Arch. math. Logik 16 (1974), 119–132

ÜBER DAS VERHÄLTNIS ZWISCHEN INTUITIONISTISCHER UND KLASSISCHER ARITHMETIK

Von Gerhard Gentzen† in Göttingen

Einleitung

Unter klassischer Arithmetik verstehen wir die Theorie der natürlichen Zahlen, wie sie sich aus den Axiomen von Peano zusammen mit der klassischen Prädikatenlogik (bei Hilbert-Ackermann[1] „engerer Funktionenkalkül" genannt) nebst der Einführung rekursiver Definitionen aufbaut.

Die intuitionistische Arithmetik unterscheidet sich von der klassischen, rein äußerlich betrachtet, dadurch, daß sie nur einen Teil der klassischen Prädikatenlogik als zulässig anerkennt. Diese intuitionistische Prädikatenlogik läßt sich zur klassischen ergänzen, indem man etwa den Satz vom ausgeschlossenen Dritten ($\mathfrak{A}$ ist richtig oder $\mathfrak{A}$ ist falsch) hinzunimmt, oder etwa den Satz von der doppelten Verneinung (wenn $\mathfrak{A}$ nicht falsch ist, so ist $\mathfrak{A}$ richtig).

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Anwendung des Satzes von der doppelten Verneinung in einem Beweise der klassischen Arithmetik in vielen Fällen eliminiert werden kann. Die wichtigsten sich ergebenden Konsequenzen sind diese:

Satz VI. Wenn die intuitionistische Arithmetik widerspruchsfrei ist, so ist auch die klassische Arithmetik widerspruchsfrei.

Satz IV[2]. Jede bestimmte Aussage der Arithmetik, welche die Begriffe „oder" und „es gibt" nicht enthält, und klassisch beweisbar ist, ist auch intuitionistisch beweisbar.

Eine Erklärung der verwendeten Ausdrücke folgt unten.

Die Beweise dieser und der übrigen Sätze werden intuitionistisch geführt. Sie sind durchweg ziemlich einfach, erfordern in der Hauptsache nur etwas Operieren mit dem Kalkül der intuitionistischen Prädikatenlogik.

---

* Eingegangen am 15. 3. 1933

[1] Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Im folgenden als H.-A. zitiert.

[2] An der Autorschaft dieses Satzes ist Herr P. Bernays wesentlich beteiligt. Nachdem ich ihm nämlich einen Beweis der Sätze VI und V mitgeteilt hatte, bemerkte Herr Bernays, daß letzterer auf die beträchtlich schärfere in Satz IV ausgesprochene Form zu bringen sei. Ich habe dann unter Benutzung des Bernaysschen Gedankenganges für die Beweise aller dieser Sätze einen Weg gewählt, bei dem sie gemeinsam auf den zuvor hergeleiteten Satz III begründet werden.

§ 1

Erklärung der verwendeten Bezeichnungen

Wir unterscheiden folgende Zeichen und Zeichenverbindungen (Ausdrücke):

1.1. *Logische Zeichen:* & und, $\vee$ oder, $\supset$ aus ... folgt ..., $\neg$ nicht, $(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x}$, $E(\mathfrak{x})$ es gibt ein $\mathfrak{x}$.

Die beiden letzteren heißen *Klammerzeichen.*

1.21. *Zeichen für bestimmte Gegenstände*: 1.

1.22. *Gegenstandsvariabeln*: $a, b, c, \ldots$.

1.3. *Zeichen für bestimmte Funktionen*: $'$ (die Nachfolgerfunktion, mit einer Leerstelle); $+, \cdot$ (mit 2 Leerstellen).

1.41. *Zeichen für bestimmte Prädikate*: $=$, $<$ (mit 2 Leerstellen).

1.42. *Aussagenvariabeln*: $A, B, C, \ldots$.

1.5. Deutsche Buchstaben dienen als Mitteilungszeichen, als Variabeln der Betrachtungen *über* die Arithmetik.

1.6. Begriff des Gegenstandsausdrucks, kurz *Term* genannt (induktiv erklärt):

1.61. Gegenstandsvariabeln und Zeichen für bestimmte Gegenstände sind Terme.

1.621. Ist $\mathfrak{t}$ ein Term, so ist auch $\mathfrak{t}'$ ein Term.

1.622. Sind $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{g}$ Terme, so sind auch $\mathfrak{t}+\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{g}$ Terme.

1.7. Beispiel eines Terms: $(a+1'')' \cdot x'$.

(Die Klammern dienen dazu, daß der Aufbau des Terms eindeutig ersichtlich ist.)
Die Zahlzeichen 2, 3, 4, ... sind Abkürzungen für die Terme $1'$, $1''$, $1'''$, ...

