Über die Grundlagen der Geometrie.

Von G. FREGE in Jena.

(Fortsetzung.)

II.

Bevor ich mich auf die Wendung einlasse, die Herr Korselt der Hilbertschen Lehre gibt, indem er sie als formale Theorie oder reinen Lehrbegriff kennzeichnet, möchte ich eine Betrachtung anstellen, deren Ergebnis für die Auffassung und Beurteilung jener Wendung wichtig ist.

Herr Korselt scheint nicht immer den Satz als das sinnlich Wahrnehmbare von dem Gedanken zu unterscheiden, der sein Sinn ist. Ich nenne Satz schlechtweg oder eigentlichen Satz eine Gruppe von Zeichen, die einen Gedanken ausdrückt; was aber nur die grammatische Form eines Satzes hat, nenne ich uneigentlichen Satz. Solche finden sich oft als Bedingungs- und Folgesätze in hypothetischen Satzgefügen. Man findet vielfach die Auffassung des hypothetischen Urteils, als ob dadurch Urteile (propositions) in Beziehung gesetzt würden. Aber dies trifft nur selten zu, auch wenn man statt „Urteil“ „Gedanke“ sagt; denn wir haben oft weder im Bedingungssatze, noch im Folgesatze einzeln einen Gedanken, sondern nur im ganzen Satzgefüge. Betrachten wir den Satz: „Wenn etwas größer als 1 ist, so ist es eine positive Zahl“! „Etwas“ und „es“ weisen hier aufeinander hin. Zerreißen wir diesen Zusammenhang, indem wir die Sätze trennen, so wird jeder von ihnen sinnlos. „Es ist eine positive Zahl“ besagt nichts. In dem Satze „Etwas ist größer als 1“ kann man zwar einen Gedanken ausgedrückt finden, nämlich daß es etwas gebe, was größer als 1 sei; aber in diesem Sinne kommt der grammatische Satz nicht als Bedingungssatz im Satzgefüge vor. Wir können jenen Gedanken auch ausdrücken, indem wir uns des Buchstaben »a« wie in der Arithmetik bedienen:

$$„\text{Wenn } a > 1, \text{ so ist } a > 0“.$$

Der Buchstabe »a« deutet hier nur an, wie vorhin die Wörter „etwas“ und „es“. Die Allgemeinheit erstreckt sich auf den Inhalt des ganzen Satzgefüges, nicht auf den des Bedingungssatzes für sich und auf den des Folgesatzes für sich. Da weder dieser noch jener einzeln einen Gedanken ausdrückt, so ist keiner von ihnen ein eigentlicher Satz. Das ganze Satzgefüge ist ein solcher; es drückt einen einzigen Gedanken aus, der nicht in Teilgedanken zerlegt werden kann. Wir können diesen Gedanken auch so ausdrücken:

„Was größer als 1 ist, ist eine positive Zahl“.

Der erste grammatische Satz nimmt eigentlich die Stelle des Subjekts ein, und der zweite enthält das zugehörige Prädikat. Auch hieraus erhellt, daß wir logisch gesprochen nur einen einzigen Satz haben. Wir haben hier nicht eine Beziehung zwischen Gedanken, sondern die Beziehung der Unterordnung des Begriffs *größer als* 1 unter den Begriff *positive Zahl.*

Den Gedanken des Satzes:

„Wenn das Quadrat von etwas 1 ist, so ist dessen vierte Potenz ebenfalls 1“

können wir auch so ausdrücken:

„Wenn $a^2 = 1$, so ist $a^4 = 1$“,

oder auch

„Was Quadratwurzel aus 1 ist, ist auch Biquadratwurzel aus 1“,

oder auch

„Jede Quadratwurzel aus 1 ist auch Biquadratwurzel aus 1“.

Und hier ist wieder die Unterordnung der Begriffe erkennbar, so daß wir auch hier nur einen einzigen Gedanken haben. Die grammatischen Teilsätze sind auch hier nur uneigentliche Sätze, ohne Gedankeninhalt. Der Buchstabe »a« in »$a^2 = 1$« weist ja hin auf »a« in »$a^4 = 1$« wie etwa im Lateinischen ein „*quot*“ in einem Vordersatze auf ein „*tot*“ im zugehörigen Nachsatze. Wie nun die Trennung dieser Sätze jeden von beiden sinnlos macht, so geht auch hier durch Zerreißung des Satzgefüges das verloren, was der Buchstabe »a« zum Gedankenausdrucke beiträgt. Er soll dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen, nicht den uneigentlichen Teilsätzen; und so kommt es, daß das ganze Satzgefüge einen wahren Gedanken ausdrückt, obwohl ein Buchstabe darin vorkommt, der nichts bezeichnet, während die uneigentlichen Teilsätze keinen Sinn haben, weil sie den Buchstaben »a« enthalten, der weder einen Sinn hat, noch auch einem dieser Teile Allgemeinheit des Inhalts verleihen soll. Sollte er dies, so drückte »$a^2 = 1$« allerdings einen Gedanken aus, wenn auch einen falschen, nämlich daß jeder Gegenstand eine Quadratwurzel aus 1 sei; aber mit diesem Sinne kommt »$a^2 = 1$« nicht als Teil im Satzgefüge vor. Wir sehen hieraus, daß ein Satz einen wahren Gedanken ausdrücken kann, obwohl er Wörter (»etwas«, »es«) oder Buchstaben enthält, die nichts bedeuten, sondern nur andeuten, wenn diese Wörter oder Buchstaben den Zweck haben, dem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, daß aber ein grammatischer Teilsatz, der solche Wörter oder Buchstaben enthält, keinen Gedanken ausdrückt, wenn die durch diese zu verleihende Allgemeinheit sich nicht auf den Teilsatz beschränken soll. Dann besagt der grammatische Teilsatz nichts, ist nur ein uneigentlicher Satz; man kann weder sagen, daß er gelte, noch daß er ungültig sei, falls man nämlich einen Satz ungültig nennt, wenn er einen falschen Gedanken ausdrückt.

In »$a^2 = 1$« ist freilich etwas Bedeutungsvolles enthalten, und dessen Bedeutung ist der Begriff *Quadratwurzel aus* 1; aber das, was diesen Begriff bezeichnet, ist nicht das ganze »$a^2 = 1$«, sondern nur das, was übrig bleibt, wenn man »a« absondert. Ähnliches gilt von »$a^4 = 1$«.

Im allgemeinen können wir sagen: der uneigentliche Bedingungs- oder Folgesatz drückt keinen Gedanken oder Sinn aus, obwohl er Teil eines Satzgefüges ist, das einen Gedanken ausdrückt, und obwohl er selbst Teile haben kann, die einen Sinn haben.

Der Gebrauch des Buchstabens »a« in diesen Fällen ist übrigens grundsätzlich derselbe wie im Satze

$$»a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)«;$$

er soll auch hier dem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen, und daß wir in jenen Fällen zwei grammatische Sätze haben, hier nur einen, ist nur ein unwesentlicher Formunterschied.

Die Einsicht in die logische Natur einer mathematischen Theorie wird oft dadurch erschwert, daß in scheinbar selbständige grammatische Sätze zerrissen wird, was sich eigentlich als einheitliches Satzgefüge darstellen sollte. Dies geschieht vielfach aus stilistischen Gründen, um ein Satzungetüm zu vermeiden; aber man darf sich dadurch die Einsicht in das Wesen der Sache nicht verbauen lassen. Man fängt z. B. so an: „Es sei a ...“, dem man freilich oft das unrichtige „Es bedeute a“ vorzieht. Solche Sätze können mit verschiedenen Buchstaben teils der Ableitung vorhergehen, teils in sie eingeschoben sein. So gelangt man endlich zu einem Ergebnisse, ausgesprochen in einem Satze, der die Buchstaben enthält, die vorher scheinbar erklärt worden sind; denn Sätze wie „Es bedeute a ...“ sehen aus wie Erklärungen, die den Buchstaben Bedeutungen verleihen sollen. Aber dieser Schein verschwindet bei näherer Prüfung. Nehmen wir ein Beispiel! Das Satzgefüge „Wenn a eine ganze Zahl ist, so ist $a \cdot (a - 1)$ eine gerade Zahl“ kann in zwei scheinbar selbständige Sätze zerlegt werden: „Es sei a eine ganze Zahl. $a \cdot (a - 1)$ ist eine gerade Zahl". Aber man kann den ersten nicht als eine Erklärung des Buchstaben »a« auffassen, sodaß dies »a« mit der so erhaltenen Bedeutung im zweiten Satze vorkäme; denn dies »a« tritt in beiden Sätzen an der Stelle eines Eigennamens auf. Wenn ihm also eine Bedeutung gegeben werden sollte, so könnte das nur die eines Eigennamens, also ein Gegenstand sein. Aber durch den Satz „a sei eine ganze Zahl" kann dies nicht geschehen; denn dieser ist kein Identitäts-, sondern ein Subsumtionssatz. Man kann auch nicht sagen, daß hierdurch dem »a« zwar keine bestimmte, aber eine unbestimmte Bedeutung gegeben werde; denn eine unbestimmte Bedeutung ist keine Bedeutung; vieldeutige Zeichen darf es nicht geben. Auch folgende Überlegung zeigt, daß man einen uneigentlichen Bedingungssatz nicht als Erklärung eines darin vorkommenden Buchstaben ansehen darf. Unser Satz läßt sich nämlich in die Form bringen: „Wenn $a \cdot (a - 1)$ keine gerade Zahl ist, so ist a keine ganze Zahl". Und wenn man hiermit wie vorhin verfährt, käme man dahin, den Satz „Es sei $a \cdot (a - 1)$ keine gerade Zahl" als eine Erklärung des Buchstaben »a« anzusehen; und diese widerspräche jener ersten. Man lasse sich also dadurch nicht täuschen, daß zuweilen aus stilistischen Gründen ein uneigentlicher Bedingungssatz in einer Form auftritt, in der er, flüchtig betrachtet, als Erklärung eines oder mehrerer Buchstaben erscheint. Aber weder diese scheinbaren Erklärungen, noch der Satz, in dem das Endergebnis ausgesprochen wird, sind eigentliche Sätze, sondern sie gehören als uneigentliche Bedingungssätze und uneigentlicher Folgesatz untrennbar zusammen, sodaß erst das aus ihnen bestehende Ganze ein eigentlicher Satz ist. Die Einsicht in den logischen Bau gewänne sehr, wenn das, was sachlich ein einziger eigentlicher Satz ist, sich auch sprachlich als einheitliches Satzgefüge darstellte und nicht in selbständige Sätze zerfiele. Freilich nähme ein solches Satzgefüge in unsern Wortsprachen manchmal eine ungeheuerliche Länge an, während die Begriffsschrift durch ihre Übersichtlichkeit zur Wiedergabe des logischen Gewebes besser befähigt ist.

