man den Grenzübergang zu verschwindender Maschenweite durch, was sich mit den Methoden des folgenden Paragraphen einfach ausführen

---

[12]) Man erkennt übrigens leicht, daß die Wahrscheinlichkeit $w(P;R)$, an den Rand zu gelangen, der von der Greenschen Funktion $K(P;Q)$ hinsichtlich Q gebildete Randausdruck $\mathfrak{R}(K(P,Q))$ ist, indem man in der Greenschen Formel (5) $u(x,y)$ mit $w(P,Q)$, $v(x,y)$ mit $v(P,Q)$ identifiziert.

läßt, so geht die Greensche Funktion im Gitter bis auf einen Zahlenfaktor in die Greensche Funktion der Potentialgleichung über; eine ähnliche Beziehung besteht zwischen dem Ausdruck $\frac{w(P;R)}{h}$ und der normalen Ableitung der Greenschen Funktion am Rande des Gebietes. Auf diese Weise ließe sich z. B. die Greensche Funktion der Potentialgleichung als die spezifische mathematische Hoffnung deuten, von einem Punkte zu einem anderen zu gelangen[13]), ohne den Rand zu berühren.

Nach dem Grenzübergang vom Gitter zum Kontinuum ist der Einfluß der bei den Irrwegen vorgeschriebenen Gitterrichtungen verschwunden. Dieser Tatsache Rechnung zu tragen, indem man den Grenzübergang mit einem allgemeineren Irrfahrtenproblem ohne Richtungsbeschränkung vornimmt, ist eine prinzipiell interessante Aufgabe, welche jedoch über den Rahmen dieser Abhandlung hinaus führt und auf die wir bei anderer Gelegenheit zurückzukommen hoffen.

§ 4.

Grenzübergang zur Lösung der Differentialgleichung.

1. Die Randwertaufgabe der Potentialtheorie.

Bei der Durchführung des Grenzüberganges von der Lösung der Differenzengleichungsprobleme zu der Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen wollen wir hinsichtlich des Randes und der Randwerte auf die größtmögliche Allgemeinheit in der Formulierung verzichten, um das für unsere Methoden Charakteristische klarer hervortreten zu lassen[14]). Wir setzen demgemäß voraus, daß in der Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet G vorgegeben ist, dessen Berandung aus endlich vielen mit stetiger Tangente versehenen Kurvenbögen gebildet wird. In einem G im Innern enthaltenden Gebiete sei eine stetige und mit stetigen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion $f(x, y)$ gegeben. Für das zu der Maschenweite h und zum Gebiete G gehörige Gittergebiet G sei die Randwertaufgabe der Differenzengleichung $\Delta u = 0$ mit denjenigen Randwerten, welche von der Funktion $f(x, y)$ in den Randpunkten von G_h angenommen werden, gelöst; die Lösung heiße $u_h(x, y)$. Wir wollen beweisen, daß die Gitterfunktion u_h mit verschwindender Maschenweite h gegen die Lösung u der Randwertaufgabe der partiellen

[13]) Dabei ist dem Erreichen eines Flächenstücks als Erwartungswert sein Flächeninhalt zugeschrieben.

[14]) Es sei jedoch bemerkt, daß die Ausdehnung unserer Methoden auf allgemeinere Ränder und Randwerte keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten bereitet.

Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ für das Gebiet G konvergiert, wobei die Randwerte für das Gebiet G wiederum durch diejenigen Werte geliefert werden, welche die Funktion $f(x, y)$ auf dem Rande von G annimmt. Weiter werden wir zeigen, daß für jedes ganz im Innern von G liegende Gebiet die Differenzenquotienten beliebiger Ordnung von u_h gleichmäßig gegen die entsprechenden partiellen Differentialquotienten der Grenzfunktion $u(x, y)$ streben.

Bei der Durchführung des Konvergenzbeweises ist es bequem, die Forderung, daß $u(x, y)$ die Randwerte annimmt, durch die folgende schwächere Forderung zu ersetzen: Ist S_r derjenige Randstreifen des Gebietes G, dessen Punkte vom Rande eine Entfernung kleiner als r besitzen, so strebt das Integral

$$\frac{1}{r} \iint\limits_{S_r} (u - f)^2 \, dx \, dy$$

mit abnehmendem r gegen Null[15]).

Unser Konvergenzbeweis beruht auf der Tatsache, daß für jedes ganz im Innern des Gebietes G liegende Teilgebiet G^* die Funktion $u_h(x, y)$ und jeder Differenzenquotient bei abnehmendem h beschränkt bleibt und „gleichartig stetig" ist in folgendem Sinne: Es gibt für jede dieser Funktionen $w_h(x, y)$ eine nur von dem Gebiete und nicht von h abhängige Größe $\delta(\varepsilon)$ derart, daß

$$|w_h(P) - w_h(P_1)| < \varepsilon$$

ist, sobald die beiden Gitterpunkte P und P_1 des Gittergebietes G_h in dem gegebenen Teilgebiet liegen und voneinander einen kleineren Abstand als $\delta(\varepsilon)$ besitzen.

---

[15]) Daß tatsächlich unsere schwächere Randwertforderung zur *eindeutigen* Kennzeichnung der Lösung genügt, folgt aus dem leicht zu beweisenden Satze: Wenn für eine im Innern von G der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügende Funktion die obige Form der Randbedingung mit $f(x, y) = 0$ erfüllt ist und $\iint\limits_G \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx \, dy$ existiert, so ist $u(x, y)$ identisch Null. (Vgl. Courant, „Über die Lösungen der Diff.-Gl. der Physik", Math. Annalen **85**, insbesondere S. 296 ff.)

Im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen läßt sich aus unserer schwächeren Forderung die tatsächliche Annahme der Randwerte folgern; im Falle von mehr Variablen darf man das Entsprechende schon deswegen nicht allgemein erwarten, weil es dort bekanntlich Ausnahmepunkte am Rande geben kann, in denen die Randwerte nicht mehr angenommen zu werden brauchen, während jedoch für die schwächere Forderung stets eine Lösung existiert.

Haben wir einmal die behauptete gleichartige Stetigkeit bewiesen, so können wir bekanntlich eine Teilfolge unserer Funktionen u_h so auswählen, daß sie mit ihren Differenzenquotienten jeder Ordnung in jedem Teilgebiet G^* gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u(x, y)$ bzw. deren Differentialquotienten strebt. Die Grenzfunktion besitzt dementsprechend Ableitungen beliebig hoher Ordnung in jedem inneren Teilgebiet G^* von G und genügt dort der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Wenn wir dann noch zeigen, daß sie die Randbedingung befriedigt, so erkennen wir in ihr die Lösung unseres Randwertproblems für das Gebiet G. Da diese Lösung eindeutig bestimmt ist, so zeigt sich nachträglich, daß nicht nur eine Teilfolge der Funktionen u_h, sondern diese Funktionenfolge selbst die ausgesprochene Konvergenzeigenschaft besitzt.

Die gleichartige Stetigkeit unserer Größen wird sich durch den Nachweis folgender Tatsachen ergeben:

1. Bei abnehmendem h bleiben die über das Gittergebiet G_h erstreckten Summen

$$h^2 \sum_{G_h}\sum u^2 \quad \text{und} \quad h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2)$$

beschränkt[16]).

2. Genügt $w = w_h$ in einem Gitterpunkt G_h der Differenzengleichung $\Delta w = 0$ und bleibt bei abnehmendem h die Summe

$$h^2 \sum_{G_h^*}\sum w^2,$$

erstreckt über ein zu einem Teilgebiet G^* von G gehöriges Gittergebiet G_h^*, beschränkt, so bleibt für jedes feste ganz im Innern von G^* liegende Teilgebiet G^{**} auch die über das zugehörige Gittergebiet G_h^{**} erstreckte Summe

$$h^2 \sum_{G_h^{**}}\sum (w_x^2 + w_y^2)$$

bei abnehmendem h beschränkt.

Zusammen mit 1. folgt hieraus, da sämtliche Differenzenquotienten w der Funktion u_h wieder der Differenzengleichung $\Delta w = 0$ genügen, daß jede der Summen

$$h^2 \sum_{G_h^*}\sum w^2$$

beschränkt ist.

3. Aus der Beschränktheit dieser Summen folgt schließlich die Beschränktheit und gleichartige Stetigkeit aller Differenzenquotienten selbst.

---

[16]) Hier und gelegentlich im folgenden lassen wir bei Gitterfunktionen den Index h fort.

2. Beweis der Hilfssätze.

Der Beweis der Tatsache 1 folgt daraus, daß die Funktionswerte u_h selbst beschränkt sind. Denn der größte und der kleinste Wert der Funktion wird am Rande angenommen[17]), strebt also gegen vorgegebene endliche Werte. Die Beschränktheit der Summe $h^2 \sum\limits_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2)$ ist eine unmittelbare Folge der im § 2, **2.** formulierten Minimumeigenschaft unserer Gitterfunktion, wonach sicherlich

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2) \leqq h^2 \sum_{G_h}\sum (f_x^2 + f_y^2)$$

gilt. Die Summe rechts strebt aber mit abnehmender Maschenweite gegen das Integral $\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$, welches nach unseren Voraussetzungen existiert.