1.8. Begriff des Aussageausdrucks, kurz *Formel* (vgl. H.-A.[3], S. 52) genannt (induktiv erklärt):

1.81. Ein Zeichen für ein bestimmtes Prädikat, mit Termen in den Leerstellen, ist eine Formel (z. B.: $x' < y + 1$).

Eine Aussagenvariable mit einer Anzahl von Termen dahinter ist eine Formel (z. B.: $F\,x, y'$). (Eine solche bedeutet inhaltlich eine beliebige Ausage, in welcher die betreffenden Gegenstände vorkommen können.)

Es ist auch zulässig, daß *kein* Term hinter der Aussagenvariabeln steht.

Formeln der bisher genannten Arten nennen wir *Elementarformeln*, die Terme dabei die *Argumente* des Prädikatzeichens bzw. der Aussagenvariabeln.

1.821. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\mathfrak{A}$ eine Formel.

1.822. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ Formeln.

1.823. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, und $\mathfrak{x}$ eine Gegenstandsvariable, die in $\mathfrak{A}$ nicht in einem Klammerzeichen vorkommt, so sind auch $(\mathfrak{x})\mathfrak{A}$ und $(E\,\mathfrak{x})\mathfrak{A}$ Formeln.

1.9. Die Formeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in den Fällen 1.821 – 1.823 bezeichnen wir als *Wirkungsbereiche* der hinzugesetzten logischen Zeichen.

Durch Klammern und Punkte ist dafür zu sorgen, daß die Wirkungsbereiche der logischen Zeichen in einer Formel eindeutig ersichtlich sind.

[3] Siehe Anmerkung [1].

Beispiel einer Formel:

$$(Ax' + 1, a \cdot \&: \cdot (x): x'' < 1 \cdot \supset Fb) \supset \neg (Ez) A .$$

Die Punkte sind so zu verstehen: Der Wirkungsbereich eines logischen Zeichens nach einer Seite hin erstreckt sich so weit, bis eine größere Anzahl von Punkten auftritt als die, welche auf dieser Seite neben ihm steht. (Wenn eine solche nicht auftritt, erstreckt er sich natürlich bis zum Anfang bzw. Ende der Formel.)
Zur besseren Übersicht verwenden wir auch Klammern ( ) an Stelle von Punkten; diese umschließen jeweils einen Wirkungsbereich.
Eine Gegenstandsvariable heißt an einer Stelle einer Formel *gebunden*, wenn sie hier im Wirkungsbereich eines Klammerzeichens mit derselben Gegenstandsvariabeln (bzw. in einem Klammerzeichen selbst) steht, andernfalls heißt sie an dieser Stelle *frei*.

§ 2

Die formale Gestalt der Arithmetik

Die Arithmetik ist ein System von „richtigen" Aussagen, von denen einige Axiome sind und die übrigen durch fortgesetzte Anwendung gewisser Schlüsse hieraus erhalten werden.
In der formalisierten Arithmetik (die wir, um Schlüsse *über* die Arithmetik anzustellen, an Stelle der inhaltlichen betrachten müssen) haben wir entsprechend ein System von *richtigen Formeln*, von denen einige *Axiomformeln* sind und die übrigen durch fortgesetzte Anwendung gewisser *Operationsregeln* erhalten werden.
Das formale Abbild eines Beweises ist eine Reihe von Formeln, von denen jede entweder eine Axiomformel ist oder aus vorangehenden durch Anwendung einer Operationsregel hervorgeht. Dieses nennen wir eine Beweisfigur oder kurz *Herleitung*. Die letzte Formel in der Reihe heißt *Endformel* der Herleitung. Eine Formel heißt herleitbar, wenn es eine Herleitung gibt, deren Endformel sie ist. (Diese heißt dann auch eine „Herleitung der Formel".)
Die Wahl der Axiomformeln und Operationsregeln ist weitgehend willkürlich; wir wollen das im folgenden angegebene System zu Grunde legen.
2.1. Angabe der Axiomformeln.
2.11. $\neg \neg A \cdot \supset A$. (Das formale Abbild des „Satzes von der doppelten Verneinung".)
Wir stellen diese Axiomformel voran und haben damit folgende Einteilung:
Alle jetzt folgenden Axiomformeln und Operationsregeln stellen zusammengenommen den Formalismus der *intuitionistischen Arithmetik* dar. Durch Hinzunahme der Axiomformel $\neg \neg A \cdot \supset A$ entsteht daraus der Formalismus der *klassischen Arithmetik*.
Wir nennen diejenigen Formeln, welche ohne Benutzung dieser Axiomformel herleitbar sind, *intuitionistisch richtig*, die im gesamten Formalismus herleitbaren Formeln *klassisch richtig*.