Der Gebrauch der Buchstaben ist in allen diesen Fällen eigentlich derselbe, wie verschieden er auch scheinen mag. Sie sollen immer dem Ganzen Allgemeinheit des Inhalts verleihen, wenn auch dieses Ganze aus scheinbar selbständigen Sätzen besteht. Statt der Buchstaben können natürlich auch Wörter wie „etwas" „es" stehen.

Ein System von allgemeinen Lehrsätzen, die in ihren uneigentlichen Bedingungssätzen übereinstimmen, kann man eine Theorie nennen. Da man die uneigentlichen Folgesätze durch „und" zu einem einzigen verbinden kann, ist wenigstens theoretisch die Möglichkeit gegeben, die

Theorie in einen einzigen Lehrsatz zu verwandeln, der aus uneigentlichen Bedingungssätzen und einem — im allgemeinen zusammengesetzten — uneigentlichen Folgesatze besteht, und dem durch Buchstaben oder entsprechende Wörter Allgemeinheit des Inhalts verliehen ist. Die uneigentlichen Bedingungssätze nennt man wohl auch Voraussetzungen.

Nun kann man durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen übergehen. So gelangt man von dem Satze »$a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$« z. B. zu dem Satze »$5^2 - 1 = (5 - 1) \cdot (5 + 1)$« und von dem Satze

„Wenn $a^2 = 1$, so ist $a^4 = 1$"

zu dem Satze

„Wenn $1^2 = 1$, so ist $1^4 = 1$"

oder auch zu dem Satze

„Wenn $2^2 = 1$, so ist $2^4 = 1$".

Wie man sieht ist der äußere Vorgang hierbei der, daß der nur andeutende Buchstabe durch ein bedeutungsvolles Zeichen ersetzt wird. Und so ist es auch sonst: beim Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen werden die andeutenden Buchstaben oder Wörter durch bedeutungsvolle Zeichen ersetzt. Die allgemein bejahenden oder verneinenden Sätze müssen vorher in die hypothetische Form umgewandelt werden. Wir sehen nun an unserm zweiten Beispiele, daß die uneigentlichen Sätze »$a^2 = 1$« und »$a^4 = 1$« dabei die eigentlichen Sätze »$1^2 = 1$« und »$1^4 = 1$« oder auch die eigentlichen Sätze »$2^2 = 1$« und »$2^4 = 1$« ergeben. Daß letztere nicht gelten, ist eine Sache für sich. In der hypothetischen Verbindung, in der sie vorkommen, wird keiner von beiden behauptet, auch wenn das ganze Satzgefüge mit behauptender Kraft ausgesprochen wird. Wir sehen so, daß den uneigentlichen Sätzen, die Teile eines allgemeinen Lehrsatzes — einer Theorie — sind, eigentliche Sätze entsprechen, die in einem Satze vorkommen, der aus jenem durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen gewonnen ist. Wenn nun einer dieser eigentlichen Sätze, der als Bedingungssatz erscheint, schon als geltend erkannt ist, so kann man ihn weglassen. So kann man in dem Satze »Wenn $1^2 = 1$, so ist $1^4 = 1$« den Bedingungssatz, nachdem man ihn als geltend erkannt hat, weglassen, so daß man nur den Folgesatz »$1^4 = 1$« übrig behält. In Worten wird man den Übergang etwa so machen: Da nun $1^2 = 1$ ist, so ist $1^4 = 1$. Durch solche Schlüsse kann man von einem allgemeinen Lehrsatze — einer Theorie — aus zu einem besonderen Satze gelangen, der weniger Bedingungssätze enthält. Dies Verfahren nennt man wohl die Anwendung eines allgemeinen Lehrsatzes — einer Theorie — auf einen besondern Fall.

Ist nun etwa das, was Herr Korselt formale Theorie oder reinen Lehrbegriff nennt, ein allgemeiner Lehrsatz oder eine Theorie in dem Sinne, wie ich eben diese Wörter gebraucht habe? Es scheint, daß Herrn Korselt das wenigstens vorgeschwebt habe. Ich möchte annehmen, daß vieles in seinen Ausführungen klarer erscheint, wenn man beim Lesen das eben Bemerkte im Sinne behält. Er schreibt:

„Doch die moderne, immer mehr in die exakte Logik übergehende Mathematik bezeichnet mit ihren Axiomen (Grundaussagen) nicht mehr bestimmte Erfahrungstatsachen — sondern *deutet* sie höchstens *an,* wie in der Algebra ein Buchstabe eine Zahl nicht bestimmt, sondern andeutet.“

Das Wort „andeuten“ scheint Herr Korselt in dieser Verwendungsweise von mir entlehnt zu haben. Der Vergleich der Axiome mit den Buchstaben ist nicht glücklich. Denn in der reinen Arithmetik ist es gleichgültig, ob ich die Buchstaben »a« »b« »c« oder die Buchstaben »r« »s« »t« gebrauche, und jeder dieser Buchstaben gilt als einfach. Dagegen soll offenbar jedes der Hilbertschen Axiome seine Besonderheit haben, die auf seiner besondern Zusammensetzung aus einfachen auch in andern Verbindungen vorkommenden Zeichen beruht. Dagegen scheint der Vergleich eines Hilbertschen Axioms mit einem uneigentlichen Satze, wie »$a^2 = 1$« nicht unpassend zu sein. Was Herr Korselt wahrscheinlich meint, würde ich so ausdrücken:

Die neuere Mathematik — oder sagen wir einfach: Herr Hilbert — versteht unter einem Axiome nicht einen eigentlichen Satz, der einen Gedanken ausdrückt, sondern einen uneigentlichen, aus dem beim Schließen vom Allgemeinen zum Besondern verschiedene eigentliche Sätze hervorgehen können, die dann also Gedanken ausdrücken.

Mein „Gedankenausdrücken“ entspricht hierbei dem Korseltschen „bestimmte Erfahrungstatsachen bezeichnen“. Die Hilbertschen Axiome sind dann Teile eines allgemeinen Lehrsatzes, der sinnvoll ist, obwohl jene Teile es nicht sind. Und nur als Teile eines sinnvollen Ganzen sind jene Axiome berechtigt. Sie erscheinen als Bedingungssätze, wofür man auch sagen kann: Voraussetzungen, und hiermit stimmt sehr gut die Äußerung des Herrn Korselt:

„Durch das Axiom »Auf jeder Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte« ist auch nicht »der ontologische Gottesbeweis glänzend gerechtfertigt«. Denn dieser will ja eine Existenz *beweisen,* das Axiom *setzt* sie für alle oder doch einige folgende Sätze *voraus.* Überhaupt sind die »Existenzsätze« der exakten Logik und Mathematik nichts als die

Voraussetzungen für gewisse hypothetische Sätze, in deren »Behauptungen« gewisse in diesen Existenzsätzen erwähnte Begriffe nicht mehr vorkommen.“

Ohne jedes Wort zu unterschreiben, kann ich doch hierin eine Bestätigung des eben Vermuteten finden. Das Axiom setzt die Existenz für alle oder einige folgende Sätze voraus. Nun gut! es gehört also untrennbar mit diesen zusammen. Weder hat das Axiom, noch haben die folgenden Sätze für sich einen Sinn; sondern das Axiom ist uneigentlicher Bedingungssatz und jene folgenden Sätze sind uneigentliche Folgesätze, und diese uneigentlichen Sätze bilden einen oder mehrere eigentliche Sätze, deren Teile sie sind. Auch Herr Korselt spricht ja von hypothetischen Sätzen — das sind eben diese eigentlichen Sätze — und von deren Voraussetzungen und Behauptungen — das sind die uneigentlichen Bedingungs- und Folgesätze.

Eine Widerlegung meiner früheren Ausführungen kann hierin freilich nicht gefunden werden. Wenn Herr Korselt im Gebrauche der Wörter „Definition“ und „Axiom“ von mir abweicht und darauf eine Widerlegung zu gründen versucht, so widerlegt er etwas, was ich nicht gesagt habe. Man kann jeden Satz scheinbar widerlegen, wenn man sich erlaubt, die Wörter so zu verstehen, daß der Satz seine Geltung verliert.