Um den unter 2. formulierten Hilfssatz zu beweisen, betrachten wir die Quadratsumme

$$h^2 \sum_{Q_1}\sum (w_x^2 + w_{\bar{x}}^2 + w_y^2 + w_{\bar{y}}^2),$$

wobei die Summation sich auf alle inneren Punkte eines Quadrates Q_1 bezieht (vgl. Fig. 1). Die Funktionswerte auf den äußeren Seiten S_1 des Quadrates Q_1 bezeichnen wir mit w_1, die auf der zweiten Randreihe S_0 mit w_0. Dann liefert die Greensche Formel

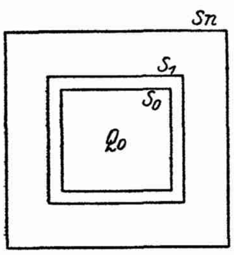

Fig. 1.

$$(8) \qquad h^2 \sum_{Q_1}\sum (w_x^2 + w_{\bar{x}}^2 + w_y^2 + w_{\bar{y}}^2) = \sum_S (w_1^2 - w_0^2) \leqq \sum_{S_1} w^2 - \sum_{S_0} w^2,$$

wobei die Summation rechts über die beiden äußeren Randreihen S_1 und S_0 zu erstrecken ist, und wo w_1 und w_0 sich auf benachbarte Punkte beziehen. Wir betrachten nun eine Reihe von konzentrischen Quadraten $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ mit den Rändern $S_0, S_1, \ldots, S_N$, von denen jedes aus dem vorangehenden dadurch entsteht, daß der Kranz der nächsten Nachbarpunkte hinzukommen wird (vgl. Fig. 1). Auf jedes dieser Quadrate wenden wir die Abschätzung (8) an und beachten, daß stets

$$2h^2 \sum_{Q_0}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq h^2 \sum_{Q_k}\sum (w_x^2 + w_{\bar{x}}^2 + w_y^2 + w_{\bar{y}}^2)$$

---

[17]) Ausdrücklich bemerken wir im Hinblick auf die Übertragung der Methode auf andere Differentialgleichungen, daß wir uns von dieser Eigenschaft unabhängig machen können. Dazu brauchen wir nur die Ungleichung (15) heranzuziehen oder die Schlußweise der Alternative anzuwenden (vgl. S. 55).

für $k \geqq 1$ ist. Addieren wir der Reihe nach die n Ungleichungen

$$2h^2 \sum_{Q_0}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq \sum_{S_{k+1}} w^2 - \sum_{S_k} w^2 \qquad (0 \leqq k < n),$$

so erhalten wir

$$2nh^2 \sum_{Q_0}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq \sum_{S_n} w^2 - \sum_{S_0} w^2 \leqq \sum_{S_n} w^2.$$

Diese Ungleichung summieren wir von $n = 1$ bis $n = N$. So ergibt sich

$$N^2 h^2 \sum_{Q_0}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq \sum\sum w^2,$$

wobei wir die Summe rechts nur vergrößern, wenn wir sie über das ganze Quadrat Q_N erstrecken.

Lassen wir nun bei Verkleinerung der Maschenweite die Quadrate Q_0 und Q_N gegen zwei feste im Innern von G liegende konzentrische Quadrate mit dem Abstande a streben, so konvergiert Nh gegen a, und wir finden, daß unabhängig von der Maschenweite

$$h^2 \sum_{Q_0}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq \frac{1}{a^2} h^2 \sum_{Q_N}\sum w^2 \tag{9}$$

bleibt.

Diese Ungleichung gilt — bei hinreichend kleiner Maschenweite — natürlich nicht nur für zwei Quadrate Q_0 und Q_N, sondern mit einer anderen Konstanten a für irgend zwei Teilgebiete von G, von denen das eine ganz im Innern des anderen liegt. Damit ist die Behauptung von 2. bewiesen[18]).

Um nun drittens nachzuweisen, daß in jedem inneren Teilgebiet die Funktion u_h und ihre sämtlichen Differenzenquotienten w_h die Verfeinerung der Maschenweite beschränkt und gleichartig stetig bleiben, betrachten wir ein Rechteck R mit den Eckpunkten P_0, Q_0, P, Q (vgl. Fig. 2), dessen Seiten $P_0 Q_0$ und PQ der x-Achse parallel sind und die Länge a haben.

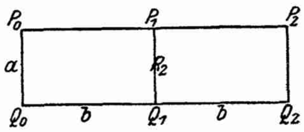

Fig. 2.

Wir gehen aus von der Darstellung

$$w(Q_0) - w(P_0) = h \sum_{PQ} w_x + h^2 \sum_{R}\sum w_{xy}$$

---

18) Wenn wir nicht annehmen, daß $\Delta w = 0$ ist, so erhalten wir an Stelle der Ungleichung (9)

$$h^2 \sum_{G^{**}}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq c_1 h^2 \sum_{G^*}\sum w^2 + c_2 h^2 \sum_{G^*}\sum (\Delta w)^2 \tag{10}$$

bei geeigneten von h unabhängigen Konstanten c_1, c_2, wobei G^{**} ganz im Innern des Gebietes G^* liegt, das seinerseits im Innern von G enthalten ist.

und der aus ihr folgenden Ungleichung

$$(11) \qquad |w(Q_0) - w(P_0)| \leqq h \sum_{PQ} |w_x| + h^2 \sum_R \sum |w_{xy}|.$$

Wir lassen nun die Rechtecksseite PQ zwischen einer Anfangslage $P_1 Q_1$ im Abstande b von $P_0 Q_0$ und einer Endlage $P_2 Q_2$ im Abstande $2b$ von $P_0 Q_0$ laufen und summieren die $\frac{b}{h} + 1$ zugehörigen Ungleichungen (11). Wir erhalten so die Abschätzung

$$|w(P_0) - w(Q_0)| \leqq \frac{1}{b+h} h^2 \sum_{R_2} \sum |w_x| + h^2 \sum_{R_2} \sum |w_{xy}|,$$

indem wir die Summationsgebiete auf das ganze Rechteck $R_2 = P_0 Q_0 P_2 Q_2$ ausdehnen. Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt daraus:

$$(12) \quad |w(P_0) - w(Q_0)| \leqq \frac{1}{b} \sqrt{2ab} \sqrt{h^2 \sum_{R_2} \sum w_x^2} + \sqrt{2ab} \sqrt{h^2 \sum_{R_2} \sum w_{xy}^2}.$$

Da die hier auftretenden mit h^2 multiplizierten Summen nach Annahme beschränkt bleiben, so folgt, daß die Differenz $|w(P_0) - w(Q_0)|$ zugleich mit ihrem Abstande a gegen Null strebt und zwar unabhängig von der Maschenweite, da wir für jedes Teilgebiet G^* von G die Größe b festhalten können. Damit ist die gleichartige Stetigkeit von $w = w_h$ in der x-Richtung bewiesen. Entsprechend ergibt sie sich für die y-Richtung und damit für jedes innere Teilgebiet G^* von G. Die Beschränktheit der Funktion w_h in G^* folgt schließlich aus ihrer gleichartigen Stetigkeit und der Beschränktheit von $h^2 \sum_{G^*} \sum w_h^2$.

Mit diesem Nachweis ist die Existenz einer Teilfolge von Funktionen u gesichert, welche gegen eine Grenzfunktion $u(x, y)$ konvergiert und zwar mit sämtlichen Differenzenquotienten in dem oben gekennzeichneten Sinne gleichmäßig für jedes innere Teilgebiet von G. Diese Grenzfunktion $u(x, y)$ besitzt also in G überall stetige partielle Differentialquotienten beliebiger Ordnung und genügt der partiellen Differentialgleichung des Potentials

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Die Randbedingung.

Um zu beweisen, daß die Lösung die oben formulierte Randbedingung erfüllt, zeigen wir zunächst, daß für jede Gitterfunktion v die Ungleichung

$$(13) \qquad h^2 \sum_{S_{r,h}} \sum v^2 \leqq A r^2 h^2 \sum_{S_{r,h}} \sum (v_x^2 + v_y^2) + B r h \sum_{\Gamma_h} v^2$$

besteht, wo $S_{r,h}$ derjenige Teil des Gittergebietes G ist, der innerhalb des Randstreifens S_r liegt. Dieser Randstreifen S_r war (vgl. S. 48) aus allen Punkten von G gebildet, deren Abstand vom Rande kleiner als r ist; er wird außer von Γ noch von einer Kurve Γ_r begrenzt. Ferner bedeuten A und B nur vom Gebiet und nicht von der Funktion v oder von der Maschenweite h abhängige Konstanten.

Um die obige Ungleichung nachzuweisen, zerlegen wir den Rand Γ von G in eine endliche Anzahl von Stücken, für welche der Winkel der Tangente entweder mit der x-Achse oder mit der y-Achse oberhalb einer positiven Schranke (etwa 30^0) bleibt. Es sei z. B. γ ein solches zur

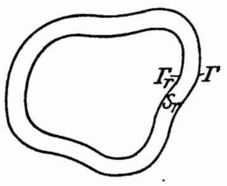

Fig. 3.

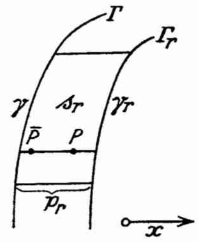

Fig. 4.

x-Achse hinreichend steil geneigtes Stück von Γ (vgl. Fig. 4). Die Parallelen zur x-Achse durch die Endpunkte des Stückes γ schneiden aus der Näherungskurve Γ_r ein Stück γ_r aus und begrenzen zusammen mit γ und γ_r ein Stück s_r des Randstreifens S_r. Der in dem Streifen s_r enthaltene Teil des Gittergebietes G_h heiße $s_{r,h}$ und der zugehörige Teil des Randes Γ_h heiße γ_h.

