Die subdirekte Unzerlegbarkeit der Intervallrechnung

Von *H. Ratschek* in Düsseldorf

1. Einleitung

Sei $\mathbf{I}$ die Menge der reellen kompakten Intervalle und $A * B = \{a * b : a \in A,\ b \in B\}$ für $A, B \in \mathbf{I}$ und $* \in \{+, -, \cdot, :\}$, wobei $A : B$ nicht erklärt ist, wenn $0 \in B$. Das System $(\mathbf{I}, +, -, \cdot, :)$ heißt *einfache Intervallarithmetik* und ist sowohl für die automatische Fehlererfassung auf Rechenmaschinen als auch für eine Fehlertheorie im weitesten Sinne von Interesse. Seit Erscheinen der ersten Monographie [5] über diesen Gegenstand bemühte man sich auch um eine algebraische Charakterisierung der Intervallrechnung. Zwar kann die Intervallarithmetik als Fehlerbereich der reellen Arithmetik angesehen werden, doch differieren die algebraischen Eigenschaften dieser Systeme wesentlich. Z.B. gilt das distributive Gesetz $A(B+C) = AB + AC$ für $A, B, C \in \mathbf{I}$ nur in Ausnahmefällen; oder die Gleichungen $A + X = B$ bzw. $AY = B$ haben nicht $X = B - A$ bzw. $Y = B : A$ als Lösung, usw.

Die Struktur von $\mathbf{I}$ hinsichtlich der einzelnen Operationen ist leicht beschreibbar, vgl. [7]. So ist $(\mathbf{I}, +)$ einbettbar in $(\mathbf{R}^2, +)$, die additive Gruppe der Ebene ($\mathbf{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen). Das multiplikative System $(\mathbf{I}', \cdot)$ mit $\mathbf{I}' = \mathbf{I} \setminus \{[0, 0]\}$ ist einerseits so in disjunkte Teilmengen $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ und $\mathbf{I}_3$ zerlegbar, daß $(\mathbf{I}_1, \cdot)$ einbettbar in die Gruppe $(\mathbf{R}', \cdot) \times (\mathbf{R}', \cdot)$ ist, wenn $(\mathbf{R}', \cdot)$ die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen bedeutet. Es ist $(\mathbf{I}_2, \cdot)$ isomorph zur multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen, und $(\mathbf{I}_3, \cdot)$ ist disjunkte Vereinigung von Gruppen, die isomorph zu $(\mathbf{R}', \cdot)$ sind. Somit ist $(\mathbf{I}', \cdot)$ durch wohlbekannte Gruppen überdeckbar. Andererseits gilt eine Darstellung als subdirektes Produkt, d.h. $(\mathbf{I}', \cdot)$ ist einbettbar in ein direktes Produkt von vier „bekannten“ Halbgruppen,

$$(\{-1, 0, 1\}, \cdot) \times (\mathbf{R}^+, \cdot) \times ([0, 1], \cdot) \times ([-1, 0], \wedge),$$

wobei $\mathbf{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ und jeder der Faktoren des direkten Produktes homomorphes Bild von $(\mathbf{I}', \cdot)$ ist. Subtraktion und Division sind zwar nicht die Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation, sind aber mittels Involutionen auf diese zurückführbar, vgl. [6].

Von besonderem Interesse ist jedoch die Struktur des *additiv-multiplikativen* Systems $\mathfrak{I} = (\mathbf{I}, +, \cdot)$, da es das eigentliche Rechnen mit Intervallen repräsentiert. Über dieses war bisher keine vollständige Aussage bekannt, man wußte nur, daß es wegen des fehlenden distributiven Gesetzes Schwierigkeiten bereitet, $\mathfrak{I}$ mit Ringen, Körpern und anderen klassischen Strukturen in Verbindung zu bringen und $\mathfrak{I}$ durch diese darzustellen. Wieder andere Perspektiven eröffneten sich im Rahmen der dreiwertigen Mengenlehre. Mit deren Methoden konnte D. Klaua [3] nachweisen, daß in $\mathfrak{I}$ die Körperaxiome erfüllt sind, wenn in den Axiomen die übliche Gleichheit $=$ durch die verallgemeinerte (auch Quasi-) Gleichheit $\sim$ ersetzt wird, die durch $A \sim B$, wenn $A \cap B \neq \emptyset$ ist, definiert wird. Insbesondere kann die Intervallrechnung unter Benutzung beider Gleichheiten axiomatisch erfaßt werden [4], wobei die verwendeten Axiome von einfacher und „bekannter" Gestalt sind.