Mein Gedankengang war folgender: Wenn es erlaubt ist, bei der Definition eines Begriffes erster Stufe die Existenz als Merkmal anzugeben, so kann dies auch bei der Definition des Begriffes *Gott*, der erster Stufe ist, geschehen, woraus dann die Existenz unmittelbar folgen würde. Nun ist das erwähnte Axiom nach Herrn Hilberts Auffassung ein Teil der Definition des Punktes, und es wird darin die Existenz als Merkmal angegeben. Hiermit wird also *das* Recht in Anspruch genommen, das in einem andern Falle den ontologischen Beweis ermöglichen würde. Ich wollte Herrn Hilbert hierdurch zum Nachdenken über das veranlassen, was er Definition nennt. Und ich vermutete, daß er seinen Gebrauch dieses Wortes als ganz verschieden von dem sonst üblichen erkennen und vielleicht in den Weg einbiegen würde, den Herr Korselt, wenn auch nicht mit klarem Bewußtsein, zu betreten scheint. Diese Klärung und Entwicklung, zu der ich den Anstoß geben wollte, ist nun freilich bei Herrn Hilbert wohl gar nicht und bei Herrn Korselt nur unvollständig erfolgt. Eine Definition im althergebrachten Sinne setzt nichts voraus, sondern setzt etwas fest. Was ich gesagt habe, bleibt bestehen, wenn man das Wort „Definition“ so versteht, wie es von alters her in der Mathematik verstanden worden ist, und wenn das Axiom, wie Herr Hilbert will, ein Teil einer

Definition ist.[1]) Nun ist ja möglicherweise bei einem andern Sinne des Wortes „Definition“ Herrn Hilberts Verfahren trotzdem gerechtfertigt; aber welcher Sinn ist dabei anzunehmen? Versuchen wir mit Hilfe der Korseltschen Aussprüche darüber ins Klare zu kommen! Zunächst ist jedenfalls das, was Herr Hilbert Definition des Punktes nennt, nicht eine Definition im alten Sinne des Wortes. Ferner besteht die Definition aus Axiomen, und diese setzen etwas voraus, sind also wohl Bedingungssätze und zwar uneigentliche Sätze. Diese enge Verbindung, in die hier die Wörter „Axiom“ und „Definition“ geraten sind, ist ihrer ursprünglichen Gebrauchsweise ganz fremd. In diesem Sinne ist dann eine Definition nichts anderes als ein Ganzes, bestehend aus mehreren durch „und“ verbundenen Axiomen, die selbst wieder uneigentliche Sätze (Bedingungssätze) sind. Dann ist kein wesentlicher Unterschied zwischen Definition und Axiom mehr vorhanden. Die Definition ist dann ebenfalls ein uneigentlicher Bedingungssatz, der aus mehreren durch „und“ verbundenen uneigentlichen Sätzen besteht. Ob mehrere von den Bedingungssätzen zu einem Ganzen erst vereinigt, und dieses dann als Bedingungssatz genommen wird, oder ob man die Bedingungssätze vereinzelt läßt, ist unwesentlich. Man sieht, daß die sogenannten Definitionen dann eigentlich überflüssig sind.

Doch forschen wir, ob sich unsere Vermutung über das Wesen des reinen Lehrbegriffes noch weiter bestätigt! Herr Korselt schreibt:

„Die »arithmetisierte«, besser gesagt: »rationalisierte« Mathematik richtet ihre Grundsätze nur so ein, daß gewisse bekannte Deutungen nicht ausgeschlossen sind.“

Die Grundsätze werden hier wieder uneigentliche Bedingungssätze des allgemeinen Lehrsatzes sein. Das Wort „Deutung“ ist zu beanstanden; denn ein Gedanke, richtig ausgedrückt, läßt für verschiedene Deutungen keinen Raum. Wir haben gesehen, daß die Vieldeutigkeit durchaus zu verwerfen ist, und wie der Schein ihrer Notwendigkeit bei mangelhafter logischer Einsicht entstehen kann. Ich erinnere nur an das, was ich über den Buchstabengebrauch oben S. 377 gesagt habe. Was Herr Korselt mit „Deutung“ meint, ist auf Grund unserer Auffassung des Korseltschen reinen Lehrbegriffes leicht zu erraten. Wenn wir durch einen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze „Wenn $a > 1$, so ist $a^2 > 1$“ zu dem besondern „Wenn $2 > 1$, so ist $2^2 > 1$“ übergehen, so entspricht der uneigentliche Satz „$a > 1$“ dem eigentlichen »$2 > 1$«. Nach Herrn Korselts Redeweise wird »$2 > 1$« oder der

1) Freilich im alten Sinne des Wortes setzt ein Grundsatz weder etwas voraus, noch etwas fest, sondern behauptet etwas. Ich nenne Grundsatz einen Satz, der ein Axiom ausdrückt.

Gedanke dieses Satzes eine Deutung von »$a > 1$« sein. Als ob der allgemeine Satz eine wächserne Nase wäre, die man bald so, bald anders drehen könnte. In Wahrheit liegt keine Deutung, sondern ein Schluß vor.[1])

In einem uneigentlichen Satze müssen Zeichen vorkommen, die nichts bezeichnen, sondern andeuten. Welche sind das in unserm Falle? Offenbar die Wörter „Punkt“, „Gerade“, „Ebene“, „liegt in“, „liegt auf“, „liegt zwischen“ usw. Diese Wörter bezeichnen also nichts in der Hilbertschen Geometrie, wenn diese nach Herrn Korselt ein reiner Lehrbegriff ist, und wenn wir den Sinn dieses Ausdruckes richtig erfaßt haben. Und wirklich sagt ja auch Herr Korselt, daß die Zeichen einer formalen Theorie überhaupt keine Bedeutung haben. Die Wörter „Punkt“, „Ebene“, usw. sollen also dazu dienen, dem Lehrsatze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen wie die Buchstaben in der Algebra. Und hiermit stimmt wieder sehr gut, was wir oben festgestellt haben, daß nämlich die Hilbertschen sogenannten Definitionen jenen Wörtern keine Bedeutungen geben. Wir sehen auch bestätigt, daß diese sogenannten Definitionen keine Definitionen sind, ebensowenig wie in dem Satze „Wenn $a > 1$ ist, so ist $a^2 > 1$“ der uneigentliche Satz „$a > 1$“ eine Definition ist. Buchstaben, die einem Satze Allgemeinheit des Inhalts verleihen sollen, werden nicht erklärt; denn sie sollen nichts bezeichnen, sondern nur andeuten. Da den Buchstaben keine Bedeutungen gegeben werden sollen, so haben Definitionen, die das als Zweck hätten, hier keine Statt. Was zuweilen so aussieht wie eine Erklärung von Buchstaben, ist in Wirklichkeit ein Bedingungssatz. So auch hier. Die Wörter „Punkt“, „Ebene“ usw. werden hier wie Buchstaben ge-

1) Bei dieser Gelegenheit mag folgender Ausspruch des Herrn Korselt beleuchtet werden:

„Sätze desselben Wortlauts sollen wenn möglich nur einmal bewiesen werden mögen sie auch in verschiedenen Gebieten auftreten.“

Als ob es verschiedene Sätze desselben Wortlauts geben dürfe! Das widerspricht dem Gebote der Eindeutigkeit, dem obersten, das von der Logik an eine Sprache oder Schrift gestellt werden muß. Wenn Sätze desselben Wortlauts sich unterscheiden, so können sie es nur im Gedankeninhalte. Wie soll es nun einen einzigen Beweis verschiedener Gedanken geben? Das sieht so aus, als ob der bloße Wortlaut ohne Gedankeninhalt zu beweisen wäre, und daß diesem Wortlaute nachträglich in verschiedenen Gebieten verschiedene Gedanken zugeteilt werden sollten. Unsinn! Ein bloßer Wortlaut ohne Gedankeninhalt kann überhaupt nicht bewiesen werden. Herrn Korselt schwebt natürlich der Fall vor, daß ein allgemeiner Satz bewiesen werden soll, aus dem dann durch Schlüsse vom Allgemeinen zum Besonderen (oder zum minder Allgemeinen) Sätze gewonnen werden, die verschiedenen Gebieten angehören. Wir sind darauf gefaßt, auch hier wieder Herrn Korselt von Deutungen reden zu hören.

braucht. Was wie eine Erklärung solcher Wörter aussieht, ist ein uneigentlicher Bedingungssatz. Als Definition aufgefaßt genügt er auch nicht den bescheidensten Anforderungen an eine solche. Da das Wort „Bedingungssatz“ vollkommen genügt, so ist nicht einzusehen, warum dafür die irreführenden Wörter „Definition“ und „Axiom“ gebraucht werden sollen, die von alters her eine andere Gebrauchsweise haben. Was Herr Hilbert Definition nennt, wird in den meisten Fällen ein uneigentlicher Bedingungssatz, ein unselbständiger Teil eines allgemeinen Lehrsatzes sein.

Bei dieser Auffassung ist es nicht nur unzweckmäßig und unbillig, von einer formalen Theorie zu fordern, daß sie ihren nach Art von Eigennamen und Begriffswörtern gebildeten Figuren eine bestimmte Bedeutung gebe; sondern es ist unsinnig, überhaupt eine Bedeutung von ihnen zu verlangen; denn sie sollen nicht bezeichnende, sondern nur andeutende Zeichen sein.