Wir denken uns durch einen Gitterpunkt P_h von $s_{r,h}$ die Parallele zur x-Achse gezogen. Sie trifft den Rand γ_h in einem Punkte $\bar{P}_h$. Dasjenige Stück dieser Parallelen, das in $s_{r,h}$ liegt, bezeichnen wir mit $p_{r,h}$. Seine Länge ist sicher kleiner als cr, da r der größte senkrechte Abstand eines Punktes aus S_r von Γ ist. Dabei hängt die Konstante c nur von dem kleinsten Neigungswinkel einer Tangente von γ mit der x-Achse ab.

Nun besteht zwischen dem Wert von v im Punkte P_h und ihrem Werte in $\bar{P}_h$ die Beziehung

$$v(P_h) = v(\bar{P}_h) \pm h \sum_{P_h \bar{P}_h} v_x,$$

woraus sich durch Quadrieren und Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$v(P_h)^2 \leqq 2\, v(\bar{P}_h)^2 + 2\, c r \cdot h \sum_{p_{r,h}} v_x^2$$

ergibt. Summieren wir hinsichtlich P_h in der x-Richtung, so erhalten wir

$$h \sum_{p_r} v^2 \leqq 2 c r\, v(\overline{P}_h)^2 + 2 c^2 r^2 h \sum_{p_r} v_x^2 .$$

Summieren wir noch einmal in der y-Richtung, so entsteht die Relation

$$(14) \qquad h \sum_{S_r}\sum v^2 \leqq 2 c r \sum_{\Gamma_h} v(\overline{P}_h) + 2 c^2 r^2 h \sum_{S_r}\sum v_x^2 ,$$

die wir nur noch für die anderen Stücke γ von Γ entsprechend aufzustellen und dann zu addieren haben, um leicht die gewünschte Ungleichung (13) zu erhalten [19]).

Wir setzen nun

$$v_h = u_h - f_h ,$$

sodaß v_h am Rande Γ_h verschwindet. Da dann $h^2 \sum_{G_h}\sum (v_x^2 + v_y^2)$ bei abnehmendem h beschränkt bleibt, so erhalten wir aus (13)

$$(16) \qquad \frac{h^2}{r} \sum_{S_{r,h}}\sum v^2 \leqq \varkappa r ,$$

wo $\varkappa$ eine nicht von der Funktion v oder der Maschenweite abhängige Konstante ist. Erstrecken wir die Summe links nicht über den ganzen Randstreifen $S_{r,h}$, sondern nur über die Differenz von zwei solchen; $S_{\nu,h} - S_{\varrho,h}$, so bleibt die Ungleichung (16) mit der selben Konstanten $\varkappa$ gültig, und wir können den Grenzübergang zu verschwindender Maschenweite vollziehen. Aus der Ungleichung (16) entsteht dann

$$\frac{1}{r} \iint_{S_r - S_\varrho} v^2\, dx\, dy \leqq \varkappa r , \qquad v = u - f .$$

Lassen wir nun den kleineren Randstreifen S_ϱ dem Rande zustreben, so erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{1}{r} \iint_{S_r} v^2\, dx\, dy = \frac{1}{r} \iint_{S_r} (u-f)^2\, dx\, dy \leqq \varkappa r ,$$

die gerade ausdrückt, daß die Grenzfunktion u die von uns geforderte Randbedingung erfüllt.

---

[19]) Durch dieselbe Betrachtungsweise, die zum Nachweis der Ungleichung (13) führt, läßt sich auch die Ungleichung

$$(15) \qquad h^2 \sum_{G_h}\sum v^2 \leqq c_1 h \sum_{\Gamma_h} v^2 + c_2 h^2 \sum_{G_h}\sum (v_x^2 + v_y^2)$$

ableiten, in der die Konstanten c_1, c_2 nur vom Gebiet G, aber nicht von der Mascheneinteilung abhängen.

4. Anwendbarkeit der Methode auf andere Probleme.

Unsere Methode stützt sich wesentlich auf die in dem obigen Hilfssatz ausgesprochene Ungleichheitsbeziehung (10) [20], weil aus ihr die beiden letzten auf S. 49 genannten Hauptpunkte des Beweises folgen; sie macht keinerlei Gebrauch von speziellen Grundlösungen oder sonstigen speziellen Eigenschaften unserer Differenzenausdrücke und läßt sich daher unmittelbar sowohl auf den Fall von beliebig vielen unabhängigen Variablen als auf das Eigenwertproblem der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0$ übertragen und liefert dabei hinsichtlich der Konvergenzverhältnisse genau dieselben Resultate wie oben [21]. Auch eine Übertragung auf lineare Differentialgleichungen anderer Art, insbesondere solche mit nicht konstanten Koeffizienten, erfordert nur einige naheliegende Modifikationen. Der wesentliche *Unterschied* besteht immer nur im Nachweis der Beschränktheit von $h^2 \sum\sum u_h^2$, die allerdings nicht bei einem beliebigen solchen linearen Probleme vorliegt. Aber im Falle der Unbeschränktheit dieser Summe läßt sich zeigen, daß das allgemeine Randwertproblem der betreffenden Differentialgleichung auch wirklich keine Lösung besitzt, daß aber dafür in diesem Falle nicht verschwindende Lösungen des zugehörigen *homogenen* Problems, d. h. Eigenfunktionen, existieren [22].

5. Das Randwertproblem von $\Delta\Delta u = 0$.

Um zu zeigen, daß sich die Methode auch auf den Fall von Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen läßt, behandeln wir im folgenden kurz das Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Wir suchen eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung in unserem Gebiete G, für welche die Funktionswerte und ihre ersten Ableitungen am Rande vorgegeben sind, und zwar durch diejenigen Werte, welche von einer vorgegebenen Funktion $f(x, y)$ am Rande definiert werden.

---

[20]) Hinsichtlich der Anwendung entsprechender Integralungleichungen vgl. K. Friedrichs, Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten, Math. Annalen **98**, S. 222.

[21]) Es ist dann zugleich bewiesen, daß jede Lösung eines solchen Differentialgleichungsproblems Ableitungen jeder Ordnung besitzt.

[22]) Vgl. Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, **1**, Kap. III, § 3, wo mit Hilfe einer entsprechenden Alternative die Theorie der Integralgleichungen behandelt wird. Vgl. auch die demnächst erscheinende Göttinger Dissertation von W. v. Koppenfels.

Dabei setzen wir wie oben (S. 47) voraus, daß $f(x, y)$ in einem das Gebiet G enthaltenden Gebiete der Ebene mit den ersten und zweiten Ableitungen stetig ist.

Wir ersetzen unser Differentialgleichungsproblem durch die Aufgabe, die Differenzengleichung $\Delta\Delta u = 0$ für das Gittergebiet G zu lösen, wobei in den Punkten des Randstreifens $\Gamma_h + \Gamma'_h$ die Funktion u dieselben Werte wie die vorgegebene Funktion $f(x, y)$ annehmen soll. Nach § 2 wissen wir, daß diese Randwertaufgabe für G_h auf eine und nur eine Weise lösbar ist. Wir werden zeigen, daß bei Verfeinerung der Maschenweite h diese Lösung in jedem inneren Teilgebiet von G mit allen Differenzenquotienten gegen die Lösung unserer Differentialgleichung bzw. gegen die entsprechenden Differentialquotienten konvergiert.

Zu diesem Zwecke bemerken wir erstens, daß für die Lösung $u = u_h$ unseres Differenzenproblems die Summe

$$h^2 \sum_{G'_h}\sum (u^2_{xx} + 2u^2_{xy} + u^2_{yy})$$

bei abnehmender Maschenweite beschränkt bleibt. Wegen der Minimumeigenschaft der Lösung unseres Differenzenproblems (vgl. S. 39) ist nämlich diese Summe nicht größer als die entsprechende Summe

$$h^2 \sum_{G'_h}\sum (f^2_{xx} + 2f^2_{xy} + f^2_{yy})$$

und diese konvergiert bei Verfeinerung der Maschenweite gegen das Integal

$$\iint_G \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\, dy,$$

welches nach unseren Voraussetzungen existiert.