Das System $\mathfrak{I}$ heißt subdirekt unzerlegbar, wenn es nur dann einen Monomorphismus von $\mathfrak{I}$ in ein direktes Produkt von homomorphen Bildern $\varepsilon_i(\mathfrak{I})$ gibt, wenn einer der Homomorphismen ε_i ein Isomorphismus ist [2].

In dieser Note wird gezeigt, daß $\mathfrak{I}$ subdirekt unzerlegbar ist. Es ist also (unter Beibehaltung der üblichen Gleichheit) nicht möglich, $\mathfrak{I}$ global auf einfachere Strukturen zurückzuführen. Demnach ist mit klassischen Methoden die Struktur von $\mathfrak{I}$ nicht entschlüsselbar, so daß der Schritt zu nichtklassischen Hilfsmitteln, wie der dreiwertigen Mengenlehre, zwingend ist.

In Abschnitt 2 werden intervallarithmetische Hilfsmittel abgeleitet und Kongruenzrelationen von $\mathfrak{I}$ studiert. Der Nachweis der subdirekten Unzerlegbarkeit erfolgt in Abschnitt 3. Am Rande ergibt sich, daß die einpunktkompaktifizierte Zahlengerade homomorphes Bild von $\mathfrak{I}$ ist. In Abschnitt 4 wird, ähnlich wie bei der Überdeckung von $(\mathbf{I}', \cdot)$ durch Gruppen, $\mathfrak{I}$ in disjunkte Bereiche zerlegt, von denen jeder in den Körper $\mathfrak{R} = (\mathbf{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen oder in die Potenz $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ einbettbar ist.

2. Intervallarithmetische Hilfsmittel

Aus der Definition der Intervallverknüpfungen erhält man die *Rechenregeln*

$$[a, b] + [c, d] = [a+c, b+d], \quad [a, b] - [c, d] = [a-d, b-c],$$

$$[a, b]\,[c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}],$$

$$[a, b] : [c, d] = [a, b]\,[1/d, 1/c], \quad \text{wenn} \quad 0 \notin [c, d].$$

Intervalle $[a, a]$ heißen *Punktintervalle*, und man schreibt kurz a statt $[a, a]$, so daß auch $a + A$, aA, usw. für $a \in \mathbf{R}$ und $A \in \mathbf{I}$ erklärt ist. Mit $\mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$ wird die Menge der eigentlichen Intervalle bezeichnet, das sind Intervalle, die keine Punktintervalle sind. Intervalle $[-a, a]$ heißen *symmetrisch*. Die Menge der von 0 verschiedenen symmetrischen Intervalle bezeichnen wir mit $\mathbf{S}$.

Zur Beschreibung verschiedener Intervallklassen sind Intervallfunktionale zweckmäßig: Für $A = [a, b]$ und $B = [c, d] \neq 0$ sei

$$\varphi A = (a+b)/2 \ (\textit{Mittelpunkt}), \quad \lambda A = b - a \ (\textit{Weite}),$$

$$\psi A = \max\{|a|, |b|\} \ (\textit{Norm}), \quad \sigma A = \operatorname{sgn}(a+b) \ (\textit{Vorzeichen}),$$

$$\sigma' A = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sigma A \geqq 0, \\ -1, & \text{andernfalls}, \end{cases} \qquad \chi B = \begin{cases} c/d, & \text{wenn } |c| \leqq |d|, \\ d/c, & \text{andernfalls}. \end{cases}$$

Es sind $\varphi:(\mathbf{I},+)\to(\mathbf{R},+)$ und $\lambda:(\mathbf{I},+)\to(\mathbf{R},+)$ Homomorphismen, ebenso $\sigma:(\mathbf{I},\cdot)\to(\mathbf{R},\cdot)$, $\psi:(\mathbf{I},\cdot)\to(\mathbf{R},\cdot)$ und $\chi:(\mathbf{I}',\cdot)\to([-1,1],\odot)$ mit $a\odot b=ab$, wenn $a,b\geqq 0$, bzw. $a\odot b=\min\{a,b\}$, andernfalls. Ein Intervall A ist sowohl durch die Werte φA und λA als auch durch die Werte σA, ψA und χA, wenn $A\neq 0$, eindeutig bestimmt, und dann gilt

$$(1)\qquad A=\varphi A+[-1,1]\,(\lambda A)/2 \quad \text{und} \quad A=(\sigma' A)\,(\psi A)\,[\chi A, 1].$$

Einzelheiten findet man in [7].