Ich fordere die Auflösbarkeit eines Systems von Grundsätzen nach den in ihnen vorkommenden Unbekannten, und zwar die eindeutige Auflösung, wenn dies System von sogenannten Grundsätzen eine Definition sein soll, die den unbekannten Zeichen Bedeutungen zuerteilt; denn dieser Zweck kann nur erreicht werden, wenn jene Forderung erfüllt ist. Aber ich verlange durchaus nicht, daß man alles definieren solle; ich verlange insbesondere nicht, daß man, um etwas zu definieren, Systeme von sogenannten Grundsätzen aufstellen solle; und ich verlange am allerwenigsten, daß man Zeichen, die wie Buchstaben nur andeutend, nicht bedeutend gebraucht werden sollen, überhaupt erkläre; denn das hieße Unsinn verlangen.

Wenn man nun durch einen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze zu einem besonderen übergeht, so entspricht jedem uneigentlichen Teilsatze des ersteren ein eigentlicher des letzteren. Diese eigentlichen Sätze können nun Grundsätze — Ausdrücke von Axiomen — im alten und eigentlichen Sinne des Wortes sein. Da nun die Axiome der Euklidischen Geometrie wahr sind, können wir sie weglassen, wo sie als Bedingungen vorkommen. Wir haben dann eine Anwendung des allgemeinen Lehrsatzes gemacht und sind so zu einem Satz der Euklidischen Geometrie gekommen. Aber auch andere Anwendungen sind möglich; Herr Korselt nennt sie fälschlicherweise Deutungen.

Wir begreifen jetzt, wie die eigentümliche Verwirrung im Gebrauche des Wortes „Axiom“ bei Herrn Hilbert entstanden ist. Diese Bezeichnung ist von den eigentlichen Sätzen auf die ihnen entsprechenden uneigentlichen übertragen worden. Durch diesen Mißbrauch und den des Wortes „Definition“ ist die Einsicht in die logische Natur der Hilbertschen Geometrie ungemein erschwert worden.

Fahren wir in der Betrachtung der Korseltschen Äußerungen fort! Wir lesen da: „So läßt sich manchmal *eine* Reihe formaler Schlüsse auf *verschiedene* Weise deuten“.

Deuten läßt sich vielleicht ein Zeichen oder eine Gruppe von Zeichen, wiewohl die Eindeutigkeit der Zeichen, an der wir unbedingt festhalten müssen, verschiedene Deutungen ausschließt. Aber ein Schluß besteht nicht aus Zeichen. Man kann nur sagen, daß sich zuweilen in dem Übergange von Zeichengruppen zu einer neuen Zeichengruppe äußerlich ein Schluß darstellt. Ein Schluß gehört gar nicht dem Gebiete der Zeichen an, sondern ist eine Urteilsfällung, die auf Grund schon früher gefällter Urteile nach logischen Gesetzen vollzogen wird. Jede der Prämissen ist ein bestimmter als wahr anerkannter Gedanke, und im Schlußurteil wird gleichfalls ein bestimmter Gedanke als wahr anerkannt. Für verschiedene Deutungen ist hier nirgends eine Statt.

Was ist ein formaler Schluß? Man kann sagen: in gewisser Hinsicht ist jeder Schluß formal, insofern er nach einem allgemeinen Schlußgesetze verläuft; in anderer Hinsicht ist jeder Schluß nicht formal, insofern sowohl die Prämissen, als auch der Schlußsatz ihre Gedankeninhalte haben, die in dieser besonderen Verknüpfungsweise eben nur in diesem Schlusse vorkommen. Aber vielleicht soll das Wort „formal“ hier anders verstanden werden. Vielleicht soll eine Reihe formaler Schlüsse gar keine eigentliche Schlußkette sein, sondern nur das Schema einer solchen. Die Deutung bestände dann darin, daß eine Schlußkette angegeben würde, die nach diesem Schema verliefe. Was kann nun ein solches Schema nützen? Vielleicht dies, daß man in einem gegebenen Falle nicht die ganze Schlußkette zu durchlaufen braucht, sondern unmittelbar von den ersten Prämissen zum letzten Schlußsatze übergehen kann. Dann aber haben wir kein bloßes Schema mehr, sondern einen allgemeinen Lehrsatz.

Nehmen wir beispielsweise das Schema:

„a ist ein b; jedes b ist ein c; folglich ist a ein c; folglich gibt es ein c“!

Selbstverständlich haben wir hierin keine Schlüsse; denn wir haben keine eigentlichen Sätze, keine Gedanken. Aber eine Schlußkette kann nach diesem Schema verlaufen und besteht dann aus zwei Schlüssen, entsprechend dem zweimaligen „folglich“. Das Schema an sich besagt nichts; aber es veranlaßt Sätze zu bilden, die etwas besagen, zunächst folgende:

„Wenn a ein b ist und wenn jedes b ein c ist, so ist a ein c“;

„Wenn a ein c ist, so gibt es ein c“.

Durch einen Schluß gewinnt man aus ihnen den allgemeinen Lehrsatz:

„Wenn a ein b ist und wenn jedes b ein c ist, so gibt es ein c“.

Statt nun in einem gegebenen Falle nach dem Schema der Schlußkette zu verfahren, kann man den allgemeinen Lehrsatz anwenden, indem man aus ihm durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besondern einen Satz ableitet, den man von den nunmehr erfüllten Bedingungen befreien kann. Das ist ja im allgemeinen der Nutzen eines Lehrsatzes, daß er das Ergebnis einer Reihe von Schlüssen zum beliebigen Gebrauche bereit aufbewahrt. Wir sind auf diesem Wege wieder zu etwas geführt worden, was Herr Korselt wohl eine formale Theorie oder einen reinen Lehrbegriff nennt.

Doch verlassen wir diese abstrakten Betrachtungen, um zu sehen, wie sich die Sache in der Hilbertschen Theorie selbst macht. Wenn, wie wir angenommen haben, die Wörter „Punkt“, „Gerade“ usw. nichts bezeichnen, sondern nur Allgemeinheit verleihen sollen wie die Buchstaben in der Arithmetik, so wird es zur Einsicht in den wahren Sachverhalt sehr nützlich sein, wirklich Buchstaben für diesen Zweck zu gebrauchen. Wir wollen demnach folgendes festsetzen. Statt „der Punkt A liegt in der Ebene α“ wollen wir sagen: „A steht in der p-Beziehung zu α“. Statt „der Punkt A liegt auf der Gerade a“ wollen wir sagen: „A steht in der q-Beziehung zu a“. Statt „A ist ein Punkt“ wollen wir sagen: „A ist ein Π“.

Das Hilbertsche Axiom I 1 spricht sich nun so aus:

„Wenn A ein Π ist und wenn B ein Π ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht.“

Hier sind zwei Allgemeinheiten zu unterscheiden. Die durch die Buchstaben »A« und »B« bewirkte beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom[1]), während die durch »Π« und »q« bewirkte sich auf einen allgemeinen Lehrsatz (reinen Lehrbegriff, formale Theorie) erstreckt, von dem dies Pseudoaxiom nur ein unselbständiger und für sich allein sinnloser Teil ist.

1) Dieser Ausdruck mag Anstoß erregen. Die Allgemeinheit kann man sagen gehört doch dem Gedankeninhalte des Satzes an, wie kann hier bei einem uneigentlichen Satze davon die Rede sein, der gar keinen Gedanken ausdrückt? Es ist so zu verstehen, daß die durch »A« und »B« bewirkte Allgemeinheit dem Inhalte jedes eigentlichen Satzes zukommen soll, der aus diesem Pseudoaxiome dadurch hervorgeht, daß man die nur andeutenden Buchstaben »Π« und »q» durch bezeichnende Zeichen ersetzt.

Das Hilbertsche Axiom I 6 (I 5)[1]) ist nun so auszusprechen:

„Wenn A von B verschieden ist, wenn A und B zu α in der p-Beziehung stehen und wenn A, B und C zu α in der q-Beziehung stehen, so steht C zu α in der p-Beziehung.“

Die durch die Buchstaben »A«, »B«, »C«, »a« und »α« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom.

Das Hilbertsche Axiom I 7 (I 6)[1]) sieht nun so aus:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas von A Verschiedenes, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht.“

Die durch die Buchstaben »A«, »α« und »β« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich auf dies Pseudoaxiom.

Wir bedürfen nun noch eines Pseudoaxioms Σ, das bei Herrn Hilbert nicht vorkommt und das wir so aussprechen:

Σ. „Wenn A zu α in der p-Beziehung steht, so ist A ein Π“.

Hier beschränkt sich die durch die Buchstaben »A« und »α« bewirkte Allgemeinheit auf dies Pseudoaxiom. Die Buchstaben »Π«, »p« und »q« bedeuten weder etwas, noch sollen sie den einzelnen Pseudoaxiomen Allgemeinheit des Inhalts verleihen; daher drücken diese keine Gedanken aus, sondern sind für sich allein sinnlos. Darum füge ich das „Pseudo“ hinzu. Denn in den eigentlichen Grundsätzen muß man Gedanken haben. Die Buchstaben »Π«, »p« und »q« sollen zwar auch eine Allgemeinheit bewirken; aber diese soll sich auf einen Lehrsatz erstrecken, von dem die Pseudoaxiome uneigentliche Bedingungssätze sind.

Ein Vorteil, scheint mir, springt bei dieser Weise, die Hilbertschen Pseudoaxiome wiederzugeben, sofort in die Augen, nämlich daß niemand sich einbilden wird, er verstehe ein solches Pseudoaxiom, er finde in ihm einen Gedanken ausgedrückt, während doch in Wahrheit nichts Wesentliches geändert ist dadurch, daß man statt der Ausdrücke „Punkt“, „liegen in“, „liegen auf“ Buchstaben gebraucht, sofern wenigstens diese Ausdrücke nichts bedeuten, sondern wie die Buchstaben einem reinen Lehrbegriffe, um mit Herrn Korselt zu reden, Allgemeinheit verleihen sollen.[2]) Wenn nun diese Pseudoaxiome in der Hilbertschen Fassung den Eindruck des Sinnvollen machen, so liegt das offenbar daran, daß wir von der Euklidischen Geometrie her

---

1) Das Eingeklammerte bezieht sich auf die erste Auflage.

