Werk

Titel: Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen

Autor: Nagy, B. Sz. von

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0114|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

Einleitung.

Es seien $E, A, B, C, \ldots, P, \ldots$ die Elemente einer aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehenden Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$; E sei das Einheitselement. Ein System

$$\chi = \{\chi_E, \chi_A, \chi_B, \chi_C, \ldots\}$$

von komplexen Zahlen heißt bekanntlich ein (beschränkter) Charakter von $\mathfrak{G}$, falls die Beziehungen

$$\chi_P \cdot \chi_Q = \chi_{PQ} \text{ und } |\chi_P| = 1$$

gelten. Es ist dann notwendig $\chi_E = 1$ und $\chi_{P^{-1}} = \bar{\chi}_P$. Mit χ ist ersichtlich auch

$$\chi^{-1} = \{\bar{\chi}_E, \bar{\chi}_A, \bar{\chi}_B, \ldots\}$$

und mit χ und χ' auch

$$\chi \cdot \chi' = \{\chi_E \chi'_E, \chi_A \chi'_A, \chi_B \chi'_B, \ldots\}$$

je ein Charakter.

Ein Satz von A. Haar besagt (in etwas abgeänderter, aber gleichwertiger Fassung) folgendes[1]):

Es gibt ein System

$$\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots, \chi_P(t), \ldots$$

von komplexwertigen Funktionen, definiert auf einer abgeschlossenen Teilmenge T *der Strecke* $[0, 1]$, *ferner einen daselbst definierten Lebesgue-Stieltjesschen Maßbegriff (kurz: μ-Maß), mit den folgenden Eigenschaften:*

I. *Die $\chi_P(t)$ sind überall auf T stetig.*

II. *Für jedes feste t liefert*

$$\chi(t) = \{\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots\}$$

einen Charakter von $\mathfrak{G}$.

III. *Die Funktionen $\chi_P(t)$ bilden in bezug auf das μ-Maß ein (normiertes) Orthogonalsystem, d. h., es gilt*

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\, \overline{\chi_Q(t)}\, d\mu = \delta_{P,Q} = \begin{cases} 1 & \text{für } P = Q \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

---

1) A. Haar, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 129—159; vgl. auch R. E. A. C. Paley und N. Wiener, Proc. Nat. Acad. **19** (1933), S. 253—257.

IV. *Das System der* $\chi_P(t)$ *ist im Raume* $\mathfrak{L}_2$ *der in bezug auf das* μ*-Maß samt ihren Quadraten integrierbaren Funktionen vollständig.*

V. *Es gibt zu jedem Punkte* t_0 *von* T *Funktionen* $u(t)$ *und* $v(t)$, *so daß die Gleichungen*

$$\chi(t) \cdot \chi(t_0) = \chi(u(t)) \quad und \quad \chi(t) \cdot (\chi(t_0))^{-1} = \chi(v(t))$$

überall auf T, *mit etwaiger Ausnahme einer* μ*-Nullmenge, statthaben.*

VI. *Hat* $\mathfrak{G}$ *mindestens ein Element unendlicher Ordnung, so ist das* μ*-Maß stetig, d. i., sind die einzelnen Punkte von* T *vom* μ*-Maße Null.*

Für den Beweis dieses Satzes hat Haar die Theorie des Hilbertschen Raumes, insbesondere den tiefliegenden Satz über die simultane Spektraldarstellung vertauschbarer unitärer Transformationen zu Hilfe genommen. Wir wollen hier einen solchen Beweis mitteilen, der die Benutzung der Theorie des Hilbertschen Raumes ganz vermeidet und der uns auch sonst einfacher zu sein scheint.

Wir werden zugleich noch mehr gewinnen. Die von uns konstruierten Funktionensysteme und μ-Maß haben außer den obigen noch die folgenden Eigenschaften:

V*. *Es gibt zu einem beliebig gegebenen Charakter* χ *von* $\mathfrak{G}$ *zwei Funktionen* $u(t)$ *und* $v(t)$, *so daß die Gleichungen*

$$\chi(t) \cdot \chi = \chi(u(t)) \quad und \quad \chi(t) \cdot \chi^{-1} = \chi(v(t))$$

überall auf T *bestehen.*

VI*. *Das* μ*-Maß ist für jede unendliche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *stetig.*