Eine Kongruenzrelation $\equiv$ auf $\mathfrak{I}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{I}$, für die die Ersetzungseigenschaft (kurz: EE) gilt [2], d.h. aus $A_i\equiv B_i$ für $i=1,2$ folgt $A_1 * A_2\equiv B_1 * B_2$ für $*\in\{+,\cdot\}$.

Lemma 1. *Seien $S,T\in\mathbf{S}$ mit $\lambda T>\lambda S$ und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{I}$ mit $S\equiv T$. Dann gilt $S\equiv T'$ für alle $T'\in\mathbf{S}$ mit*

a) $\lambda S\leqq\lambda T'\leqq\lambda T$ *oder* b) $\lambda T\leqq\lambda T'$ *oder* c) $\lambda T'\leqq\lambda S$.

Beweis. a) O.B.d.A. sei $S=[-1,1]$, $T=[-t,t]$ und $T'=[-t',t']$. Aus $S\equiv T$ folgt nach EE die Beziehung

$$S=\frac{t-t'}{t-1}\,S+\frac{t'-1}{t-1}\,S\equiv\frac{t-t'}{t-1}\,S+\frac{t'-1}{t-1}\,T=T'.$$

b) Sei wieder $S=[-1,1]$, $T=[-t,t]$ und $T'=[-t',t']$. Aus $S\equiv T$ und $T=tS$ folgt $tS\equiv t^2S$ nach EE und hieraus aufgrund der Transitivität $S\equiv t^2S$, usw., d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt $S\equiv t^nS$. Wegen $1<t\leqq t'$ gibt es ein hinreichend großes n mit $1<t'\leqq t^n$, so daß T' zwischen S und t^nS liegt und $S\equiv T'$ nach a) gilt.

c) Sei $T'=[-t',t']$, $S=[-s,s]$, und o.B.d.A. sei $T=[-1,1]$. Aus $S\equiv T$ und $S=sT$ folgt $s^2T\equiv sT$ nach EE, usw., d.h. für alle natürlichen Zahlen n gilt $s^nT\equiv sT$. Wegen $0<t'\leqq s<1$ gibt es ein geeignetes n mit $s^n\leqq t'\leqq s$, so daß T' zwischen s^nT und $S=sT$ liegt und $s^nT\equiv T'$ nach a) und weiter $S\equiv T'$ gilt.

Korollar 1. *Seien $S,T\in\mathbf{S}$ mit $S\neq T$ und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{I}$ mit $S\equiv T$. Dann gilt $S'\equiv T'$ für alle $S',T'\in\mathbf{S}$.*

Ist $\mathbf{M}$ eine Teilmenge von $\mathbf{I}$ und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{I}$, dann sei $\equiv_{\mathbf{M}}=\{(A,B):A\equiv B \text{ und } A,B\in\mathbf{M}\}$.

Lemma 2. *Sei $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{I}$ und $\equiv_{\mathbf{S}}=\mathbf{S}^2$. Dann ist $\equiv_{\mathbf{I}\setminus\mathbf{R}}=(\mathbf{I}\setminus\mathbf{R})^2$.*

Beweis. Der Reihe nach wird gezeigt:

a) Je zwei Intervalle $A,B\in\mathbf{I}\setminus\mathbf{R}$ mit $\varphi A=\varphi B$ sind kongruent,

b) je zwei Intervalle $[0,x]$, $[0,y]$ mit $x,y>0$ sind kongruent,

c) je zwei Intervalle $A,B\in\mathbf{I}\setminus\mathbf{R}$ mit $\sigma A,\sigma B>0$ sind kongruent,

d) je zwei Intervalle $A,B\in\mathbf{I}\setminus\mathbf{R}$ sind kongruent.