2) Aber auch dann, wenn die Hilbertschen Axiome den Wörtern „Punkt“ usw. Bedeutungen verleihen sollten, wäre nichts Wesentliches geändert; denn dieselben Bedeutungen würden nun den Buchstaben »Π« usw. verliehen. Erhalten diese Buchstaben dadurch keine Bedeutungen, so auch nicht jene Wörter.

gewohnt sind, mit jenen Wörtern „Punkt", „liegen in" usw. einen Sinn zu verbinden, und daß wir dies nicht, wie wir müßten, vergessen, wenn wir uns mit den Hilbertschen Grundlagen beschäftigen. In der Tat müssen wir uns hierbei auf den Standpunkt von Leuten stellen, die nie etwas von Punkten, Ebenen usw. gehört haben; und das gelingt uns schlecht. Viel besser gelingt es uns mit Zeichen, mit denen wir in der Tat noch keinen Sinn verbunden haben. Sachlich aber ist es einerlei.

Daraus, daß die Pseudoaxiome nicht Gedanken ausdrücken, folgt ferner, daß sie nicht Prämissen einer Schlußkette sein können. Eigentlich wird man ja überhaupt nicht Sätze — Gruppen von hörbaren oder sichtbaren Zeichen — Prämissen nennen können, sondern nur die in ihnen ausgedrückten Gedanken. In den Pseudoaxiomen haben wir nun gar keine Gedanken, also auch keine Prämissen. Wenn also Herr Hilbert scheinbar doch seine Axiome als Prämissen von Schlüssen benutzt, wenn er scheinbar Beweise auf sie gründet, so können das eben nur Scheinschlüsse, Scheinbeweise sein.

Nun mag man etwa folgende Auffassung versuchen. Die Schlüsse können rein formal ausgeführt werden so, als ob die Buchstaben »Π«, »p«, »q« bedeutungsvoll wären; denn was sie etwa bedeuten, ist ja für die Richtigkeit des Schlusses einerlei. Setzt man nun für diese Buchstaben bedeutungsvolle Zeichen der Art ein, daß aus den Pseudoaxiomen dadurch wahre Sätze hervorgehen, so wird auch aus dem sogenannten Schlußsatze ein wahrer Satz hervorgehen.

Führen wir das einmal beispielsweise durch! Zunächst gewinnen wir aus unsern Pseudoaxiomen I 1 und Σ den uneigentlichen Satz:

„Wenn sowohl A, als auch B zu α in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht". **A**

Ferner gewinnen wir aus I 6, indem wir es mit sich selbst verbinden, den uneigentlichen Satz:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn A, B und C zu a in der q-Beziehung stehen, so steht C sowohl zu α, als zu β in der p-Beziehung". **B**

Hieraus leiten wir weiter den uneigentlichen Satz ab:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn es etwas gibt, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht". **Γ**

Hieraus und aus dem eben gefundenen $\varDelta$ erhalten wir den uneigentlichen Satz:

„Wenn A von B verschieden ist und sowohl A, als auch B sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht" $\varDelta$

Hieraus leiten wir weiter den uneigentlichen Satz ab:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, und wenn es etwas von A Verschiedenes gibt, das sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht". E

Verbinden wir nun hiermit unser Pseudoaxiom I 7, so erhalten wir:

„Wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht". Z

Und weiter gewinnen wir hieraus den uneigentlichen Satz:

„Wenn es etwas gibt, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht". H

Bei Herrn Hilbert finden wir dafür den Wortlaut:

„Zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein".

Ohne uns darüber aufzuregen, daß unser eigner Wortlaut bedeutend länger als der Hilbertsche ist, fragen wir: ist das, was wir soeben hergestellt haben, wirklich eine Schlußkette? Offenbar nicht; denn die Glieder sind nur uneigentliche Sätze, ebenso wie der Schlußsatz. Keiner von allen enthält einen Gedanken. Aber ebensowenig hätten die Sätze einen Sinn, die man erhielte, wenn man statt unserer Buchstaben die Hilbertschen Wörter „Punkt", „liegen in" usw. gebrauchen wollte, vorausgesetzt, daß diese Wörter ebensowenig einen Sinn haben sollen wie unsere Buchstaben. Was sollen aber alle diese Scheinschlüsse, was soll diese ganze Bewegung durch uneigentliche Sätze, wenn der zuletzt gewonnene Satz ebenso wie die vorhergehenden sinnlos ist? Nun, erinnern wir uns, daß uneigentliche Sätze zwar einzeln keine Gedanken ausdrücken, daß sie aber Teile eines sinnvollen Ganzen sein können. Wir dürfen unsre Pseudoaxiome nicht als selbständige Sätze behandeln, die wahre Gedanken enthalten und so als Grundsteine unsres logischen Aufbaues dienen können, sondern wir müssen sie als uneigentliche Bedingungssätze mitführen. Statt unsres uneigentlichen Satzes A haben wir nun zu schreiben:

Falls allgemein hinsichtlich A und α gilt

wenn A zu α in der p-Beziehung steht, so ist A ein Π,

und falls allgemein hinsichtlich A und B gilt

wenn A ein Π ist und wenn B ein Π ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht,

so gilt allgemein hinsichtlich A, B und α

wenn sowohl A, als auch B zu α in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht.

Hierin haben wir einen Satz, der einen Gedanken ausdrückt; aber wir haben auch nur einen einzigen Gedanken darin; die Teile, die sich grammatisch als Sätze darstellen, sind nur uneigentliche Sätze. Die Buchstaben »Π«, »p«, »q« verleihen dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts, während die durch die Buchstaben »A«, »B«, »α« bewirkte Allgemeinheit sich immer auf einen der drei uneigentlichen Teilsätze bezieht, die eingerückt sind.[1]) Hieraus wird sich klar erkennen lassen, wie die uneigentlichen Teilsätze, obwohl vereinzelt sinnlos, doch einen Satz bilden können, der einen Gedanken ausdrückt.

Ebenso wird man die übrigen uneigentlichen Sätze, die in unsrer Scheinschlußkette vorkommen, durch unsre Pseudoaxiome als Bedingungssätze ergänzen müssen, um eigentliche Sätze zu erhalten. Aus unsrer Scheinschlußkette erhalten wir eine wirkliche. Dann erst haben wir eigentliche Prämissen und eigentliche Schlußsätze. So wird dann schließlich auch unser uneigentlicher Endsatz H durch unsre vier Pseudoaxiome ergänzt werden müssen, die dabei als uneigentliche Bedingungssätze auftreten werden. Und so werden wir denn auch einen Endsatz erhalten, der wirklich einen Gedanken enthält. Freilich wird dieser Endsatz recht umfangreich; aber erst durch diese Ergänzung gewinnt man die volle Einsicht in den logischen Zusammenhang. Wir wollen uns deshalb die Mühe nicht verdrießen lassen, diesen Satz aufzustellen. Manche Unklarheiten in der Mathematik scheinen ja durch unnötige Sparsamkeit mit Druckerschwärze und durch eine falsche Eleganz verschuldet zu werden. Der Grundsatz, mit möglichst geringen Mitteln möglichst viel zu erreichen, ist ja, richtig verstanden, gewiß zu billigen; nur sind die Mittel nicht nach dem Verbrauch von Druckerschwärze abzuschätzen. Statt unseres früheren uneigentlichen Satzes H erhalten wir nun folgenden Schlußsatz:

---

1) Vgl. Anm. auf Seite 388.

Falls allgemein hinsichtlich A und α gilt

wenn A zu α in der p-Beziehung steht, so ist A ein Π,

und falls allgemein hinsichtlich A und B gilt

wenn A ein Π ist und wenn B ein Π ist, so gibt es etwas, zu dem sowohl A, als auch B in der q-Beziehung steht,

falls auch allgemein hinsichtlich A, B, C, a und α gilt

wenn A von B verschieden ist, wenn A und B zu α in der p-Beziehung stehen und wenn A, B und C zu a in der q-Beziehung stehen, so steht C zu α in der p-Beziehung,

falls auch allgemein hinsichtlich A, α und β gilt

wenn A sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es etwas von A Verschiedenes, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht,

so gilt allgemein hinsichtlich α und β

wenn es etwas gibt, was sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht, so gibt es einen Gegenstand der Art, daß was zu ihm in der q-Beziehung steht, sowohl zu α, als auch zu β in der p-Beziehung steht.

Die eingerückten uneigentlichen Sätze sind teils unsere Pseudoaxiome, teils unser früherer uneigentlicher Schlußsatz, die, wie wir sehen, nur unselbständige Teile des eigentlichen Schlußsatzes sind, der allein einen Gedanken ausdrückt. Die durch die Buchstaben »A«, »B«, »C«, »a«, »α« und »β« bewirkte Allgemeinheit beschränkt sich jedes Mal auf den eingerückten uneigentlichen Teilsatz, in dem sie vorkommen, während die durch »Π«, »p«, »q» bewirkte Allgemeinheit sich auf den ganzen Satz erstreckt. Wir sehen nun, was eigentlich bewiesen worden ist. Dies ist aus dem Schlußsatze des Herrn Hilbert

„Zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Gerade gemein"

nicht zu erkennen; denn hier ist so gut wie alles unbekannt, wenn wir die Wörter nicht im Euklidischen Sinne verstehen sollen.