VII. *Besteht* $\mathfrak{G}$ *nur aus Elementen endlicher Ordnung und ist* $f(t)$ *eine auf* T *stetige Funktion, so können wir sie beliebig genau durch Linearausdrücke der* $\chi_P(t)$ *gleichmäßig approximieren.*

VIII. *Ist* P *ein Element* n*-ter Ordnung, so ist*

$$\mu\,\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta] = \frac{1}{n}$$

für jede n*-te Einheitswurzel* η.[2])

IX. *Gilt für die Elemente* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ *die Gleichung*

$$P_1^{n_1} P_2^{n_2} P_3^{n_3} \ldots P_k^{n_k} = E$$

nur für $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 0$ *und sind die* B_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, k)$ *Bogen des komplexen Einheitskreises, so ist*

$$\mu\,\mathsf{M}_t[\chi_{P_1}(t) \in \mathsf{B}_1;\ \chi_{P_2}(t) \in \mathsf{B}_2;\ \ldots;\ \chi_{P_k}(t) \in \mathsf{B}_k] = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k,$$

wo b_j *die durch* 2π *geteilte Länge des Bogens* B_j *bezeichnet.*

Die Eigenschaften VI*, VIII, IX werden wir allein aus den Eigenschaften II und III ableiten können.

Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma.

---

[2]) $\mu\,\mathsf{M}_t$ bezeichnet das μ-Maß der Menge M_t.

§ 1.

Ein Lemma über die Charaktere.

Es sei jedem Element P von $\mathfrak{G}$ je eine komplexe Zahl c_P zugeordnet, doch sei nur für endlich viele P $c_P \neq 0$, und sei $c_E = 0$. Dann gibt es einen solchen Charakter χ von $\mathfrak{G}$, für welchen

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{G}} c_P \chi_P \leqq 0.$$

Es möge P_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen; es sei insbesondere $P_0 = E$. Sei $\mathfrak{H}_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ die durch $P_0, P_1, \ldots, P_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Wir werden den gesuchten Charakter durch Rekursion definieren. Es ist notwendig $\chi_{P_0} = 1$. Nehmen wir an, daß wir einen Charakter χ von $\mathfrak{H}_{n-1}$ schon gefunden haben, so daß für diesen

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P \leqq 0$$

gilt. Wir werden zeigen, daß dann sich dieser Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ zu einem Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitern läßt, und zwar so, daß

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P \leqq 0, \quad \text{also auch} \quad \Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n} c_P \chi_P \leqq 0$$

gilt. Damit wird das Lemma bewiesen sein.

Wir können voraussetzen, daß P_n nicht in $\mathfrak{H}_{n-1}$ enthalten ist. Zwei Möglichkeiten (A oder B) können dann bestehen:

A. Es gibt eine ganze Zahl $m > 0$, für welche $P_n^m \in \mathfrak{H}_{n-1}$ (sie sei dann sogleich die kleinste solche Zahl). Die Elemente von $\mathfrak{H}_n$ lassen sich dann eindeutig in der Form $Q \cdot P_n^l$, mit $Q \in \mathfrak{H}_{n-1}$ und $0 \leqq l < m$, aufschreiben.

Es sei $\chi_{P_n^m} = e^{2\pi i \theta}$ (dies ist ja schon definiert); es sei ferner

$$f_1(x) = \sum_{Q \in \mathfrak{H}_{n-1}} \sum_{l=1}^{m-1} c_{Q \cdot P_n^l} \chi_Q \cdot e^{2\pi i l \left(\frac{\theta}{m} + x\right)}.$$

Da $f_1(x)$ ein trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied und höchstens von der $m-1$-ten Ordnung ist, gibt es eine ganze Zahl k, $0 \leqq k < m$, so daß

$$\Re f_1\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0$$

ist[3]).

[3]) Es gilt ja bekanntlich folgendes: Ist die Ordnung eines trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{\nu}' c_\nu e^{2\pi i \nu x}$$

Wir setzen dann $\chi_{Q \cdot P_n^l} = \chi_Q \cdot e^{2\pi i(\theta + k)\frac{l}{m}}$; damit haben wir in der Tat den Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ zu einem Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitert und es gilt

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P = \Re f_1\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0.$$

B. Es gibt keine solche ganze Zahl $m \neq 0$, für welche $P_n^m \in \mathfrak{H}_{n-1}$. Die Elemente von $\mathfrak{H}_n$ lassen sich dann eindeutig in der Form $Q \cdot P_n^l$, mit $Q \in \mathfrak{H}_{n-1}$ und $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, aufschreiben.