a) Aus $A=\varphi A+[-\lambda A/2,\lambda A/2]$, $B=\varphi B+[-\lambda B/2,\lambda B/2]$, vgl. (1), der Gleichheit $\varphi A=\varphi B$ und der Voraussetzung, daß Intervalle aus $\mathbf{S}$ kongruent sind, folgt $A\equiv B$ nach EE.

b) O.B.d.A. nehmen wir $0<x<y$ an. Sei α) $y \leqq 2x$. Dann ist $[0, y] \equiv [y-x, x]$ nach a). Aus $[0, y]\,[0, 1] = [0, y]$ und $[y-x, x]\,[0, 1] = [0, x]$ folgt die Behauptung. Sei β) $y > 2x$. Die Strecke $[x, y]$ wird in n gleiche Teile zerlegt, $x = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = y$, wobei n so gewählt wird, daß $d = (y-x)/n < y_0$ ist. Wegen $y_i - y_{i-1} = d$ ist $y_i < 2y_{i-1}$ und $[0, y_{i-1}] \equiv [0, y_i]$ nach α) für $i = 1, \ldots, n$ und $[0, x] \equiv [0, y]$ aufgrund der Transitivität.

c) Sei $A = [a, b]$ und $B = [c, d]$. Mit $a+b>0$ und $c+d>0$ folgt

$$[a, b] \equiv [0, a+b] \equiv [0, c+d] \equiv [c, d]$$

nach a) und b).

d) Sei $x \in \mathbf{R}$ so gewählt, daß $x > \max\{|\varphi A|, |\varphi B|\}$ gilt. Dann ist $\sigma(A+x) > 0$ und $\sigma(B+x) > 0$, woraus $A + x \equiv B + x$ nach c) und durch beidseitige Addition von $-x$ die Behauptung folgt.

Die Diagonale einer Menge $\mathbf{M}$ bezeichnen wir mit $\Delta_{\mathbf{M}}$, das ist die Relation $\{(x, x) : x \in \mathbf{M}\}$.

Lemma 3. *Sei* $\equiv$ *eine Kongruenzrelation auf* $\mathfrak{J}$, *sei* $\equiv_{\mathbf{S}} = \Delta_{\mathbf{S}}$ *und* $\equiv_{\mathbf{R}} = \Delta_{\mathbf{R}}$. *Dann ist* $\equiv\, = \Delta_{\mathfrak{J}}$.

Beweis. Wir leiten vorerst eine notwendige Bedingung für die Kongruenz von zwei verschiedenen Intervallen X und Y ab: Zunächst kann keines der beiden gleich 0 sein, denn aus $X \equiv 0$ folgt $X - X \equiv 0$. Da $X - X \in \mathbf{S}$ ist, erhielte man $r(X-X) \equiv 0$ für alle $r \in \mathbf{R}$, im Widerspruch zu $\equiv_{\mathbf{S}} = \Delta_{\mathbf{S}}$. Ebenso ist $X, Y \in \mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$: Wäre $X = x$ ein Punktintervall, so könnte Y wegen $\equiv_{\mathbf{R}} = \Delta_{\mathbf{R}}$ keines sein. Aus $x \equiv Y$ folgte $-x \equiv -Y$ und $0 = x - x \equiv Y - Y \neq 0$. Damit wäre ein Intervall aus $\mathbf{S}$ kongruent zu 0, im Widerspruch zu der oben gemachten Aussage. Nun zu einer weiteren Bedingung: Aus $X \equiv Y$ folgt $[-1, 1]\,X \equiv [-1, 1]\,Y$ und hieraus $[-1, 1]\,X = [-1, 1]\,Y$ wegen $\equiv_{\mathbf{S}} = \Delta_{\mathbf{S}}$, woraus sich $[-1, 1]\,\psi X = [-1, 1]\,\psi Y$ nach (1) und weiter $\psi X = \psi Y$ ergibt. Wir fassen zusammen:

(2) Aus $X \equiv Y$ und $X \neq Y$ folgen $\psi X = \psi Y > 0$ und $X, Y \in \mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$.