Fahren wir fort, die Ausführungen des Herrn Korselt darauf hin zu prüfen, wie sie mit unserer Auffassung seiner formalen Theorie übereinstimmen. Wir lesen nun auf S. 403:

„Man muß nun solche formale Theorien (»reine Lehrbegriffe«) unterscheiden, die sich auf anderweitige Erlebnisse beziehen lassen und solche, von denen bisher eine derartige Zuordnung nicht bekannt ist."

Was Herr Korselt hier „beziehen auf anderweitige Erlebnisse" und „Zuordnung" nennt, ist offenbar dasselbe, was er vorher „deuten", „Deutung" genannt hat, und es ist nichts anderes, als ein Schließen vom Allgemeinen aufs Besondere. Wenn es also möglich ist, durch einen solchen Schluß von dem allgemeinen Lehrsatze zu einem besonderen der Art zu gelangen, daß in ihm die Bedingungssätze, die den uneigentlichen Bedingungssätzen des allgemeinen Satzes entsprechen, eigentliche, und zwar geltende Sätze sind, so wird Herr Korselt sagen, daß die formale Theorie (unser allgemeiner Lehrsatz) sich auf anderweitige Erlebnisse beziehen lasse, daß er sich anderweitigen Erlebnissen zuordnen lasse, und dies ist wohl auch die Gegenständlichkeit, von der er im Folgenden spricht:

„Die »Gegenständlichkeit« und umsomehr die Widerspruchslosigkeit eines reinen Lehrbegriffes wird immer und notwendig durch Darbietung von Gegenständen nachgewiesen, auf welche die Grundaussagen passen.“

Man wird dies nun ungefähr verstehen können. Es sei z. B. der allgemeine Lehrsatz (die formale Theorie, der Lehrbegriff) folgender:

„Wenn a eine Quadratwurzel aus 1 ist, so ist a eine Biquadratwurzel aus 1.“

Durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen leiten wir aus ihm folgenden ab:

„Wenn 1 eine Quadratwurzel aus 1 ist, so ist 1 eine Biquadratwurzel aus 1.“

Und hier ist nun nach Herrn Korselts Redeweise ein Gegenstand, nämlich 1 dargeboten, auf den die Grundaussage paßt, da ja 1 eine Quadratwurzel aus 1 ist. Und damit ist, um mit Herrn Korselt zu reden, die Gegenständlichkeit und umsomehr die Widerspruchslosigkeit unseres reinen Lehrbegriffes nachgewiesen. In dem vorhin betrachteten Beispiele aus der Hilbertschen Geometrie ist die Sache freilich nicht ganz so einfach, indem nicht nur ein einziger uneigentlicher Bedingungssatz, sondern mehrere vorkommen, indem auch nicht nur ein einziger Buchstabe, sondern drei (»Π«, »p«, »q«) erscheinen. Ferner haben wir den Unterschied, daß diese Buchstaben nicht Gegenstände andeuten, oder wie man auch sagen kann, Eigennamen vertreten, sondern teils Begriffe, teils Beziehungen. Gegenstände können hier also nicht dargeboten werden, sondern ein Begriff und Beziehungen, weil auf Gegenstände die sogenannten Grundaussagen nicht passen können. Es ist aber ein Schluß vom Allgemeinen zum Besonderen in der Weise möglich, daß an die Stelle von »Π«, »Punkt«, an die Stelle von »steht in der p Beziehung zu«, »liegt in der Ebene«, an die Stelle von »steht in der q-Beziehung zu«, »liegt auf der Gerade« tritt, wobei diese Ausdrücke im Euklidischen Sinne zu verstehen sind. Aus unsern Pseudoaxiomen erhalten wir dann eigentliche Grundsätze, die Axiome ausdrücken; und dies ist die Darbietung eines Begriffs und von Beziehungen, durch die, um mit Herrn Korselt zu reden, die Gegenständlichkeit[1]) unseres reinen Lehrbegriffes (allgemeinen Lehrsatzes) nachgewiesen wird. Hierbei ist aber zu betonen, daß unser Lehrsatz bewiesen und und also wahr ist ganz unabhängig von dem Nachweise dieser sogenannten Gegenständlichkeit. Es ist also ganz richtig, was Herr Korselt sagt, man dürfe von einem reinen Lehrbegriffe nicht von vornherein Gegenständlichkeit verlangen. Auch folgender Ausspruch trifft ungefähr das Richtige, wenn auch dabei, wie es scheint, eine Verwechslung untergelaufen ist, auf die später zurückzukommen sein wird:

„Mag man ihn (den reinen Lehrbegriff) denn auch »leeres Zeichenspiel, nichts bedeutend« und dergleichen nennen, als streng gesetzlicher Zusammenhang von Sätzen hat er keine besondere »Würde« mehr nötig."

In der Tat: mehr Würde, als ihm dadurch zukommt, daß er einen wahren Gedanken ausdrückt, hat ein allgemeiner Lehrsatz nicht nötig. Das Einzige, woran ich hierin Anstoß nehme, ist der Ausdruck „von Sätzen". Unter einem eigentlichen Satze verstehe ich den Ausdruck eines Gedanken, also etwas Sinnliches, eine Folge von Worten, die gehört, oder eine Gruppe von Zeichen, die gesehen werden können. Auch von den uneigentlichen Sätzen gilt dies Letzte. Ein Zusammenhang von eigentlichen oder uneigentlichen Sätzen wird einer Grammatik angehören. Herr Korselt unterscheidet nicht streng zwischen dem Äußern, dem Sinnlichen und dem Gedankeninhalte. Hier wird er einen Zusammenhang der Gedanken meinen; aber auch darum kann es sich hier nicht handeln, weil wir hier uneigentliche Sätze haben, von denen keiner einen Sinn hat. Das hier Gemeinte bedarf also noch eines genaueren Ausdrucks, wobei freilich eine Neuprägung erforderlich wäre.

Sonst aber bin ich einverstanden, insbesondere auch damit, daß die Gegenständlichkeit in dem vorhin angegebenen Sinne nicht nötig ist, um dem Satze einen Gedankeninhalt zu sichern. Anders läge die Sache freilich, wenn die Wörter „Punkt", „liegen in" usw. nicht andeutend gebraucht werden sollen wie Buchstaben, um einem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen, sondern als bedeutungsvolle Begriffs- und Beziehungswörter. Dann muß natürlich ein Begriff da sein, der mit dem Worte „Punkt" und eine Beziehung, die mit dem Ausdruck „liegt in" bezeichnet wird.

Aber ein Mißverständnis scheint mir hier vorzuliegen. Der Vorwurf, ein leeres Zeichenspiel zu sein, kann man mit Recht gewissen formalen Theorien machen, die aber ganz verschieden sind von all-

1) Allerdings paßt dies Wort in diesem Falle nicht ganz.

gemeinen Lehrsätzen der hier betrachteten Art. Denn in einem solchen haben wir immer einen Sinn. Jene andern formalen Theorien jedoch verfahren nach der Methode des Dr. Eisenbart. Da der Sinn zuweilen Schwierigkeiten macht, treibt man ihn kurz entschlossen ganz aus und behält dann natürlich die entseelten Zeichen zurück. Der Urheber einer solchen Theorie will mit seinen Zeichen keine Gedanken ausdrücken, sondern nur nach gewissen Regeln spielen. Also kann es sich dabei garnicht um Wahrheit handeln. Das Wort „Theorie" ist dabei eigentlich unpassend; man sollte „Spiel" sagen. So wäre es wenigstens bei folgerechter Durchführung; aber daran fehlt es immer; man will den Pelz waschen, ohne ihn naß zu machen. Man entleert die Zeichen, um unbequemen Fragen zu entgehen; aber die Zeichen dann auch wirklich als leer anzuerkennen, sträubt man sich. So verstrickt man sich in eine Wildnis von Widersprüchen. Was wir bisher formale Theorie genannt haben, ist etwas ganz anderes. Zwar benutzen wir auch Zeichen, die keine Bedeutung haben; aber diese tragen zum Gedankenausdrucke in bekannter Weise bei. Mit lauter Buchstaben ohne bedeutungsvolle Zeichen einen Gedanken auszudrücken, ist unmöglich. In jenen zu verwerfenden sogenannten formalen Theorien sind Zeichen wie »$\frac{1}{2}$«, »$\sqrt[3]{5}$« weder wie sonst bedeutungsvolle Eigennamen, noch dienen sie wie die Buchstaben dazu, einem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen; sie sind nicht Mittel der Erkenntnis und der Mitteilung, sondern Gegenstände, mit denen nach gewissen Regeln gespielt wird. Herr Korselt vermischt diese ganz verschiedenen Fälle, weil er keinen von beiden in seiner Eigentümlichkeit scharf erfaßt hat. Er findet in einer Stellung von Schachfiguren einen Gedanken ausgedrückt. Vielleicht hat er ein geistiges Organ für die Erfassung von Gedanken, das mir abgeht. Tut sich da eine ganz neue Gedankenwelt vor uns auf? Sehr interessant! doch kann ich einige Zweifel nicht unterdrücken. Wenn Herr Korselt meint, daß eine Stellung von Schachfiguren einen Gedanken ausdrückt nur wegen der Regeln des Schachspiels, so zweifle ich daran und werde solange daran zweifeln, bis man mir diesen Gedanken in deutscher Sprache ausgedrückt vorlegt und zeigt, wie vermöge der Regeln des Schachspiels dieser Gedanke durch jene Stellung ausgedrückt wird. Regeln aufstellen für die Handhabung von Spielfiguren und die Bedeutung eines Zeichens festsetzen sind doch auf den ersten Blick ganz verschiedene Sachen. Wenn nun jemand meint, daß unter Umständen mit jenem dieses verbunden sein könne, so hat er das zu begründen. Bis jetzt ist aber, soviel ich weiß, nicht einmal ein Versuch dazu gemacht worden.