Es sei

$$f_2(x) = \sum_{Q \in \mathfrak{H}_{n-1}} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty}{}' c_{Q \cdot P_n^l} \chi_Q \cdot e^{2\pi i l x},$$

dies ist (da nur endlich viele c_P von Null verschieden sind) ein trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied. Sei m eine die Ordnung von $f_2(x)$ übertreffende ganze Zahl. Dann gibt es eine ganze Zahl k, $0 \leqq k < m$, so daß

$$\Re f_2\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0.^{4})$$

Wir setzen nun $\chi_{Q \cdot P_n^l} = \chi_Q \cdot e^{2\pi i k \frac{l}{m}}$; damit haben wir den Charakter von $\mathfrak{H}_{n-1}$ auch in diesem Falle zu einem solchen Charakter von $\mathfrak{H}_n$ erweitert, für welchen

$$\Re \sum_{P \in \mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}_{n-1}} c_P \chi_P = \Re f_2\left(\frac{k}{m}\right) \leqq 0$$

gilt.

§ 2.

Konstruktion der Funktionen $\chi_P(t)$ und des Maßbegriffes.

Wir betrachten die perfekte Cantorsche Punktmenge Σ, bestehend aus allen Punkten s der Strecke $[0, 1]$, deren triadische Entwicklung ohne Benutzung der Ziffer 1 geschrieben werden kann. (Dann ist diese Entwicklung eindeutig bestimmt.) Es sei $s = [0, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots]_3$

---

ohne konstantes Glied kleiner als m, so ist $\sum_{n=0}^{m-1} p\left(\frac{n}{m}\right) = 0$; also gibt es gewiß eine solche ganze Zahl h, $0 \leqq h < m$, für welche $\Re p\left(\frac{h}{m}\right) \leqq 0$.

[4]) Vgl. Bemerkung [3]).

(die σ_k sind 0 oder 2), wir definieren dann Funktionen von s in der angedeuteten Weise:

$$x_E(s) = \left[0, \frac{\sigma_1}{2}\frac{\sigma_3}{2}\frac{\sigma_6}{2}\frac{\sigma_{10}}{2}\dots\right]_2$$

$$x_A(s) = \left[0, \frac{\sigma_2}{2}\frac{\sigma_5}{2}\frac{\sigma_9}{2}\;.\;\dots\right]_2 \quad \text{(dyadische Entwicklungen!)}$$

$$x_B(s) = \left[0, \frac{\sigma_4}{2}\frac{\sigma_8}{2}\;.\;.\;\dots\right]_2$$

$$x_C(s) = \left[0, \frac{\sigma_7}{2}\;.\;.\;.\;\dots\right]_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Funktionen überall auf Σ stetig sind[5]). Durchläuft s die Menge Σ, so durchläuft die Folge

$$\{x_E(s), x_A(s), x_B(s), \dots, x_P(s), \dots\}$$

offenbar *alle* Punkte des abzählbar unendlich-dimensionalen Einheitswürfels

$$0 \leqq x_E \leqq 1,\ 0 \leqq x_A \leqq 1,\ 0 \leqq x_B \leqq 1, \dots, 0 \leqq x_P \leqq 1, \dots.$$

Diese Abbildung ist aber nicht auch umkehrbar eindeutig, da diejenigen Punkte des Würfels, die mindestens eine dyadisch-rationale Koordinate besitzen, mehreren Punkten von Σ zugeordnet sein können. (Dies folgt daraus, daß eine dyadisch-rationale Zahl auf zweierlei Weise dyadisch entwickelt werden kann.) Die übrigen Punkte des Würfels, die also in keiner Ebene mit einer „Gleichung" von der Form

$$x_P = d \qquad (d \text{ dyadisch-rational})$$

liegen, gehören aber zu je einem einzigen Punkte von Σ.

Bezeichne nun K^∞ den abzählbar unendlich-dimensionalen Torusraum aller Folgen

$$\varkappa = \{\varkappa_E, \varkappa_A, \varkappa_B, \varkappa_C, \dots, \varkappa_P, \dots\}$$

von *komplexen* Zahlen vom Absolutbetrage 1. Die Gesamtheit aller Charaktere von $\mathfrak{G}$ kann dann als eine Untermenge X von K^∞ aufgefaßt werden. Verstehen wir in K^∞ unter Konvergenz die „koordinatenweise" Konvergenz, so ist X offenbar eine *abgeschlossene* Untermenge von K^∞.