Seien nun $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ und $A \equiv B$. Wir wollen $A = B$ zeigen. Hierzu führen wir die Annahme $A \neq B$ zum Widerspruch und unterscheiden 3 Möglichkeiten (die anderen sind auf diese zurückführbar oder aufgrund der Voraussetzungen ausgeschlossen, wie zum Beispiel $\sigma A = \sigma B = 0$):

a) $\sigma A = 1$, $\sigma B = -1$, b) $\sigma A = 1$, $\sigma B = 0$, c) $\sigma A = \sigma B = 1$.

a) Aus $\sigma A = 1$ und $A \in \mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$ nach (2) folgt $|a| < b$ und $\psi A = b$. Aus $\sigma B = -1$ und $B \in \mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$ folgt $|d| < |c| = -c$ und $\psi B = -c$. Nach (2) ist $b = -c$. Aus $A \equiv B$ erhält man $2A \equiv A + B$ und $\psi(2A) = \psi(A+B)$ nach (2). Nun ist $\psi(2A) = 2b$, hingegen

$$\psi(A+B) = \psi[a+c, b+d] = \max\{|a+c|, |b+d|\} < 2b.$$

Dies ist ein Widerspruch.

b) $\sigma B = 0$ bedeutet $B = -B$, woraus aus $A \equiv B$ auch $-A \equiv B$ und $A \equiv -A$ folgt. Dies führt wegen $\sigma(-A) = -1$ und $\sigma A = 1$ auf Fall a).

c) $\sigma A = \sigma B = 1$ bedeutet $\psi A = b$ und $\psi B = d$. Aus $\psi A = \psi B$ und

$$\psi A = b = (b+a)/2 + (b-a)/2 = \varphi A + \lambda A/2 \qquad \text{bzw.} \qquad \psi B = \varphi B + \lambda B/2$$

folgt $\varphi A \neq \varphi B$, sonst wäre mit $\varphi A = \varphi B$ auch $\lambda A = \lambda B$ und damit $A = B$ nach (1), im Gegensatz zur Annahme $A \neq B$. Aus $A \equiv B$ folgt $A - \varphi A \equiv B - \varphi A$. Es ist $A - \varphi A$ symmetrisch, $B - \varphi A$ nicht, so daß sich nach b) ein Widerspruch ergibt, wenn $\sigma(B - \varphi A) > 0$. Andernfalls ist $\sigma(\varphi A - B) > 0$, und $A - \varphi A \equiv \varphi A - B$ ergibt den Widerspruch mit b).

3. Nachweis der subdirekten Unzerlegbarkeit

Satz 1. *Das System $\mathfrak{I}$ besitzt genau drei Kongruenzrelationen: die Allrelation $\mathbf{I}^2$, die Diagonale $\Delta_\mathbf{I}$ und die eigentliche Relation $\Delta_\mathbf{R} \cup (\mathbf{I} \setminus \mathbf{R})^2$.*

Beweis. Sei $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{I}$. Da das System der reellen Zahlen, als Ring $\mathfrak{R} = (\mathbf{R}, +, \cdot)$ aufgefaßt, genau zwei Kongruenzrelationen besitzt, $\Delta_\mathbf{R}$ und $\mathbf{R}^2$, muß die Einschränkung von $\equiv$ auf $\mathbf{R}$ eine dieser beiden Relationen sein:

a) $\equiv_\mathbf{R} = \mathbf{R}^2$. Es folgt $\equiv\, = \mathbf{I}^2$. Als Nachweis genügt es, $A \equiv 0$ für ein beliebiges Intervall A zu zeigen. Laut Voraussetzung ist $1 \equiv 0$, woraus $1A \equiv 0A$, d.h. $A \equiv 0$ folgt.