Wenn ein Axiom ein bis dahin unbekanntes Zeichen enthält, so ist es nach Herrn Korselt eine Regel über den Gebrauch dieses Zeichens. Wenn man sich über die Bedeutung eines Zeichens nicht einigen könne, müsse sich der eine oder andere mehr Sätze über das Zeichen oder mit dem Zeichen aneignen. Hieraus schließt Herr Korselt: »„Das Zeichen hat keine Bedeutung« wird also heißen: »Uns sind keine Sätze bekannt, die den Gebrauch dieses Zeichens überhaupt oder in einem gegebenen Gebiete regeln«". Wie dieser Schluß zustande kommt, weiß ich nicht, da im Vorhergehenden nirgends von der Regelung des Gebrauchs eines Zeichens die Rede gewesen ist. Doch soviel ist zu erkennen, daß eine solche Regelung auf eine freilich rätselhafte Weise dem Zeichen eine Bedeutung geben soll. Nehmen wir ein Beispiel! Das Axiom „Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah" regelt den Gebrauch der Wörter „Anej" „bazen" und „Ellah". Sollten wir uns trotzdem über die Bedeutung des Wortes „Anej" nicht einigen können, so wäre das ein Zeichen dafür, daß einer von uns sich noch mehr Sätze über das Wort „Anej" oder mit diesem Worte zu eigen machen müßte. Ich wäre in diesem Falle gerne bereit, noch mehr Sätze mit dem Worte „Anej" zur Verfügung zu stellen, wenn es sein muß, auch Sätze über dieses Wort.

Die Regel „Jedes Anej bazet wenigstens zwei Ellah" verdient von allen modernen Mathematikern aufs gewissenhafteste befolgt zu werden. Doch hier vernehme ich eine Stimme aus der Unterwelt: „Wie kann das eine Regel sein! In einer Regel muß doch etwas geboten, verboten oder erlaubt werden. Ich erwarte da Imperative oder Verba wie »müssen« »sollen« »dürfen« »verboten sein« usw. Nichts der Art finde ich in dieser sogenannten Regel. Es scheint doch von einem Begriffe die Rede zu sein, der mit dem Worte »Anej« bezeichnet werde. Wenn aber in diesem eigentümlichen satzartigen Gebilde eine Regel über den Gebrauch des Wortes »Anej« gefunden werden soll, so ist eben von diesem Worte selbst die Rede. Grundsätze und Lehrsätze sind Sätze mit dem Zeichen, Regeln sind Sätze über das Zeichen".

Woher wissen Sie denn, Verehrtester, möchte ich darauf antworten, daß das Wort „Regel" hier in dem Ihnen geläufigen Sinne gebraucht wird? Und wenn auch, so ist es doch ganz verständlich, daß in einem Wurstgemenge, wie wir es hier vor uns haben, die Eigenart eines einzelnen Bestandteils nicht mehr deutlich erkennbar ist.

Manchmal macht sich Herr Korselt unnötige Mühe, z. B. mit dem Anwendungsgebiet der Axiome. Wenn ein Axiom eine Regel ist über den Gebrauch der in ihm vorkommenden unbekannten Zeichen, so bilden diese natürlich das Anwendungsgebiet der Regel, also des Axioms, und so ist diese Frage auf das einfachste beantwortet.

Ungültige Axiome, die Herr Korselt annimmt, kann es nicht geben, wenn man „Axiom" im Euklidischen Sinne gebraucht. Aber hier ist ein ungültiges Axiom, das unbekannte Zeichen enthält, eine ungültige Regel über den Gebrauch dieser Zeichen. Es wäre ungehörig, zu fragen, zu welchem Zwecke eine solche Regel dienen könnte.

Hiermit will ich diese sogenannten Regeln und was damit zusammenhängt abgetan sein lassen. Streicht man dies aus den Korseltschen Ausführungen, so befreit man sie von Unklarheiten.

Was nun die Widerspruchslosigkeit und desgleichen die Unabhängigkeit betrifft, so sollen sie nach Herrn Hilberts Meinung von den Axiomen bewiesen werden. Hier entsteht nun die Frage: sind seine Pseudoaxiome oder die Axiome im alten Euklidischen Sinne gemeint?

Herr Korselt schreibt: „Es ist gleichgültig, ob man die Axiome oder die Merkmale der eingeführten Begriffe widerspruchslos nennt. Ersteres entspricht mehr dem Sprachgebrauche, nach dem zwei Sätze voneinander »unabhängig« heißen, wenn sie unter gewissen Umständen beide, unter andern Umständen nicht beide bestehen, während sie »unverträglich« sind, wenn sie unter keiner Bedingung beide erfüllt sind".

Was heißt das, „der Satz besteht"? Doch wohl: Der Satz drückt einen wahren Gedanken aus. Nun drückt ein eigentlicher Satz einen Gedanken aus. Dieser ist entweder wahr, oder falsch: *tertium non datur.*[1]) Daß also ein eigentlicher Satz unter gewissen Umständen bestände, unter andern nicht, könnte nur vorkommen, wenn ein Satz unter gewissen Umständen einen Gedanken ausdrücken könnte, unter andern Umständen einen andern. Dies widerspräche aber der Forderung der Eindeutigkeit der Zeichen, an der wir unter allen Umständen festhalten müssen, wie oben ausführlich begründet worden ist. Ein uneigentlicher Satz drückt überhaupt keinen Gedanken aus; folglich kann man von ihm auch nicht sagen, er bestehe. Daß also ein Satz unter Umständen bestehe, unter andern Umständen nicht bestehe, darf also überhaupt nicht vorkommen, weder wenn er ein eigentlicher, noch wenn er ein uneigentlicher ist.[2]) Und doch kann man sich denken,

1) Wir befinden uns hier nämlich in der Wissenschaft. In Sage und Dichtung freilich können Gedanken vorkommen, die weder wahr noch falsch sind, sondern eben Dichtung.

2) Auch wenn Herr Korselt sagt: „Andrerseits darf aber eine formale Theorie auf ein gegebenes Gebiet nur angewandt werden, wenn man sich der Geltung der Grundsätze für das Gebiet versichert hat", scheint er zu meinen, daß ein und derselbe Satz auf einem Gebiete gelten, auf einem andern nicht

was Herr Korselt meint. Es kann sich nur um uneigentliche Sätze handeln; und da wird Herr Korselt wieder mit seinen Deutungen kommen. Er deutet einen Satz so; dann besteht er; er deutet ihn anders; dann besteht er nicht. Er dreht die wächserne Nase rechts; er dreht sie links, ganz nach Belieben. Nehmen wir z. B. den Satz: „Auf einer Geraden gibt es wenigstens zwei Punkte"! Nun deuten wir das Wort „Punkt" als Fuß, das Wort „Gerade" als Wurm, und die Worte „es gibt auf" deuten wir als hat. So deuten wir unsern Satz so: Ein Wurm hat wenigstens zwei Füße. Fast ebenso leicht, wie wir hier etwas Falsches erhalten haben, können wir durch andere Deutungen etwas Wahres aus dem Satze gewinnen. Nun sehen wir, wie Recht Herr Korselt hat, wenn er meint, ein Satz könne unter Umständen bestehen, unter Umständen nicht; es kommt eben ganz auf die Deutung an. Doch kehren wir zum Ernste zurück! Ein Satz, der nur unter Umständen gilt, ist kein eigentlicher Satz. Wir können aber die Umstände, unter denen er gilt, in Bedingungssätzen aussprechen und als solche dem Satze anfügen. Der so ergänzte Satz gilt nun nicht mehr nur unter Umständen, sondern schlechthin. Der ursprüngliche Satz erscheint in diesem als Folgesatz, und zwar als uneigentlicher. Nun, wie wir auch die Sache betrachten mögen, das Ergebnis ist dasselbe. Wenn wir meinen, ein Satz könne unter gewissen Umständen gelten, unter andern nicht, so lassen wir uns durch selbstgetroffene Ungenauigkeiten des Ausdrucks an der Nase herumführen.

Herr Korselt sagt an der angeführten Stelle: „Es ist gleichgültig, ob man die Axiome oder die Merkmale der eingeführten Begriffe widerspruchslos nennt."

Nun ja, gleichgültig für den, der auf Genauigkeit des Ausdrucks nichts gibt, dem nichts daran gelegen ist, eine tiefere Einsicht in den Sachverhalt zu gewinnen. Axiome sind doch nicht Merkmale von Begriffen. Von vornherein ist also die Widerspruchsfreiheit der Axiome zu unterscheiden von der Widerspruchsfreiheit der eingeführten Begriffe. Wer nun behauptet, daß kein Unterschied bestehe, hat das zu beweisen. Die bloße Behauptung des Herrn Korselt genügt nicht, um diese Einerleiheit zu einem gesicherten Besitze der Wissenschaft zu machen. Zunächst sind »4^2« und »2^4« zu unterscheiden, und erst, nachdem das Zusammenfallen der Bedeutungen bewiesen ist, dürfen sie mit einander vertauscht werden.