---

[5]) Sei nämlich $s^{(n)} = [0, \sigma_1^{(n)}\sigma_2^{(n)}\dots]_3$ eine gegen $s^* = [0, \sigma_1^*\sigma_2^*\dots]_3$ strebende Folge von Punkten aus Σ. Da die Punkte von Σ, die in die Strecke

$$[[0, \sigma_1^*\sigma_2^*\dots\sigma_N^*\,0\,0\,0\dots]_3, [0, \sigma_1^*\sigma_2^*\dots\sigma_N^*\,2\,2\,2\dots]_3]$$

fallen, von den übrigen Punkten von Σ einen Abstand $\geqq 3^{-N}$ haben, so muß von einem gewissen Index n_0 an $\sigma_1^{(n)} = \sigma_1^*, \sigma_2^{(n)} = \sigma_2^*, \dots, \sigma_N^{(n)} = \sigma_N^*$ gelten. Hieraus folgt aber unmittelbar, daß $x_P(s^{(n)}) \to x_P(s^*)$.

Sei ϱ eine feste irrationale Zahl und sei

$$\varkappa_E(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_E(s))},\ \varkappa_A(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_A(s))},\ \ldots,\ \varkappa_P(s) = e^{2\pi i(\varrho + x_P(s))},\ \ldots.$$

Diese auf Σ definierten Funktionen sind offenbar auch überall stetig. Also ist

$$s \to \{\varkappa_E(s), \varkappa_A(s), \varkappa_B(s), \ldots, \varkappa_P(s), \ldots\}$$

eine stetige Abbildung von Σ auf K^∞.

Wir wollen die Menge der Punkte von K^∞, deren P-Koordinate, $\varkappa_P$, gleich $e^{2\pi i(\varrho+d)}$ ist (wo d eine dyadisch-rationale Zahl bedeutet), eine *Netzebene* nennen. Da es abzählbar unendlich viele Gruppenelemente und abzählbar unendlich viele dyadisch-rationale Zahlen d gibt, haben wir abzählbar unendlich viele Netzebenen. Die Punkte von K^∞, die auf keiner Netzebene liegen, sind offenbar je einem *einzigen* Punkte von Σ zugeordnet.

Bezeichne T diejenige, offenbar abgeschlossene, Teilmenge von Σ, für deren Punkte t gilt: $\varkappa(t) \in \mathsf{X}$. Wir definieren dann

$$\chi(t) = \{\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots\} = \{\varkappa_E(t), \varkappa_A(t), \varkappa_B(t), \ldots\} = \varkappa(t).$$

Durchläuft t die Punkte von T, so bekommen wir also *alle* Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Es sei χ ein beliebiger Charakter von $\mathfrak{G}$, dann sind für jedes t auch $\chi(t)\cdot\chi$ und $\chi(t)\cdot\chi^{-1}$ Charaktere. Es gibt also notwendig zwei solche Abbildungen $t' = u(t)$ und $t'' = v(t)$ von T auf Teilmengen von T, für welche identisch gilt:

$$\chi(t)\cdot\chi = \chi(u(t)) \quad \text{und} \quad \chi(t)\cdot\chi^{-1} = \chi(v(t)).$$

Damit sind für diese Funktionen die Eigenschaften I, II und V* bewiesen. Nun kommen wir zur Einführung des μ-Maßes und zum Beweis von III.

Die auf der abgeschlossenen Teilmenge T der Strecke [0, 1] stetigen Funktionen

$$\Re\chi_A(t),\ \Im\chi_A(t),\ \Re\chi_B(t),\ \Im\chi_B(t),\ \ldots \qquad (E \text{ ist ausgelassen!})$$

können wir leicht zu Funktionen

$$h'_A(s),\ h''_A(s),\ h'_B(s),\ h''_B(s),\ \ldots$$

erweitern, die schon auf der ganzen Strecke $0 \leqq s \leqq 1$ definiert, reellwertig und stetig sind. (Wir können sie z. B. so wählen, daß sie auf den einzelnen Intervallen, in welche ja die komplementäre Menge $\overline{\mathsf{T}}$ von T zerfällt, linear sind.) Ferner wählen wir eine auf [0, 1] stetige Funktion $h^*(s)$ derart, daß $h^*(s) > 0$ auf $\overline{\mathsf{T}}$, $h^*(s) = 0$ auf T sei (z. B. sei $h^*(s)$ gleich dem Abstand (s, T)).