Aus der Beschränktheit der Summe

$$h^2 \sum_{G'_h}\sum (u^2_{xx} + 2u^2_{xy} + u^2_{yy})$$

folgt unmittelbar die Beschränktheit von $h^2 \sum_{G'_h}\sum (\Delta u)^2$, weiterhin auch die von

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (u^2_x + u^2_y) \quad \text{und} \quad h^2 \sum_{G_h}\sum u^2.$$

Es besteht nämlich für beliebige w die Ungleichung

$$h^2 \sum_{G_h}\sum w^2 \leqq c h^2 \sum_{G_h}\sum (w^2_x + w^2_y) + c h \sum_{\Gamma_h} w^2 \tag{15}$$

(vgl. (15), S. 54). Indem man in dieser Ungleichung die Funktion w durch die ersten Differenzenquotienten von w ersetzt und auf diejenigen Teilgebiete von G_h anwendet, für welche diese Differenzenquotienten definiert sind, ergibt sich die weitere Ungleichung

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq c h^2 \sum_{G_h'}\sum (w_{xx}^2 + 2 w_{xy}^2 + w_{yy}^2) + c h \sum_{\Gamma_h + \Gamma_h'} (w_x^2 + w_y^2),$$

wo die Konstanten c wieder nicht von der Funktion und der Maschenweite abhängen. Wir wenden diese Ungleichungen auf $w = u_h$ an und beachten dabei die Beschränktheit der Summen über $\Gamma_h + \Gamma_h'$ auf der rechten Seite — diese Randsummen konvergieren ja definitionsgemäß gegen die entsprechenden mit $f(x, y)$ gebildeten Integrale —. Somit folgt aus der Beschränktheit von

$$h^2 \sum_{G_h'}\sum (u_{xx}^2 + 2 u_{xy}^2 + u_{yy}^2)$$

die Beschränktheit von

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2) \quad \text{und} \quad h^2 \sum_{G_h}\sum u^2.$$

Drittens setzen wir in der Ungleichung

$$(10) \qquad h^2 \sum_{G^{**}}\sum (w_x^2 + w_y^2) \leqq c h^2 \sum_{G^*}\sum w^2 + c h^2 \sum_{G^*}\sum (\Delta w)^2$$

(vgl. S. 51), wo G^* ein G^{**} im Innern enthaltendes Teilgebiet von G ist, für w nacheinander die Ausdrücke $\Delta u, \Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_{xx}, \ldots$ ein, die ja alle der Gleichung $\Delta w = 0$ genügen. Es folgt dann sukzessive, daß für alle inneren Teilgebiete G^* von G die Summen

$$h^2 \sum_{G^*}\sum (w_x^2 + w_y^2),$$

d. h.

$$h^2 \sum_{G^*}\sum (\Delta u_x^2 + \Delta u_y^2), \qquad h^2 \sum_{G^*}\sum (\Delta u_{xx}^2 + \Delta u_{xy}^2), \ldots$$

zugleich mit den schon als beschränkt bekannten Summen

$$h^2 \sum_{G_h}\sum u^2, \qquad h^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2)$$

und

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (\Delta u)^2$$

beschränkt bleiben.

Schließlich setzen wir für w in die Ungleichung (10) der Reihe nach die Funktionen $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{xxx}, \ldots$ ein, für die nach dem eben Bewiesenen

$$h^2 \sum_{G_h^*}\sum (\Delta w)^2, \quad \text{d. h.} \quad h^2 \sum_{G_h^*}\sum (\Delta u_{xx})^2, \ldots$$

beschränkt bleibt. Wir erkennen dann, daß für alle Teilgebiete auch die Summen

$$h^2 \sum_{G_h^*}\sum (u_{xxx}^2 + u_{xxy}^2), \qquad h^2 \sum_{G_h^*}\sum (u_{xyx}^2 + u_{xyy}^2), \ldots$$

beschränkt bleiben.

Aus dieser Tatsache können wir nunmehr wie auf S. 51 ff. schließen, daß sich aus unserer Folge von Gitterfunktionen eine Teilfolge auswählen läßt, die in jedem inneren Teilgebiet von G mit sämtlichen Differenzenquotienten gleichmäßig gegen eine im Innern von G stetige Grenzfunktion bzw. gegen deren Differentialquotienten konvergiert.

Wir haben noch zu zeigen, daß diese Grenzfunktion, die offenbar der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, auch noch die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt. Dabei begnügen wir uns analog wie oben damit, diese Randbedingungen in der Form

$$\iint_{S_r} (u-f)^2\,dx\,dy \leqq c r^2, \qquad \iint_{S_r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \leqq c r^2$$

auszusprechen [23]). Daß die Grenzfunktion diese Bedingungen erfüllt, ergibt sich aber, indem wir das Schlußverfahren von S. 53 wörtlich auf die Funktion u und ihre ersten Differenzenquotienten anwenden.

Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung unserer Randwertaufgabe erkennt man jetzt nachträglich, daß nicht nur eine ausgewählte Teilfolge, sondern die Funktionenfolge u selbst die angegebenen Konvergenzeigenschaften besitzt.

II. Der hyperbolische Fall.

§ 1.

Die Gleichung der schwingenden Saite.

Im zweiten Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Anfangswertproblemen von hyperbolischen linearen Differentialgleichungen und werden beweisen, daß unter gewissen Voraussetzungen die Lösungen entsprechender Differenzengleichungen bei Verfeinerung der Maschenweite des zugrunde gelegten Gitters gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren.

Wir können die hier auftretenden Verhältnisse am einfachsten an dem naheliegenden Beispiel der Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

darlegen. Dabei beschränken wir uns auf dasjenige Anfangswertproblem, in dem auf der Geraden $t = 0$ die Werte der Lösung u und ihrer Ableitungen gegeben sind.

[23]) Daß die Randwerte für Funktion und Ableitungen tatsächlich angenommen werden, läßt sich unschwer zeigen. Vgl. die entsprechenden Betrachtungen bei K. Friedrichs loc. cit.

Um die entsprechende Differenzengleichung anzugeben, legen wir in der x, t-Ebene ein quadratisches achsenparalleles Gitter der Maschenweite h. Wir ersetzen die Differentialgleichung (1) durch die Differenzengleichung

$$u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} = 0$$

in den Bezeichnungen von S. 34. Greifen wir einen Gitterpunkt P_0 heraus, so verbindet die zugehörige Differenzengleichung den Wert der Funktion u in diesem Punkte mit den Werten in den vier Nachbarpunkten. Kennzeichnen wir wieder die vier Nachbarwerte durch die vier Indizes 1, 2, 3, 4 (s. Fig. 5), so nimmt die Differenzengleichung die einfache Gestalt

$$u_1 + u_3 - u_2 - u_4 = 0 \tag{2}$$

an. Hierbei geht der Wert der Funktion u im Punkte P selbst nicht in die Gleichung ein.

Wir denken uns das Gitter in zwei verschiedene Teilgitter zerlegt, wie in der Fig. 5 durch Kreise und Kreuze angedeutet ist. Die Differenzen-

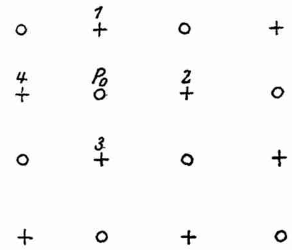

Fig. 5.

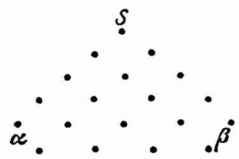

Fig. 6.

gleichung verbindet dann nur die Werte der Funktion in jedem der Teilgitter untereinander. Wir wollen uns daher auf eines der beiden Teilgitter beschränken. Als Anfangsbedingungen haben wir hier die Werte der Funktion u auf den beiden Gitterreihen $t = 0$ und $t = h$ vorzugeben. Wir geben zunächst die Lösung dieses Anfangswertproblems explizite an; d. h. wir drücken den Wert der Lösung in irgendeinem Punkte S durch die vorgegebenen Werte auf den beiden Anfangsreihen aus. Man erkennt sofort, daß der Wert in einem Punkte der Reihe $t = 2h$ eindeutig bestimmt ist lediglich durch die mit ihm verknüpften drei Werte auf den beiden ersten Reihen. Der Wert in einem Punkte auf der vierten Reihe ist eindeutig bestimmt durch die Werte der Lösung in gewissen drei Punkten der zweiten und dritten Reihe, also auch durch gewisse Werte auf den beiden ersten Reihen. Allgemein wird zu einem Punkte S ein gewisser Abhängigkeitsbereich auf den beiden ersten Reihen gehören; man erhält ihn, wenn man durch den Punkt S die Linien $x + t =$ konst. und $x - t =$ konst. zieht, bis sie die zweite Reihe in den Punkten α und β treffen (vgl. Fig. 6).

Das Dreieck $S\alpha\beta$ nennen wir dann das Bestimmtheitsdreieck, weil in ihm sämtliche u-Werte sich nicht ändern, sobald sie auf den ersten beiden Reihen festgehalten werden. Die Seitenlinien des Dreiecks nennen wir Bestimmtheitslinien.

Bezeichnet man nun die Differenzen von u in Richtung der Bestimmtheitslinien durch u' und $u^{\backprime}$ oder genauer

$$u_1' = u_1 - u_4, \qquad u_1^{\backprime} = u_1 - u_2,$$
$$u_2' = u_2 - u_3, \qquad u_4^{\backprime} = u_4 - u_3,$$

so nimmt die Differenzengleichung etwa die Form

$$u_1' = u_2'$$

an. D. h. auf einer Bestimmtheitslinie sind die Differenzen nach der anderen Bestimmtheitsrichtung konstant, also gleich einer der *vorgegebenen* Differenzen zwischen zwei Punkten der ersten beiden Reihen. Andererseits ist die Differenz $u_S - u_\alpha$ eine Summe über die Differenzen u' längs der Bestimmtheitslinie $S\alpha$, so daß wir unter Benutzung der eben gemachten Bemerkung als Schlußformel (in leicht verständlicher Bezeichnung)

$$u_S = u_\alpha + \sum_{\alpha_1}^{\beta_1} u' \tag{3}$$

erhalten.