b) $\equiv_\mathbf{R} = \Delta_\mathbf{R}$. Es folgt entweder $\equiv\, = \Delta_\mathbf{I}$ oder $\equiv\, = \Delta_\mathbf{R} \cup (\mathbf{I} \setminus \mathbf{R})^2$. Nehmen wir $\equiv\, \neq \Delta_\mathbf{I}$ an, dann muß $\equiv_\mathbf{S} \neq \Delta_\mathbf{S}$ nach Lemma 3, damit $\equiv_\mathbf{S} = \mathbf{S}^2$ nach Korollar 1 und $\equiv_{\mathbf{I} \setminus \mathbf{R}} = (\mathbf{I} \setminus \mathbf{R})^2$ nach Lemma 2 sein. Es kann aber kein Intervall $A \in \mathbf{I} \setminus \mathbf{R}$ zu einem Punktintervall c kongruent sein; denn dann würde $A + 1 \equiv c + 1$ und wegen $A \equiv A + 1$ auch $c \equiv c + 1$ folgen, im Widerspruch zur Annahme b). Somit ist $\equiv$ gleich $\Delta_\mathbf{R} \cup (\mathbf{I} \setminus \mathbf{R})^2$.

Korollar 2. *Das System $\mathfrak{I}$ ist subdirekt unzerlegbar.*

Beweis. Eine universelle Algebra ist subdirekt unzerlegbar genau dann, wenn sie einelementig ist oder der zugehörige Kongruenzenverband ein Atom besitzt, das Teilmenge einer jeden von der Diagonale verschiedenen Kongruenzrelation ist, vgl. [2]. Dieses Kriterium trifft nach Satz 1 auf $\mathfrak{I}$ zu.

Unter der einpunktkompaktifizierten reellen Achse verstehen wir eine Erweiterung $\bar{\mathfrak{R}} = (\bar{\mathbf{R}}, +, \cdot)$ von $\mathfrak{R}$ mit $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ und $a + \infty = \infty$ für alle $a \in \bar{\mathbf{R}}$ und $a\infty = \infty$ für alle $a \in \bar{\mathbf{R}}$, $a \neq 0$ und $0\infty = 0$. Man erhält $\bar{\mathfrak{R}}$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{I}$ unter der Abbildung $\varepsilon: \mathbf{I} \to \bar{\mathbf{R}}$, definiert durch $\varepsilon A = (\lambda A)\infty + \varphi A$. Direkt aus Satz 1 folgt:

Korollar 3. *Das System $\mathfrak{I}$ hat bis auf Isomorphie nur drei verschiedene homomorphe Bilder: das System $\mathfrak{I}$, die triviale Algebra $(\{0\}, +, \cdot)$ und die einpunktkompaktifizierte reelle Achse $\bar{\mathfrak{R}}$.*

4. Überdeckung von $\mathfrak{I}$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$

Es ist lokal möglich, $\mathfrak{I}$ mit dem Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen und der Potenz $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in Beziehung zu bringen, und zwar wird $\mathfrak{I}$ disjunkt durch additiv-multiplikative Strukturen so überdeckt, daß jede dieser Strukturen isomorph zu $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}^2$ ist.

Eine Zerlegung in disjunkte Teilbereiche ist gegeben durch

$$\mathbf{I}' = \mathbf{I}_0 \cup \bigcup \{\mathbf{I}_{\alpha\delta} : -1 \leqq \alpha < 0,\ \delta \in \{-1, 0, 1\}\},$$

mit $\mathbf{I}_0 = \{A \in \mathbf{I} : \chi A \geqq 0\}$ und $\mathbf{I}_{\alpha\delta} = \{A \in \mathbf{I} : \chi A = \alpha,\ \sigma A = \delta\}$ für

$$-1 \leqq i < 0 \quad \text{und} \quad \delta \in \{-1, 0, 1\}.$$

(Für $A \neq 0$ sind $\sigma A = 0$ und $\chi A = -1$ gleichwertige Aussagen. Daher sind einige der $\mathbf{I}_{\alpha\delta} = \emptyset$. Das Intervall 0 wurde bei der Zerlegung von $\mathbf{I}$ nicht berücksichtigt, da es zu jeder der angegebenen Teilmengen hinzugefügt werden kann, ohne an den folgenden Überlegungen etwas zu ändern.)