Sei nun $l(s)$ eine beliebige, aus endlich vielen der Funktionen $h^*(s)$, $h'_A(s)$, $h''_A(s)$, $h'_B(s)$, $h''_B(s)$, ... mit reellen Koeffizienten gebildete Linearkomposition. Wir behaupten, daß

$$\min_{0 \leqq s \leqq 1} l(s) \leqq 0 \leqq \max_{0 \leqq s \leqq 1} l(s)$$

gilt.

Aus Symmetriegründen können wir uns auf den Beweis der ersten Ungleichung beschränken. Nun hat $l(s)$ für $s = t \in \mathsf{T}$ offenbar die Gestalt:

$$l(t) = \sum_{P \neq E} (a_P \Re \chi_P(t) + b_P \Im \chi_P(t)) = \Re \sum_{P \neq E} (a_P - i b_P) \chi_P(t).$$

Aus unserem Lemma folgt, daß es in der Tat ein t gibt, für welches $l(t) \leqq 0$.

Aus diesem Ergebnis folgt nach einem Satze von F. Riesz[6]), daß es eine monotone Funktion $g(s)$ auf $[0, 1]$ gibt, so daß die Gleichungen

$$\int_0^1 d g(s) = 1, \quad \int_0^1 h^*(s) d g(s) = \int_0^1 h'_A(s) d g(s) = \int_0^1 h''_A(s) d g(s) = \ldots = 0$$

bestehen.

Aus dem Verschwinden des Integrals der nirgends negativen Funktion $h^*(s)$ folgt, daß die Menge $\mathsf{M}_s[h^*(s) > 0] = \overline{\mathsf{T}}$ in bezug auf den durch die Belegungsfunktion $g(s)$ erzeugten positiven Lebesgue-Stieltjesschen Maßbegriff (kurz: μ-Maß) vom Maße Null ist. Wir dürfen daher in den obigen Relationen die Integrationsmenge $[0, 1]$ durch T ersetzen, und so bekommen wir (mit Rücksicht auf die Identität $\chi_E(t) \equiv 1$ auf T):

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_E(t) d\mu = \int_{\mathsf{T}} d\mu = 1$$

und

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_P(t) d\mu = \int_{\mathsf{T}} h'_P(t) d\mu + i \int_{\mathsf{T}} h''_P(t) d\mu = 0 \qquad (\text{für } P \neq E).$$

---

6) Der gemeinte Satz lautet wie folgt (siehe F. Riesz, Annales Éc. Norm. Sup. (3) 28 (1911), S. 33—62; insbesondere S. 55; vgl. noch, auch für weitere Literaturangaben, St. Banach, Théorie des opérations linéaires (Warszawa, 1932), S. 74—75): Das Momentenproblem $\int_0^1 h_k(s) d g(s) = r_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ mit gegebenen reellwertigen und auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen $h_k(s)$ und gegebenen reellen Zahlen r_k hat immer dann (und nur dann) eine monotone Belegungsfunktion $g(s)$ mit $g(1) - g(0) = 1$ zur Lösung, wenn die Ungleichungen

$$\min_{0 \leqq s \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s) \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \leqq \max_{0 \leqq s \leqq 1} \sum_{k=1}^{n} a_k h_k(s)$$

für jede Wahl des ganzen n und der reellen a_k bestehen. (In unserem Falle sind alle Momente r_k gleich 0).

Wegen der Charaktereigenschaft folgt hieraus auch die Gleichung

$$\int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\,\overline{\chi_Q(t)}\,d\mu = \delta_{P,Q} \qquad \text{(für beliebige } P,\ Q \text{ aus } \mathfrak{G}),$$

also die Eigenschaft III. Es sei hier noch bemerkt, daß offenbar auch die Gleichung

$$\int_{\mathsf{T}} \chi'_P \cdot \chi_P(t)\,d\mu = \chi'_P \int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\,d\mu = \chi'_P \cdot \delta_{P,E} = \delta_{P,E}$$

für einen beliebigen Charakter χ' von $\mathfrak{G}$ gilt.

§ 3.