Wir lassen nun die Maschenweite h gegen Null streben, wobei die vorgegebenen Werte auf der zweiten oder ersten Reihe gegen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ und die Differenzenquotienten $\frac{u'}{h\sqrt{2}}$ gegen eine stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ gleichmäßig konvergieren mögen. Offenbar geht dabei die rechte Seite von (3) gleichmäßig in den Ausdruck

$$f(x-t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

über, wenn S gegen den Punkt (t, x) konvergiert. Dies ist der bekannte Ausdruck der Lösung der Schwingungsgleichung (1) mit den Anfangswerten $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f'(x) + \sqrt{2}\, g(x)$. Damit ist gezeigt, daß die Lösungen unseres Differenzengleichungsproblems bei abnehmender Maschenweite gegen die Lösung des Differentialgleichungsproblems konvergieren, wenn wir die Anfangswerte (in der oben angegebenen Weise) konvergieren lassen.

§ 2.

Über den Einfluß der Wahl des Gitters. Die Abhängigkeitsgebiete bei Differenzen- und Differentialgleichung.

Die im § 1 betrachteten Verhältnisse legen folgende Überlegungen nahe.

Ebenso wie für die Lösung einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung im Punkte S nur ein gewisser Teil der Anfangswerte maßgebend ist, nämlich das von den Charakteristiken durch S ausgeschnittene „Abhängigkeitsgebiet“, besitzt auch die Lösung einer Differenzengleichung im Punkte S ein gewisses Abhängigkeitsgebiet, das man erhält, indem man die Bestimmtheitslinien vom Punkte S aus zieht. In § 1 fielen nun die Richtungen der Bestimmtheitslinien der Differenzengleichung mit den charakteristischen Richtungen der Differentialgleichung zusammen, wodurch auch die Abhängigkeitsgebiete in der Grenze übereinstimmten. Diese Tatsache hing aber wesentlich von der Orientierung des Gitters in der (x, t)-Ebene ab und beruhte ferner darauf, daß wir das Gitter quadratisch gewählt hatten. Wir legen jetzt allgemeiner ein rechteckiges achsenparalleles Gitter zugrunde, dessen Maschenweite in der t-Richtung (Zeitmasche) gleich h und diejenige der x-Richtung (Raummasche) gleich $\varkappa h$ mit konstantem $\varkappa$ ist. Das Abhängigkeitsgebiet der Differenzengleichung $u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} = 0$ für dieses Gitter wird ganz im Innern des Abhängigkeitsgebietes der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ liegen oder wird es selbst in seinem Innern enthalten, je nachdem ob $\varkappa < 1$ oder $\varkappa > 1$ ist.

Hieraus ergibt sich eine merkwürdige Tatsache: Läßt man im Falle $\varkappa < 1$ die Maschenweite h gegen Null abnehmen, so kann die Lösung der Differenzengleichung im allgemeinen *nicht* gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren. Ändert man nämlich etwa bei der Schwingungsgleichung (1) die Anfangswerte der Lösung der Differentialgleichung in der Umgebung der Endpunkte α und β des Abhängigkeitsgebietes (vgl. Fig. 7), so zeigt die Formel (4), daß sich auch die Lösung selbst im Punkte (x, t) ändert. Für die Lösungen der Differenzengleichungen im Punkte S sind aber die Vorgaben in den Punkten α und β irrelevant, da diese außerhalb des Abhängigkeitsgebietes der Differenzengleichungen liegen. — Daß im Falle $\varkappa > 1$ Konvergenz statthat, werden wir im § 3 beweisen. Vgl. hierzu Fig. 9, S. 62.

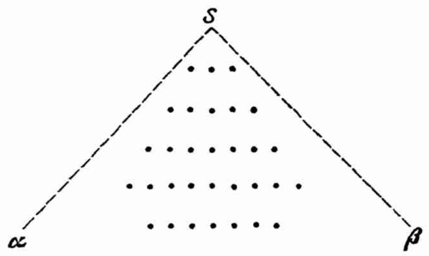

Fig. 7.

Betrachtet man dagegen z. B. die Differentialgleichung

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

in den beiden räumlichen Variablen x, y und der zeitlichen t, und ersetzt sie durch entsprechende Differenzengleichungen in geradlinigen Gittern, so ist es im Gegensatz zum Falle von nur zwei unabhängigen Variablen unmöglich, die Mascheneinteilung so zu wählen, daß die Abhängigkeitsgebiete der Differenzen- und Differentialgleichung zusammenfallen; denn das Abhängigkeitsgebiet der Differenzengleichungen wird ein Viereck, während das der Differentialgleichung ein Kreis ist. Wir werden später (vgl. § 4) die Mascheneinteilung so wählen, daß das Bestimmtheitsgebiet der Differenzengleichung das Bestimmtheitsgebiet der Differentialgleichung im Innern enthält, und zeigen, daß wieder Konvergenz stattfindet.

Überhaupt wird ein wesentliches Ergebnis dieses Teils sein, daß man bei jeder linearen hyperbolischen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung das Gitter so wählen kann, daß die Lösung der Differenzengleichung gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergiert, wenn man die Maschenweiten gegen Null streben läßt (vgl. hierzu §§ 3, 4, 7, 8).

§ 3.

Grenzübergang bei beliebigen rechteckigen Gittern.

Wir betrachten zunächst wieder die Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

legen aber nunmehr ein rechteckiges achsenparalleles Gitter zugrunde, dessen zeitliche Maschenweite h, dessen Raummasche $\varkappa h$ ist. Die zugehörige Differenzengleichung lautet:

$$L(u) = \frac{1}{h^2}(u_1 - 2u_0 + u_3) - \frac{1}{\varkappa^2 h^2}(u_2 - 2u_0 + u_4) = 0, \tag{6}$$

wobei sich die Indizes auf den Mittelpunkt P_0 und die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines „Elementarrhombus“ (vgl. Fig. 8) beziehen. Vermöge der Gleichung

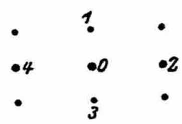

Fig. 8.

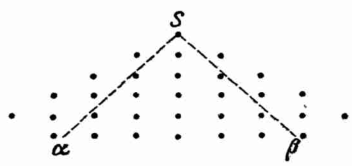

Fig. 9.

$L(u) = 0$ können wir den Wert der Funktion u in einem Punkte S durch ihre Werte auf demjenigen Stück der beiden Anfangsreihen $t = 0$ und $t = h$ darstellen, das man erhält, wenn man vom Punkte S aus (vgl. Fig. 6, S. 59) die zu den Seiten eines Elementarrhombus parallelen „Bestimmtheitslinien" zieht. Wir denken uns die Anfangswerte so vorgegeben, daß sie und die zwischen ihnen gebildeten ersten Differenzenquotienten bei abnehmender Maschenweite und bei festem $\varkappa$ gleichmäßig gegen stetige vorgegebene Funktionen auf der Geraden $t = 0$ konvergieren. Für die Lösungen der Differenzengleichungen läßt sich wohl eine explizite Darstellung durch ihre Anfangswerte aufstellen (entsprechend (3) in § 1); sie ist aber nicht so einfach, daß man unmittelbar den Grenzübergang zu verschwindender Maschenweite ausführen kann. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein, der uns die Behandlung auch des allgemeinen Problem ermöglichen wird [24]).

Wir multiplizieren den Differenzenausdruck $L(u)$ mit $(u_1 - u_3)$ und formen das Produkt unter Beachtung der folgenden Indentitäten um:

$$(7) \qquad (u_1 - u_3)(u_1 - 2u_0 + u_3) = (u_1 - u_0)^2 - (u_0 - u_3)^2,$$

$$(8) \qquad (u_1 - u_3)(u_2 - 2u_0 + u_4) = (u_1 - u_0)^2 - (u_0 - u_3)^2 - \frac{1}{2}[(u_1 - u_2)^2 + (u_1 - u_4)^2 - (u_2 - u_3)^2 - (u_4 - u_3)^2].$$

Wir erhalten so

$$(9) \qquad 2(u_1 - u_3)L(u) = \frac{2}{h^2}\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)[(u_1 - u_0)^2 - (u_0 - u_3)^2] + \frac{1}{h^2\varkappa^2}[(u_1 - u_2)^2 + (u_1 - u_4)^2 - (u_2 - u_3)^2 - (u_4 - u_3)^2].$$

Wir summieren nun das Produkt (9) über alle Elementarrhomben eines Bestimmtheitsdreiecks $S\alpha\beta$. Die auf der rechten Seite von (9) auftretenden Differenzenquadrate kommen stets in zwei benachbarten Elementarrhomben vor, mit verschiedenen Vorzeichen versehen. Sie heben sich bei der Summation fort, sobald beide Elementarrhomben zum Dreieck $S\alpha\beta$ gehören; es bleibt also nur eine vom Rande des Dreiecks berührende Summe von Differenzenquadraten übrig. Wir erhalten so die Relation:

$$(10) \qquad h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum 2\frac{u_1 - u_3}{h} L(u)$$
$$= h\sum_{S\alpha}\left[2\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{u'}{h}\right)^2\right]$$
$$+ h\sum_{S\beta}\left[2\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{u^{`}}{h}\right)^2\right]$$
$$- h\sum_{\mathrm{I\,II}}\left[2\left(1 - \frac{1}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{u^{`}}{h}\right)^2\right].$$

---

[24]) Zum folgenden vgl. K. Friedrichs und H. Lewy, Über die Eindeutigkeit usw., Math. Annalen (98 1928), S. 192 ff., wo analoge Umformungen für Integrale benutzt werden.