Lemma 4. *Die Mengen $\mathbf{I}_{\alpha\delta}$ mit $\delta \geqq 0$ sind bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen, $\mathbf{I}_0$ ist bezüglich Multiplikation und $\mathbf{I}_{\alpha\delta}$ mit $\delta = -1$ bezüglich Addition abgeschlossen.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation folgt aus den Homomorphieeigenschaften der Funktionale χ und σ, vgl. Abschnitt 2: Ist $\chi A \geqq 0$, $\chi B \geqq 0$, dann ist $\chi(AB) = (\chi A)(\chi B) \geqq 0$. Ist $\chi A = \chi B = \alpha < 0$ und $\sigma A, \sigma B = 0$ (bzw. 1), dann ist

$$\chi(AB) = \min\{\chi A, \chi B\} = \alpha \quad \text{und} \quad \sigma(AB) = (\sigma A)(\sigma B) = 0 \quad (\text{bzw. } 1).$$

Zu zeigen bleibt die additive Abgeschlossenheit von $\mathbf{I}_{\alpha\delta}$, wobei wir o.B.d.A. $\delta \geqq 0$ annehmen. Sei $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ und $\chi A = \chi B = \alpha$. Wegen $\sigma A, \sigma B \geqq 0$ ist $b, d \neq 0$ und $\alpha = a/b = c/d$. Wegen $\sigma(A+B) = \delta$ ist $b + d \neq 0$ und $\chi(A+B) = (a+c)/(b+d)$. Hieraus erhält man mit $a = bc/d$ weiter:

$$\chi(A+B) = \frac{(bc/d) + c}{b+d} = \frac{bc + cd}{bd + dd} = \frac{c}{d}\,\frac{b+d}{b+d} = \alpha.$$

Sei $\varepsilon_0 : \mathbf{I}_0 \to \mathbf{R}^2$, definiert durch $[a, b] \mapsto (a, b)$, und $\varepsilon_{\alpha\delta} : \mathbf{I}_{\alpha\delta} \to \mathbf{R}$ für $\alpha \in [-1, 0)$ und $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, definiert durch $A \mapsto (\psi A)(\sigma' A)$. Die im folgenden Satz verwendeten Begriffe, speziell die für partielle Algebren, beziehen sich auf die Terminologie von [2]. Faßt man $\mathfrak{I}_0 = (\mathbf{I}_0, +, \cdot)$ und $\mathfrak{I}_{\alpha\delta} = (\mathbf{I}_{\alpha\delta}, +, \cdot)$ als Unteralgebren oder relative Unteralgebren von $\mathfrak{I}$ entsprechend Lemma 4 auf, erhält man (auf den einfachen Nachweis der Homomorphieeigenschaften sei verzichtet):

Satz 2. *Es ist ε_0 eine Einbettung von $\mathfrak{I}_0$ in $\mathfrak{R}^2$ und $\varepsilon_{\alpha\delta}$ eine Einbettung von $\mathfrak{I}_{\alpha\delta}$ in $\mathfrak{R}$ für $\alpha \in [-1, 0)$ und $\delta \in \{-1, 0, 1\}$.*

Bemerkung. Die angegebene Zerlegung ist nicht eindeutig. So kann $\mathbf{I}_0$ auch zerlegt werden in $\mathbf{I}_0' = \{A \in \mathbf{I}_0 : \sigma A = 1\}$ und $\mathbf{I}_0'' = \{A \in \mathbf{I}_0 : \sigma A = -1\}$. Dann ist $\mathbf{I}_0'$ abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation, $\mathbf{I}_0''$ abgeschlossen bezüglich Addition, so daß $\varepsilon_0(\mathbf{I}_0')$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}^2$ und $\varepsilon_0(\mathbf{I}_0'')$ eine relative Unteralgebra von $\mathfrak{R}^2$ bestimmt.

Literatur

[1] *G. Birkhoff*, Lattice theory, 3. Aufl., Providence 1973.
[2] *G. Grätzer*, Universal algebra, Princeton 1968.
[3] *D. Klaua*, Partielle Mengen und Zahlen, Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **11** (1969), 573—584.
[4] *D. Klaua*, Intervallstrukturen geordneter Körper, Math. Nachr. **75** (1976), 319—326.
[5] *R. E. Moore*, Interval analysis, Englewood Cliffs 1966.
[6] *H. Ratschek*, Eine Bemerkung über entropische Gruppoide, Math. Nachr. **52** (1972), 141—146.
[7] *H. Ratschek*, Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik, J. reine angew. Math. **252** (1972), 128—138.

Mathematisches Institut der Universität, Universitätsstr. 1, D-4000 Düsseldorf

Eingegangen 23. Juli 1977