Über die Werteverteilung und Vollständigkeit der $\chi_P(t)$.

Sei P ein Element n-ter Ordnung. Dann nimmt $\chi_P(t)$ (wegen Eigenschaft II) nur n-te Einheitswurzeln als Werte an. Sei η ein solcher Wert. Dann ist

$$\frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \eta^{-h} (\chi_P(t))^h = f(t)$$

offenbar gleich der charakteristischen Funktion [7]) der Punktmenge $\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$. Das Integral von $f(t)$ ist aber (wegen der Eigenschaften II und III) offenbar gleich $\frac{1}{n}$, also gilt auch VIII.

Es sei nun Z eine „Zelle" von K^∞, definiert durch die (endlich vielen!) Bedingungen

$$\varkappa_{P_1} \in \mathsf{B}_1, \quad \varkappa_{P_2} \in \mathsf{B}_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_{P_k} \in \mathsf{B}_k,$$

wo die B_j gewisse Bogen des komplexen Einheitskreises bedeuten; b_j sei die durch 2π geteilte Länge von B_j.

Mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes kann man leicht einsehen, daß es eine beschränkte Folge von Polynomen

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \varkappa_{P_1}^{n_1} \varkappa_{P_2}^{n_2} \cdots \varkappa_{P_k}^{n_k} = p_m(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$$

gibt, die für $m \to \infty$ überall auf K^∞ gegen die charakteristische Funktion von Z konvergiert. Dann ist aber die charakteristische Funktion $\varphi(t)$ der t-Menge

$$\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = \mathsf{M}_t[\chi_{P_1}(t) \in \mathsf{B}_1;\ \chi_{P_2}(t) \in \mathsf{B}_2;\ \ldots;\ \chi_{P_k}(t) \in \mathsf{B}_k]$$

---

[7]) Die zu einer Teilmenge der Grundmenge gehörige charakteristische Funktion ist folgendermaßen definiert: Sie ist auf dieser Teilmenge überall gleich 1, auf ihrer Komplementärmenge aber überall gleich 0.

gleich dem Limes von

(1) $$p_m(\chi_{P_1}(t), \chi_{P_2}(t), \ldots, \chi_{P_k}(t)) = \sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t)$$

für $m \to \infty$ (wo $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_k^{n_k}$).

Ist $P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = E$ nur für $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 0$, so ist (wegen III)

(2) $$\int_{\mathsf{T}} \varphi(t)\, d\mu = \lim_{m \to \infty} c^{(m)}_{0, 0, \ldots, 0}.$$

Es ist andererseits auch

(3) $$\int p_m(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_k})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k = c^{(m)}_{0, 0, \ldots, 0},$$

wo das Integral über den k-dimensionalen Einheitswürfel ($0 \leqq x_j \leqq 1$; $j = 1, 2, \ldots, k$) zu nehmen ist. Nun ist aber der Limes dieses Integranden (für $m \to \infty$) gleich der charakteristischen Funktion desjenigen Teiles dieses Würfels, wo

$$e^{2\pi i x_1} \in \mathsf{B}_1, \; e^{2\pi i x_2} \in \mathsf{B}_2, \; \ldots, \; e^{2\pi i x_k} \in \mathsf{B}_k,$$

also ist

(4) $$\lim_{m \to \infty} \int p_m(e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_k})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k.$$

Aus (2), (3), (4) ergibt sich endlich:

$$\mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = b_1 \cdot b_2 \cdots b_k,$$

wie in IX behauptet wurde.

Die Menge N *derjenigen Punkte von* T*, für welche* $\chi(t)$ *auf Netzebenen von* K^∞ *fällt, ist vom* μ*-Maße Null.* Zum Beweis betrachten wir eine Netzebene $\varkappa_P = \eta$. Nehmen wir an, daß P ein Gruppenelement n-ter Ordnung ist, dann nimmt $\chi_P(t)$ nur n-te Einheitswurzeln als Werte an. Da η von der Form $e^{2\pi i(\varrho + d)}$ mit irrationalem ϱ und rationalem d ist, ist es keine n-te Einheitswurzel, also ist $\mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$ leer. Ist P von unendlicher Ordnung, so folgt aus der soeben bewiesenen Eigenschaft IX, daß $\mu\, \mathsf{M}_t[\chi_P(t) = \eta]$ gleich Null ist, da wir η als einen Bogen der Länge Null auffassen dürfen. Da es nur abzählbar unendlich viele Netzebenen in K^∞ gibt, ist die obige Behauptung bewiesen.