Hier bedeuten u' und $u^{\backprime}$ Differenzen in Bestimmtheitsrichtungen wie in § 1, während $\dot{u}$ die Differenz der Funktionswerte in zwei Nachbarpunkten bezeichnet, deren Verbindungslinie zur t-Achse parallel ist. Die Summen sind über alle aus zwei Parallelreihen bestehenden Randstreifen zu erstrecken, so daß sämtliche vorkommenden Differenzen u', $u^{\backprime}$, $\dot{u}$ einmal und nur einmal auftreten.

Für eine Lösung von $L(u) = 0$ verschwindet also die rechte Seite von (10). Die dort auftretende Summe über die Anfangsreihen I und II bleibt beschränkt, wenn wir die Maschenweite h (bei festgehaltenem $\varkappa$) zu Null abnehmen lassen; sie geht nämlich in ein Integral über vorgegebene Funktionen auf der Anfangslinie über. Infolgedessen bleiben auch die in (10) über $S\alpha$ und $S\beta$ erstreckten Summen beschränkt. Ist nun, wie wir fordern müssen (vgl. S. 61), $\varkappa \geqq 1$, also $1 - \frac{1}{\varkappa^2}$ nicht negativ, so folgt weiter die Beschränktheit der einzelnen Summen

$$h \sum_{S\alpha} \left(\frac{u'}{h}\right)^2, \qquad h \sum_{S\beta} \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2,$$

die wir über irgendwelche Bestimmtheitslinien erstreckt denken können.

Hieraus können wir die „gleichartige Stetigkeit" (vgl. 1. Teil § 4) der Folge der Gitterfunktionen in allen Richtungen der Ebene ableiten[25]); da die Werte von u auf der Anfangslinie beschränkt sind, folgt die Existenz einer gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $u(x, t)$ konvergierenden Teilfolge.

Zugleich mit der Funktion u genügen auch ihre ersten und zweiten Differenzenquotienten der Differenzengleichung $L(u) = 0$. Die Anfangswerte dieser Differenzenquotienten lassen sich vermittelst der Gleichung $L(u) = 0$ durch solche erste, zweite und dritte Differenzenquotienten von u ausdrücken, in denen nur Punkte der beiden Anfangsreihen I und II auftreten. Wir verlangen von ihnen, daß sie gegen stetige Grenzfunktionen streben, d. h. daß etwa die vorgegebenen Anfangswerte $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ drei- bzw. zweimal stetig nach x differenzierbar sind.

Danach können wir unsere oben angestellte Konvergenzbetrachtung anstatt auf u auch auf seine ersten und zweiten Differenzenquotienten anwenden, also eine Teilfolge auswählen, so daß diese Differenzenquotienten gleichmäßig gegen Funktionen streben, die dann die ersten bzw. zweiten Ableitungen der Grenzfunktion $u(x, t)$ sein müssen. Die Grenzfunktion u

---

[25]) Sind S_1 und S_2 zwei Punkte im Abstand δ, so verbinde man sie durch einen Streckenzug aus zwei Strecken $S_1 S$ und $S S_2$, von denen die erste der einen, die zweite der anderen Bestimmtheitsrichtung parallel ist. Es gilt dann die Abschätzung

$$|u_{S_1} - u_{S_2}| \leqq |u_{S_1} - u_S| + |u_S - u_{S_2}| \leqq \sqrt{\delta} \sqrt{h \sum_{S_1 S} \left(\frac{u'}{h}\right)^2} + \sqrt{\delta} \sqrt{h \sum_{S S_2} \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2}.$$

genügt infolgedessen der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, die in der Grenze aus der Differenzengleichung $L(u) = 0$ entsteht; sie stellt also die Lösung des Anfangswertproblems dar. Da diese Lösung eindeutig bestimmt ist, konvergiert jede Teilfolge der Gitterfunktionen und damit die Folge selbst gegen die Grenzfunktion.

§ 4.

Die Schwingungsgleichung in drei Variablen.

Wir behandeln nun die Schwingungsgleichung

$$(11) \qquad 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und knüpfen an die im § 2 gemachten Bemerkungen über die Beziehung der Abhängigkeitsbereiche an. Das Abhängigkeitsgebiet der Differentialgleichung (11) ist der Kreiskegel mit einer zur t-Richtung parallelen Achse und dem Öffnungswinkel α, mit $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. In irgendeinem rechtwinkligen achsenparallelen Gitter setzen wir entsprechend die Differenzengleichung

$$(12) \qquad 2u_{t\bar{t}} - u_{x\bar{x}} - u_{y\bar{y}} = 0$$

an. Durch sie werden die Funktionswerte u in den Punkten eines „Elementaroktaeders" miteinander verknüpft. Sie gestattet, den Funktionswert in einem Punkte S eindeutig durch die Funktionswerte in gewissen Punkten der beiden Anfangsebenen $t = 0$ und $t = h$ auszudrücken. Wir erhalten zu jedem Punkte S eine Pyramide der Bestimmtheit, die aus den beiden Grundlinien als Abhängigkeitsgebiet zwei Rhomben ausschneidet.

Lassen wir die Maschenweiten etwa unter Festhaltung ihrer Verhältnisse gegen Null streben, so können wir eine Konvergenz der Folge der Gitterfunktionen gegen die Lösung der Differentialgleichung höchstens dann erwarten, wenn die Bestimmtheitspyramide den Bestimmtheitskegel der Differentialgleichung im Inneren enthält. Das einfachste Gitter dieser Eigenschaft wird dasjenige sein, das so liegt, daß die Bestimmungspyramide den Bestimmungskegel von außen berührt. Unsere Differentialgleichung ist gerade so gewählt, daß dies für ein *kubisches* achsenparalleles Gitter eintritt.

Die Differenzengleichung (12) nimmt in diesem Gitter in den Bezeichnungen der Figur 10 die Gestalt an:

$$(13) \quad L(u) = \frac{2}{h^2}(u_{a'} - 2u_0 + u_a) - \frac{1}{h^2}(u_1 - 2u_0 - u_3) - \frac{1}{h^2}(u_2 - 2u_0 - u_4),$$

in die der Funktionswert u_0 im Mittelpunkt P übrigens nicht mehr eingeht. Die Werte der Lösung auf den beiden Anfangsebenen seien die Werte einer viermal stetig nach x_1, y_2, t differenzierbaren Funktion.

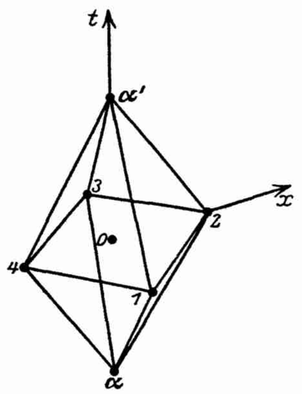

Fig. 10.

Wir benutzen zum Konvergenzbeweise wieder die im § 3 entwickelte Methode, indem wir für die Lösung unserer Differenzengleichung die dreifache Summe

$$h^3 \sum \sum \sum 2 \frac{u_{\alpha'} - u_\alpha}{h} L(u) = 0$$

bilden, die über alle Elementaroktaeder der vom Punkte S ausstrahlenden Bestimmtheitspyramide zu erstrecken ist. Auf Grund der fast wörtlich zu übernehmenden Schlußweise erkennen wir, daß die Werte der Funktion u in inneren Punkten der Bestimmtheitspyramide herausfallen und daß nur noch Flächensummen über die vier Seitendoppelflächen F und die beiden Grundflächen I II der Pyramide übrigbleiben.

Bezeichnen wir mit u' die Differenz der Funktionswerte in zwei Punkten, die durch eine Seitenlinie eines Elementaroktaeders verbunden wird, so lautet die entstehende Formel

$$(14) \qquad \sum_F \sum (u')^2 - \sum_{\mathrm{I}} \sum_{\mathrm{II}} (u')^2 = 0,$$

in der über sämtliche auf diesen Flächen enthaltenen Differenzen u' zu summieren ist, so daß jede solche Differenz nur einmal auftritt[26]). Da die Doppelsumme über die beiden Anfangsflächen beschränkt bleibt, weil sie ja in ein Integral über Anfangswerte übergeht, so bleibt auch die Summe über die „Bestimmtheitsflächen“ F beschränkt.

Wir wenden unsere Betrachtung anstatt auf u selbst wieder auf ihre ersten, zweiten und dritten Differenzenquotienten, die ja selbst der Differenzengleichung (13) genügen und deren Anfangswerte vermittels (13) sich durch erste bis vierte Differenzenquotienten allein aus Werten auf den ersten beiden Anfangsebenen ausdrücken lassen. Ist $w = w_h$ einer der Differenzenquotienten bis zur dritten Ordnung, so wissen wir, daß die über eine Bestimmtheitsfläche F erstreckte Summe $h^2 \sum \sum \left(\frac{w'}{h}\right)^2$ beschränkt bleibt. Hieraus ergibt sich aber durch genau denselben Schluß, den wir im ersten Teil, § 4 angewandt haben, daß die Funktion u mit ihren ersten und

[26]) Es ist das Gitter gerade so gewählt, daß die Differenzen von u zwischen den beiden Flächen F nicht mehr auftreten.

zweiten Differenzenquotienten gleichartig stetig ist. Es gibt also eine gegen Null abnehmende Folge von Maschenweiten, so daß diese Größen, die ja am Anfang beschränkt sind, gegen stetige Grenzfunktionen konvergieren, und zwar offenbar gegen die Lösung der Differentialgleichung einschließlich ihrer ersten und zweiten Ableitungen, was genau wie früher (§ 3) folgt.

Anhang.

Ergänzungen und Verallgemeinerungen.