---

gelten könne. Genauer ist das, was Herr Korselt meint, so auszudrücken: „Wenn man durch einen Schluß vom Allgemeinen zum Besondern aus dem allgemeinen Satze einen besondern gewonnen hat, darf man in diesem die Bedingungsätze nur dann weglassen, wenn sie gelten".

Herr Korselt fährt fort: „Ersteres entspricht mehr dem Sprachgebrauche, nach welchem zwei Sätze von einander »unabhängig« heißen, wenn sie unter gewissen Umständen beide, unter anderen Umständen nicht beide bestehen“.

Wirklich? Ist so der Sprachgebrauch? In dem Satzgefüge: „Wenn $a > 1$ ist, so ist $a > 0$“, haben wir zwei uneigentliche Sätze »$a > 1$« und »$a > 0$«. Heißen diese nach dem Sprachgebrauche voneinander unabhängig? Und doch haben wir nach der Korseltschen, freilich zu verwerfenden Redeweise Umstände, unter denen sie beide bestehen ($2 > 1$ und $2 > 0$, $3 > 1$ und $3 > 0$), und andere Umstände, unter denen sie nicht beide bestehen ($1 > 1$ und $1 > 0$, $0 > 1$ und $0 > 0$). Das kann man vielleicht zugeben, daß nach dem Sprachgebrauche »$a > 1$« unabhängig heißt von »$a > 0$«. Aber für den, der sich nicht durch Worte täuschen, sondern der Sache auf den Grund gehen will, kann der Sprachgebrauch nichts entscheiden. Es fragt sich immer wieder: ist der Sprachgebrauch der Sache angemessen?

Aus verschiedenen Gründen also wird man der Korseltschen Erklärung der Unabhängigkeit von Sätzen nicht zustimmen können. Aber soviel ist zu erkennen, daß es sich dabei nur um uneigentliche Sätze handeln soll. Nach Herrn Korselts Meinung wird also die Frage nach der Unabhängigkeit nicht die Axiome im Euklidischen Sinne sondern die Pseudoaxiome des Herrn Hilbert betreffen. Und darin hat er wahrscheinlich recht, da die eigentlichen Axiome in Herrn Hilberts Darstellung wohl überhaupt keine Stelle haben.

Wovon ist denn nun in Wahrheit die Rede, wenn man z. B. die Sätze »$a > 0$« und »$a < 1$« voneinander unabhängig nennt? Sind es die Gruppen von Zeichen, einerlei ob diese Zeichen einen Sinn haben oder nicht? Doch wohl nicht! Andererseits: einen Sinn hat weder die Zeichengruppe »$a > 0$« noch »$a < 1$«. Und doch ist »$a > 0$« nicht von jedem Sinne ganz entfernt, indem es einem größeren Ganzen angehören kann, das einen Gedanken ausdrückt, und indem es selbst einen bedeutungsvollen Teil enthält. Der größte noch bedeutungsvolle Teil von »$a > 0$« ist der prädikative und seine Bedeutung ist der Begriff der positiven Zahl. Ebenso ist die Bedeutung des größten noch bedeutungsvollen Teils von »$a < 1$« der Begriff der Zahl, die kleiner als 1 ist. Es ist nun zu vermuten, daß von diesen Begriffen in Wahrheit etwas ausgesagt wird, wenn man scheinbar von den Sätzen behauptet, daß sie voneinander unabhängig seien. Und in der Tat: man meint eigentlich, daß weder jener Begriff diesem, noch dieser jenem untergeordnet sei. Man kann es auch so ausdrücken: „Einige positive Zahlen sind nicht kleiner als 1 und einige Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind nicht positiv“. Hieraus ist deutlich zu erkennen, daß es sich um Beziehungen zwischen Begriffen handelt.

Ein Satz, in dem nach Herrn Korselts freilich ungenauer Redeweise ein Satz als abhängig von andern hingestellt wird, besteht aus einem uneigentlichen Folgesatze und einem oder mehreren uneigentlichen Bedingungssätzen. Sie sind uneigentliche Sätze, weil in ihnen Bestandteile vorkommen, die nichts bezeichnen, sondern nur andeuten, um dem ganzen Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. Dieser Satz wird, sofern er gilt, nach Herrn Korselt reiner Lehrbegriff oder formale Theorie zu nennen sein. Wenn der Satz aber nicht gilt, also Unabhängigkeit statt Abhängigkeit besteht, ist der Gedanke des ganzen Satzes zu verneinen. Ein Satz demnach, in dem eine Unabhängigkeit dieser Art behauptet wird, verneint die Geltung eines solchen allgemeinen Satzes. Durch einen solchen werden nun nicht die uneigentlichen Bedingungssätze und der uneigentliche Folgesatz in Beziehung gesetzt, auch nicht die in diesem etwa ausgedrückten Gedanken; denn solche sind nicht vorhanden; sondern in Beziehung gesetzt werden die Bedeutungen von Teilen dieser uneigentlichen Sätze, und diese Teile drücken keine Gedanken aus. Dies von dem allgemeinen Satze Gesagte gilt auch von seiner Verneinung, also von einem Satze, in dem nach Herrn Korselts Redeweise die Unabhängigkeit eines Satzes von andern behauptet werden soll. Auch ein solcher setzt also nicht Sätze in Beziehung, noch Gedanken, sondern Bedeutungen von Theilen der uneigentlichen Sätze. Diese uneigentlichen Sätze sind nun in einem Unabhängigkeitsbeweise des Herrn Hilbert dessen Pseudoaxiome. Es folgt hieraus, daß die von Herrn Hilbert bewiesene Unabhängigkeit nicht diese Psendoaxiome betrifft.

Wenn man in der Mathematik die Worte gebraucht „einen Satz beweisen“, so meint man offenbar mit dem Worte „Satz“ nicht eine Folge von Worten oder eine Gruppe von Zeichen, sondern einen Gedanken, etwas, von dem man sagen kann, es sei wahr. Und so wird man auch, wenn von der Unabhängigkeit von Sätzen, von Axiomen die Rede ist, dies als Unabhängigkeit von Gedanken verstehen. Darum ist es durchaus nicht unnötig festzustellen, daß diese Auffassung falsch ist, und eine Ausdrucksweise zu verwerfen, die zu diesem Mißverständnisse Anlaß gibt.

Wir müssen unterscheiden zwischen dem Äußern, Hörbaren oder Sichtbaren, das einen Gedanken ausdrücken soll, und diesem selbst. Vorzuziehen scheint mir die in der Logik wohl vorherrschende Redeweise, nach der nur das erstere ein Satz heißt. Danach wird man einen Satz überhaupt nicht wohl unabhängig von den anderen Sätzen nennen können; denn von dem Hörbaren oder Sichtbaren wird man doch die Unabhängigkeit nicht aussagen wollen. Da die uneigentlichen Sätze, mithin auch die Pseudoaxiome keinen Gedankeninhalt haben, so wird man von diesen überhaupt nur in dem zuletzt empfohlenen Sinne etwas aussagen können; aber eben die Unabhängigkeit wird man nicht aussagen können.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so werden wir sagen: Bei den Hilbertschen Unabhängigkeitsbeweisen handelt es sich weder um die Unabhängigkeit von Sätzen in dem eben empfohlenen Sinne des Wortes, noch um die Unabhängigkeit von Gedanken; sondern es handelt sich um die Unabhängigkeit der Bedeutungen von Teilen uneigentlicher Sätze. Diese Teile sind die größten noch bedeutungsvollen; aber sie sind keine Sätze, drücken also keine Gedanken aus. Für die Bedeutungen solcher Teile fehlt uns eine kurze alle Fälle umfassende Benennung. In einfacheren Fällen haben wir Begriffe (positive Zahl, Zahl kleiner als 1). Gegen Ende meines ersten Aufsatzes[1]) habe ich sie, mich einer brieflichen Äußerung des Herrn Hilbert anbequemend, Merkmale genannt, obwohl das mit meiner eigenen Gebrauchsweise nicht ganz übereinstimmt.

Festzustellen ist, daß die Hilbertschen Unabhängigkeitsbeweise die eigentlichen Axiome, die Axiome im Euklidischen Sinne gar nicht betreffen; denn diese sind doch wohl Gedanken. Nun findet sich bei Herrn Hilbert nirgends eine Unterscheidung, die unserer von eigentlichen und uneigentlichen Sätzen, von eigentlichen und Pseudoaxiomen, entspräche; sondern Herr Hilbert scheint seine vermeintlich von seinen Pseudoaxiomen bewiesene Unabhängigkeit ohne weiteres auf die eigentlichen Axiome zu übertragen, weil er den Unterschied überhaupt nicht bemerkt. Das wäre immerhin ein beträchtlicher Fehlschluß. Und alle Mathematiker, die meinen, Herr Hilbert habe die Unabhängigkeit der eigentlichen Axiome voneinander bewiesen, sind wohl in denselben Irrtum verfallen. Sie sehen nicht, daß Herr Hilbert, indem er diese Unabhängigkeit beweist, das Wort „Axiom" gar nicht im Euklidischen Sinne gebraucht. Schuld hieran ist der doppelte Gebrauch der Wörter „Punkt", „Gerade" usw., die einerseits wie Buchstaben dem ganzen Lehrgebäude Allgemeinheit verleihen sollen und in diesem Falle nichts bezeichnen, und die andrerseits in den Euklidischen Axiomen ihre hergebrachten Bedeutungen haben. In jenem Falle sind seine Axiome eben nur Pseudoaxiome ohne Sinn, indem nur das Ganze (die formale Theorie, der reine Lehrbegriff des Herrn Korselt), dessen unselb-

1) Jahresbericht 12. Bd., S. 323 u. 324.