Beweis der Vollständigkeit in $\mathfrak{L}_2$. Sei $\mathfrak{L}$ diejenige (im μ-Quadratintegral-Mittel) abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit, die durch die Funktionen $\chi_P(t)$ aufgespannt wird.

Ist Z eine beliebige Zelle in K^∞, so ist nach (1) die charakteristische Funktion der Menge $\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}]$ Limes einer beschränkten Folge von Linearausdrücken der $\chi_P(t)$, sie gehört also zu $\mathfrak{L}$.

Es sei nun Σ' derjenige Teil von Σ, der im Intervall

$$[[0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_N\, 0000 \ldots]_3, \; [0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_N\, 2222 \ldots]_3]$$

liegt ($\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$ sind gegebene Zahlen, die 0 oder 2 sein dürfen). Die Punkte von Σ' haben also eine triadische Entwicklung von der Form

$$[0, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{N_1} * * * * \ldots]_3,$$

wo die Stellen $*$ beliebig durch Nullen und Zweien ausgefüllt sein können. Aus der Definition der Funktionen $x_P(s)$ und $\varkappa_P(s)$ folgt dann leicht, daß die Abbildung $\Sigma \to \mathsf{K}^\infty$ die Untermenge Σ' in eine Zelle Z' von K^∞ überführt. Wir haben aber die Gleichung

$$\mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}'] = \Sigma' \cdot \mathsf{T} + \mathsf{N}',$$

wo N' eine Untermenge von N bedeutet, also ist $\mu\, \mathsf{N}' = 0$. Hieraus folgt, daß die charakteristische Funktion der Menge $\Sigma' \cdot \mathsf{T}$ ebenfalls zu $\mathfrak{L}$ gehört. Da aber die charakteristischen Funktionen aller Mengen von der Form $\Sigma' \cdot \mathsf{T}$ in $\mathfrak{L}_2$, d. h. im Raume *aller* in bezug auf das μ-Maß meßbaren und quadratisch integrierbaren Funktionen, offenbar überall dicht liegen, so ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_2$, w. z. b. w.

§ 4.

Die Stetigkeit des μ-Maßes und die Approximationseigenschaft.

Es sei Z eine beliebige Zelle in K^∞, wie in § 3, und es sei χ ein gegebener Charakter von $\mathfrak{G}$. Wir behaupten, daß dann gilt:

$$\mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) \in \mathsf{Z}] = \mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) \cdot \chi^{-1} \in \mathsf{Z}].$$

Ist nämlich die charakteristische Funktion der ersteren Menge gleich dem Limes von

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\, \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t) \qquad \text{für } m \to \infty,$$

(vgl. (1)), so ist die der letzteren gleich dem Limes von

$$\sum_{n=-m}^{m} c^{(m)}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\, \chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(t) \cdot \overline{\chi_{P(n_1, n_2, \ldots, n_k)}}.$$

Da diese beschränkten Folgen gliedweise integrierbar sind und da die Integrale der einzelnen Glieder übereinstimmen (vgl. die Bemerkung am Ende von § 2), so haben auch die beiden charakteristischen Funktionen gleiches Integral, w. z. b. w.

Es durchlaufe nun $\mathsf{Z}^{(n)}$ eine Folge ineinandergeschachtelter Zellen mit dem einzigen gemeinsamen Punkte $1 = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Wenn wir die soeben bewiesene Gleichung auf jede Zelle $\mathsf{Z}^{(n)}$ anwenden und dann zur Grenze übergehen, so erhalten wir

$$\mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) = 1] = \mu\, \mathsf{M}_t[\chi(t) \cdot \chi^{-1} = 1].$$

Anders ausgedrückt: es ist

$$\mu \,\mathsf{M}_t [\chi(t) = \chi]$$

von der Wahl des Charakters χ unabhängig.

Da eine unendliche Gruppe unendlich viele verschiedene Charaktere hat[8]) und da T vom μ-Maße 1 ist, so muß notwendig

$$\mu \,\mathsf{M}_t [\chi(t) = \chi] = 0$$

sein.

Daraus folgt aber *a fortiori* die behauptete Eigenschaft VI*.

Endlich zum Beweis der Approximationseigenschaft VII!