§ 5.

Beispiel einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir haben im § 2 gesehen, daß unter Umständen das Abhängigkeitsgebiet der Differentialgleichung nur einen Teil des Abhängigkeitsgebietes der Differenzengleichung ausmacht, und daß also der Einfluß des Restgebietes in der Grenze herausfällt. Dies Phänomen können wir an dem Beispiel der Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ explizite verfolgen, wenn wir sie durch die Differenzengleichung

$$2\,u_t - u_x + u_{\bar{x}} = 0 \tag{15}$$

ersetzen. Sie lautet ausgeschrieben in den Bezeichnungen der Fig. 5 (S. 59)

$$u_1 = \frac{u_2 + u_4}{2}. \tag{16}$$

Die Differenzengleichung verbindet wieder nur Punkte eines Teilgitters untereinander. Das Anfangswertproblem besteht darin, daß man auf der Reihe $t = 0$ der Funktion u in den Punkten $x = 2\,i\,h$ diejenigen Werte f_{2i} vorschreibt, die dort eine stetige Funktion $f(x)$ annimmt.

Wir betrachten etwa den Punkt S auf der t-Achse im Abstande $2\,n\,h$. Man verifiziert leicht die Darstellung der Lösung u in S:

$$u_S = \sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n+i} f_{2i}. \tag{17}$$

Die Summe auf der rechten Seite strebt bei Verfeinerung der Maschenweite, d. h. bei $n \to \infty$ einfach gegen den Wert f_0. Man entnimmt das aus der Stetigkeit von $f(x)$ und dem Verhalten der Binomialkoeffizienten bei wachsendem n. (Vgl. den nächsten Paragraphen.)

§ 6.

Die Wärmeleitungsgleichung.

Die Differenzengleichung (16) des § 5 läßt sich auch als Analogon einer ganz anderen Differentialgleichung auffassen, nämlich der Wärmeleitungsgleichung

$$2\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{18}$$

In irgendeinem rechteckigen achsenparallelen Gitter lautet die entsprechende Differenzengleichung

$$2\left(\frac{u_1 - u_0}{l}\right) = \left(\frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{h^2}\right). \tag{19}$$

wo l die Zeit, h die Raummasche ist. Beim Grenzübergang zu verschwindender Maschenweite behält die Differenzengleichung nur dann ihre Form, wenn l proportional mit h^2 abnimmt. Setzen wir insbesondere $l = h^2$, so fällt der Wert u_0 aus der Gleichung heraus und es entsteht die Differenzengleichung

$$u_1 = \frac{u_2 + u_4}{2}, \tag{16}$$

deren Auflösung durch die Formel (17) gegeben wird:

$$u(0, t) = \sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n+i} f_{2i}. \tag{17}$$

Ein Punkt ξ der x-Achse ist bei abnehmender Maschenweite immer durch den Index

$$2i = \frac{\xi}{h} \tag{20}$$

gekennzeichnet. Die Maschenweite h ist mit der Ordinate t des Aufpunktes S durch die Gleichung

$$2nh^2 = t \tag{21}$$

festgelegt.

Wir wollen untersuchen, was aus der Formel (17) entsteht, wenn h gegen Null, d. h. n gegen unendlich strebt. Unter Benutzung der Formel (21) schreiben wir die Gleichung (17) in die Gestalt

$$u(0, t) = \sum_{i=-n}^{n} \frac{\sqrt{2n}}{2 \cdot 2^{2n} \sqrt{t}} \binom{2n}{n+i} f_{2i} \cdot 2h. \tag{22}$$

Für den Koeffizienten von $2hf_{2i} = 2hf(\xi)$ verwenden wir die Abkürzung

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} g_{2n}(\xi) = \frac{\sqrt{2n}}{2 \cdot 2^{2n} \sqrt{t}} \binom{2n}{n + \frac{\xi}{\sqrt{2t}}\sqrt{n}}.$$

Den Grenzwert dieses Koeffizienten, den man gewöhnlich mit Hilfe der Stirlingschen Formel bestimmt, wollen wir hier berechnen, indem wir die

Funktion $g_{2n}(\xi)$ als Lösung einer gewöhnlichen Differenzengleichung auffassen und den Grenzübergang zu verschwindender Maschenweite h und damit zur Differentialgleichung ausführen. Als diese Differenzengleichung findet man

$$\frac{1}{2h}(g_h(\xi+2h)-g_h(\xi)) = -\frac{1}{2h}g_h(\xi)\frac{2i+1}{n+i+1}$$

(indem wir $g_h(\xi)$ anstatt $g_{2n}(\xi)$ schreiben). Oder

$$\frac{1}{2h}(g_h(\xi+2h)-g_h(\xi)) = -g_h(\xi)\frac{\xi+h}{t+h\xi+2h^2}.$$

$g_h(\xi)$ genügt außerdem der Normierungsbedingung

$$\sum_{i=-n}^{n} g_h(\xi)\cdot 2h = 2\sqrt{t}.$$

Diese Summe ist über das Abhängigkeitsgebiet der Differenzengleichung zu erstrecken, das, wenn $h \to 0$ strebt, in der Grenze die ganze x-Achse erfüllt.

Durch einfache Überlegungen erkennt man, daß $g_h(\xi)$ gleichmäßig gegen die Lösung $g(x)$ der Differentialgleichung

$$g'(x) = -g(x)\frac{x}{t}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 2\sqrt{t}$$

konvergiert. Aus der Formel (22) entsteht dann durch Grenzübergang

$$u(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\xi^2}{2t}}f(\xi)\,d\xi,$$

die bekannte Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Die Betrachtungen dieses Paragraphen übertragen sich ohne weiteres auf den Fall von Differentialgleichungen

$$4\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

usw. bei mehr unabhängigen Veränderlichen.

§ 7.

Die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Ebene.

Wir behandeln die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = 0. \tag{23}$$

Die Koeffizienten sind zweimal stetig nach x, t differenzierbar, während die Anfangswerte auf der Geraden $t = 0$ dreimalig stetig nach x differenzierbar sind. Wir ersetzen die Differentialgleichung in einem Gitter mit der Zeitmaschenweite h und der Raummaschenweite $\varkappa h$, so daß in einer Umgebung des zu betrachtenden Stückes der Anfangsgeraden $1 - \frac{k^2}{\varkappa^2} > \varepsilon > 0$ für unser konstantes $\varkappa$ gilt, durch die Differenzengleichung

$$(24) \qquad L(u) = u_{t\bar{t}}(x, t) - k^2 u_{x\bar{x}}(x, t) + \alpha u_t + \beta u_x + \gamma u = 0$$

und wählen die Anfangswerte wie in § 3 (vgl. S. 63).

Zum Konvergenzbeweis formen wir wieder die Summe

$$h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum 2 \frac{u_1 - u_3}{h} L(u)$$

unter Verwendung der Identitäten (7), (8) um. Außer einer Summe (vgl. (10)) über den Rand des Dreiecks $S\alpha\beta$ (vgl. Fig. 6) tritt dann noch eine über das ganze Dreieck $S\alpha\beta$ erstreckte Summe auf, deren absoluter Betrag sich nach oben mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung durch

$$C h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left[\left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}}{h}\right)^2 + u^2\right]$$

abschätzen läßt, wo die Konstante C nicht von der Funktion u, der Maschenweite h und in einer gewissen Umgebung der Anfangslinie auch nicht vom Punkte S abhängt.

Hier können wir weiter $h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum u^2$ nach oben durch

$$C_1 h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left(\frac{\dot{u}}{h}\right)^2 + C_2 h \sum_{\mathrm{I\,II}} u^2$$

abschätzen[27]), wo für die Konstanten C_1, C_2 dasselbe gilt, was für C gesagt wurde.

Wir erhalten so eine Ungleichung von der Form

$$(25) \qquad \begin{aligned} & h \sum_{S\alpha} \left[2\left(1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot{u}}{h}\right)^2 + \frac{k^2}{\varkappa^2}\left(\frac{u'}{h}\right)^2\right] \\ & + h \sum_{S\beta} \left[2\left(1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot{u}}{h}\right)^2 + \frac{k^2}{\varkappa^2}\left(\frac{u'}{h}\right)^2\right] \\ & \leqq C_3 h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left[\left(\frac{\dot{u}}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2\right] + D, \end{aligned}$$

wo D eine für alle Punkte S und Maschenweiten h feste Schranke für die auftretenden Summen über die Anfangsgerade ist.

---

[27]) Vgl. zum Beweise die verwandte Ungleichung S. 64 unten.