Hat die Gruppe $\mathfrak{G}$ nur Elemente endlicher Ordnung, so liegt kein Punkt der Menge X auf Netzebenen von K^∞ (vgl. § 3, Beweis der Gleichung $\mu \mathsf{N} = 0$). Hieraus folgt, daß die Abbildung $\mathsf{T} \to \mathsf{X}$ in diesem Falle eindeutig umgekehrt werden kann. Die umgekehrte Abbildung $g(\varkappa) = t$ ist offenbar überall auf X auch stetig.

Ist $f(t)$ eine auf T definierte stetige Funktion, so ist auch $f(g(\varkappa))$ auf X stetig. Aus den topologischen Eigenschaften des Raumes K^∞ folgt[9]), daß diese stetige Funktion von der abgeschlossenen Teilmenge X auf den ganzen Raum K^∞ stetig erweitert werden und die erweiterte Funktion für jedes positive ε durch eine stetige, nur von endlich vielen $\varkappa_P$ abhängige Funktion $h(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$ mit der Genauigkeit $\varepsilon/2$ gleichmäßig approximiert werden kann. Wegen des Weierstraßschen Approximationssatzes kann man dann diese letzte Funktion durch ein Polynom $p(\varkappa_{P_1}, \varkappa_{P_2}, \ldots, \varkappa_{P_k})$ mit der Genauigkeit $\varepsilon/2$ gleichmäßig approximieren. Dann gilt aber offenbar auf T:

$$|f(t) - p(\chi_{P_1}(t), \chi_{P_2}(t), \ldots, \chi_{P_k}(t))| \leqq \varepsilon,$$

woraus die Behauptung VII folgt.

---

[8]) Diese wohlbekannte Tatsache folgt auch aus unseren bisherigen Ergebnissen. Angenommen, es gäbe nur n Charaktere $\chi^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, so müßte (damit das Gesamtmaß 1 für T herauskommt) jedes $\mathsf{M}_t[\chi(t) = \chi^{(k)}]$ vom μ-Maße $1/n$ sein. Dies hätte aber die (unmögliche) Folge, daß die *unendlich vielen* Vektoren

$$\mathfrak{v}_E = \{\chi_E^{(1)}, \chi_E^{(2)}, \ldots, \chi_E^{(n)}\}, \mathfrak{v}_A = \{\chi_A^{(1)}, \chi_A^{(2)}, \ldots, \chi_A^{(n)}\}, \ldots, \mathfrak{v}_P = \{\chi_P^{(1)}, \chi_P^{(2)}, \ldots, \chi_P^{(n)}\}, \ldots$$

wegen

$$\delta_{P,Q} = \int_{\mathsf{T}} \chi_P(t)\overline{\chi_Q(t)}\, d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_P^{(k)}\overline{\chi_Q^{(k)}}$$

ein (zu $n^{\frac{1}{2}}$ normiertes) Orthogonalsystem im n-dimensionalen Vektorraume bilden.

[9]) Und zwar aus der Bikompaktheit von K^∞; vgl. z. B. B. Jessen, Acta Math. 63 (1934), S. 249—323, insbesondere S. 252—257; ferner P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie, Bd. I (Berlin, 1935), S. 73 und 89.

Bemerkung. Man könnte die Beweisführung auch so einrichten, daß der Übergang $\mathsf{K}^\infty \to \Sigma$ bzw. $\mathsf{X} \to \mathsf{T}$ erst am Ende des Beweises vollzogen wird. Man könnte nämlich statt der Funktionen $\chi_P(t)$ die für $\varkappa \in \mathsf{X}$ definierten Funktionen $\chi_P(\varkappa) = \varkappa_P$ betrachten und das μ-Maß statt auf T auf X einführen. Diese Beweisführung hätte auch den Vorteil, daß sie auch im Falle nichtabzählbarer Abelscher Gruppen teilweise angewandt werden kann (natürlich ist dann der Torusraum K^∞ auch unabzählbar viel-dimensional und es ist kein solcher Übergang $\mathsf{K}^\infty \to \Sigma$ mehr möglich). Das Lemma wird ja auch in diesem Falle gelten, da im Beweis desselben die gewöhnliche Rekursion durch transfinite ersetzt werden kann. Wir wollen aber auf diese Erweiterungsmöglichkeiten nicht näher eingehen.

(Eingegangen am 13. 12. 1936.)