Als Spitzen S unserer Dreiecke wählen wir nun von der Anfangsgeraden ausgehend der Reihe nach die Punkte $S_0, S_1, \ldots, S_n = S$ auf einer Parallelen zur t-Achse. Durch Summation der zugehörigen Ungleichungen (25) können wir die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
(26)\qquad & h^2 \sum_{S S_0 \alpha}\sum \left[2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \frac{k^2}{\varkappa^2}\left(\frac{u'}{h}\right)^2\right] \\
& + h^2 \sum_{S S_0 \beta}\sum \left[2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa^2}\right)\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \frac{k^2}{\varkappa^2}\left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2\right] \\
& \leqq n h C_3 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left[\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2\right] + n h D
\end{aligned}
$$

erhalten. Beachten wir nun, daß man eine Differenz u' bzw. $u^{\backprime}$ durch zwei Differenzen $\dot u$ und eine Differenz $u^{\backprime}$ bzw. u' ausdrücken kann, so ergibt sich, daß wir die linke Seite von (26) höchstens verkleinern, wenn wir sie durch

$$
C_4 h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left[\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2\right]
$$

ersetzen. Beschränken wir uns nun auf eine solche Umgebung $t \leqq n h$ der Anfangsgeraden, in der

$$
C_4 - n h C_3 = C_5 > 0
$$

ist, so erhalten wir aus (26)

$$
(27)\qquad C_5 h^2 \sum_{S\alpha\beta}\sum \left[\left(\frac{\dot u}{h}\right)^2 + \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2\right] \leqq \frac{C_4}{C_3} D .
$$

Aus der in (27) ausgedrückten Beschränktheit der linken Seite ergibt sich nach (25) die Beschränktheit von

$$
h \sum_{S\alpha} \left(\frac{u'}{h}\right)^2 + h \sum_{S\beta} \left(\frac{u^{\backprime}}{h}\right)^2,
$$

woraus sich wie in § 3 die gleichartige Stetigkeit von u ergibt.

Wir wenden die Ungleichung (25) anstatt auf die Funktion u selbst auf deren erste und zweite Differenzenquotienten w an, die auch Differenzengleichungen genügen, deren Glieder zweiter Ordnung wie in (24) lauten. In den Zusatzgliedern können zwar noch Ableitungen von u auftreten, die sich nicht durch w ausdrücken lassen, aber deren mit h^2 multiplizierte Flächenquadratsumme schon als beschränkt angenommen werden kann. Das aber genügt, um auf diese Differenzengleichung für w denselben Schluß anzuwenden, den wir oben auf u angewandt haben. Wir können somit die gleichartige Stetigkeit und Beschränktheit der Funktionen u und ihrer ersten und zweiten Ableitungen folgern, die infolgedessen eine Teilfolge besitzen, die gleichmäßig gegen die Lösung des

Anfangswertproblems der Differentialgleichung konvergiert. Aus deren Eindeutigkeit folgt wieder, daß die Funktionenfolge selber konvergiert.

Wir müssen dabei allerdings voraussetzen, daß die Differenzenquotienten bis zur dritten Ordnung auf und zwischen den beiden Anfangsreihen gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen konvergieren[28]).

§ 8.

Das Anfangswertproblem einer beliebigen hyperbolischen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Wir wollen nun zeigen, daß die bisher entwickelten Methoden dazu ausreichen, das Anfangswertproblem einer beliebigen linearen homogenen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu lösen. Es genügt dabei, sich auf den Fall von drei Variablen zu beschränken. Der Gedankengang läßt sich unmittelbar auf mehr Variable übertragen. Man kann leicht einsehen, daß das allgemeinste derartige Problem durch eine Variablentransformation auf folgendes zurückgeführt werden kann: Eine Funktion $u(x, y, t)$ zu finden, die der Differentialgleichung

$$u_{tt} - (a u_{xx} + 2 b u_{xy} + c u_{yy}) + \alpha u_t + \beta u_x + \gamma u_y + \delta u = 0 \tag{28}$$

genügt und die mit ihren ersten Ableitungen auf der Fläche $t = 0$ vorgegebene Werte annimmt. Dabei sollen die Koeffizienten Funktionen der Variablen x, y, t sein und den Bedingungen

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

genügen.

Die Koeffizienten setzen wir dabei als dreimal nach x, y, t, und die Anfangswerte u als viermal bzw. u_t als dreimal nach x, y stetig differenzierbar voraus.

Wir denken uns ferner die Koordinaten x und y um einen Punkt der Anfangsebene so gedreht, daß in ihm $b = 0$ ist. Dann ist in einer gewissen Umgebung G dieses Punktes sicher die Bedingung

$$a - |b| > 0, \quad c - |b| > 0$$

erfüllt. Auf diese Umgebung beschränken wir unsere Betrachtungen. Wir können dann eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $d > 0$ so wählen, daß

$$\left.\begin{array}{l} a - d \\ c - d \\ d - |b| \end{array}\right\} > \varepsilon > 0 \tag{29}$$

---

[28]) Diese Voraussetzung und die über die Differenzierbarkeit der Koeffizienten der Differentialgleichung und ferner die Beschränkung auf eine genügend kleine Umgebung der Anfangsgeraden lassen sich in Sonderfällen mildern.

mit konstantem ε gilt. Dann setzen wir die Differentialgleichung in die Form

$$(30)\quad u_{tt} - (a-d)\,u_{xx} - (c-d)\,u_{yy} - \frac{1}{2}(d+b)\,(u_{xx} + 2\,u_{xy} + u_{yy}) \\ - \frac{1}{2}(d-b)(u_{xx} - 2\,u_{xy} + u_{yy}) + \alpha u_t + \beta u_x + \gamma u_y + \delta u = 0.$$

Wir legen nun in den Raum das Gitter der Punkte

$$t = lh,\quad x + y = m\varkappa h,\quad x - y = n\varkappa h \qquad (l, m, n = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

und ersetzen die Gleichung (30) durch eine Differenzengleichung $L(u) = 0$ in diesem Gitter. Wir ordnen zu dem Zweck jedem Gitterpunkt P_0 folgende Nachbarpunkte zu: Die Punkte $P_{a'}$ bzw. P_a, die aus P_0 durch Verschiebung um h bzw. $-h$ in Richtung der t-Achse entstehen; ferner die Punkte $P_1, \ldots, P_8$, die mit P_0 in derselben Parallelebene zur (x, y)-Ebene liegen; vgl. Fig. 11. Diese Punkte bilden ein „Elementaroktaeder" mit den Eckpunkten $P_{a'}, P_a, P_1, P_2, P_3, P_4$.

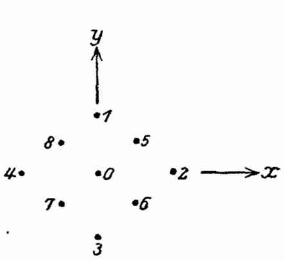

Fig. 11.

Für jeden Gitterpunkt P_0, der innerhalb von G liegt, ersetzen wir die in (30) auftretenden zweiten Differentialquotienten folgendermaßen durch Differenzenquotienten aus dem zu P_0 gehörigen Elementaroktaeder.

Wir ersetzen

$$\begin{aligned} u_{tt} &\quad\text{durch}\quad \frac{1}{h^2}(u_{a'} - 2\,u_0 + u_a) \\ u_{xx} &\quad\text{durch}\quad \frac{1}{\varkappa^2 h^2}(u_2 - 2\,u_0 + u_4) \\ u_{yy} &\quad\text{durch}\quad \frac{1}{\varkappa^2 h^2}(u_1 - 2\,u_0 + u_3) \\ u_{xx} + 2\,u_{xy} + u_{yy} &\quad\text{durch}\quad \frac{4}{\varkappa^2 h^2}(u_6 - 2\,u_0 + u_8) \\ u_{xx} - 2\,u_{xy} + u_{yy} &\quad\text{durch}\quad \frac{4}{\varkappa^2 h^2}(u_5 - 2\,u_0 + u_7). \end{aligned}$$

Die in (30) auftretenden ersten Differentialquotienten ersetzen wir durch irgendwelche entsprechende Differenzenquotienten in dem Elementaroktaeder. Den Koeffizienten in der Differenzengleichung geben wir die Werte, die die Koeffizienten der Differentialgleichung im Punkte P_0 annehmen.

Auf den ersten beiden Anfangsebenen $t = 0$ und $t = h$ denken wir uns die Funktionswerte so vorgegeben, daß sie bei Verfeinerung der Maschenweiten unter Festhaltung des Verhältnisses $\varkappa$ der Raum- zur Zeitmaschenweite gegen die vorgegebenen Anfangswerte auf $t = 0$ streben, wobei die zwischen den beiden Ebenen $t = 0$ und $t = h$ gebildeten Differenzenquotienten bis zur vierten Ordnung gegen die entsprechenden vorgegebenen Differentialquotienten gleichmäßig konvergieren sollen.

Die Lösung der Differenzengleichung $L(u) = 0$ in einem Punkte ist eindeutig durch die Werte auf den beiden Grundflächen der durch ihn gehenden Bestimmtheitspyramide bestimmt.

Für den Konvergenzbeweis bilden wir die über alle Elementaroktaeder einer Bestimmtheitspyramide erstreckte Summe

$$h^3 \sum \sum \sum 2 \frac{u_{a'} - u_a}{h} L(u)$$

und formen sie vermittels der Identitäten (7), (8) um. Dadurch entsteht einmal eine mit h^3 multiplizierte Raumsumme, die in den ersten Differenzenquotienten quadratisch ist, und ferner eine mit h^2 multiplizierte Summe über die Seitendoppelflächen, in denen die Quadrate *aller* auf und zwischen den Doppelflächen vorkommenden Differenzenquotienten vom Typus $u_a - u_0, u_a - u_1, \ldots, u_a - u_8$ auftreten, wobei ihre Koeffizienten wegen (29) größer als eine feste positive Konstante sind, wenn wir überdies noch das Verhältnis $\frac{1}{\varkappa}$ von Zeit- zu Raummaschenweite genügend klein wählen.

Von hier aus können wir ganz ebenso vorgehen wie in den §§ 7, 4 und nachweisen, daß die Lösungen unserer Differenzengleichung gegen die Lösung der Differentialgleichung konvergieren.

(Eingegangen am 1. 9. 1927.)