2.12. Axiomformeln der intuitionistischen Aussagenlogik.
Wir übernehmen die Axiomformeln von Heyting[4]:

1. $A \supset \cdot A \& A$,
2. $A \& B \cdot \supset \cdot B \& A$,
3. $A \supset B \cdot \supset : A \& C \cdot \supset \cdot B \& C$,
4. $A \supset B \cdot \& \cdot B \supset C : \supset \cdot A \supset C$,
5. $B \supset \cdot A \supset B$,
6. $A \& \cdot A \supset B : \supset B$,
7. $A \supset \cdot A \vee B$,
8. $A \vee B \cdot \supset \cdot B \vee A$,
9. $A \supset C \cdot \& \cdot B \supset C : \supset : A \vee B \cdot \supset C$,
10. $\neg A \cdot \supset \cdot A \supset B$,
11. $A \supset B \cdot \& \cdot A \supset \neg B : \supset \neg A$.

2.13. Axiomformeln für „alle" und „es gibt" (H.-A. S. 53).

1. $(x) Fx \cdot \supset Fy$, 2. $Fy \supset (Ex) Fx$

2.14. Axiomformeln der natürlichen Zahlen (nach Herbrand[5]).

1. $x = x$,
2. $x = y \cdot \supset \cdot y = x$,
3. $x = y \cdot \& \cdot y = z : \supset \cdot x = z$,
4. $\neg \cdot x' = 1$,
5. $x = y \cdot \supset \cdot x' = y'$,
6. $x' = y' \cdot \supset \cdot x = y$,
7. $F1 \& : (x) \cdot Fx \supset Fx' : \cdot \supset (x) Fx$
   (Axiomformel der vollständigen Induktion),
8. $\neg \neg \cdot x = y : \supset \cdot x = y$.

(Dieser Spezialfall des Satzes von der doppelten Verneinung ist intuitionistisch richtig.)
Ferner sind beliebige weitere intuitionistisch richtige Axiomformeln zugelassen, welche (wie die bisherigen) die Zeichen $\vee$ und E nicht enthalten.
Zum Beispiel folgende Axiomformeln der Addition:

$$x + 1 = x', \quad x + y' = (x + y)'.$$

Durch ähnliche Axiomformeln kann man die Multiplikation, das Potenzieren, das Prädikat „kleiner" und weitere einführen. Wir verlangen nur noch, daß für

[4] A. Heyting. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1930.

[5] J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'arithmétique, Crelles Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932) (§ 2).

die Prädikate der Satz von der doppelten Verneinung intuitionistisch gültig ist, z. B. für „kleiner", daß

$$\neg\neg \cdot x < y : \supset \cdot x < y$$

Axiomformel ist.

Man sieht leicht ein, daß man die gestellten Bedingungen bei diesen und ähnlichen in der Arithmetik üblichen Begriffsbildungen erfüllen kann. (Zum Beispiel ist $\neg\neg \cdot x < y : \supset \cdot x < y$ ja in der Tat intuitionistisch gültig.)

2.2. Angabe der Operationsregeln, (nach H.-A., S. 53–54):

2.21. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ richtige Formeln, so ist $\mathfrak{B}$ eine richtige Formel.

2.22. (Regeln für „alle" und „es gibt".) Ist $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ eine richtige Formel und $\mathfrak{x}$ eine Gegenstandsvariable, die in $\mathfrak{A}$ nicht frei, in $\mathfrak{B}$ nicht gebunden vorkommt, so ist $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{x})\mathfrak{B}$ eine richtige Formel.

Ist $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ eine richtige Formel und $\mathfrak{x}$ eine Gegenstandsvariable, die in $\mathfrak{A}$ nicht frei, in $\mathfrak{B}$ nicht gebunden vorkommt, so ist $(E\mathfrak{x})\,\mathfrak{B} \cdot \supset \mathfrak{A}$ eine richtige Formel.

2.23. Einsetzungsregeln:

2.231. Für gebundene Gegenstandsvariabeln:

Aus einer richtigen Formel entsteht wieder eine richtige Formel, wenn man für eine Gegenstandsvariable in einem Klammerzeichen und dessen ganzem Wirkungsbereich eine andere Gegenstandsvariable einsetzt, vorausgesetzt, daß diese nicht schon in dem Wirkungsbereich oder in einem Klammerzeichen der Formel, in dessen Bereich die Einsetzung stattfindet, vorkommt.

2.232. Für freie Gegenstandsvariabeln:

Aus einer richtigen Formel entsteht wieder eine richtige Formel, wenn man für eine Gegenstandsvariable an allen Stellen, wo sie frei ist, ein und denselben Term einsetzt; vorausgesetzt, daß dieser keine Gegenstandsvariable enthält, welche in einem Klammerzeichen vorkommt, in dessen Bereich eine Einsetzung stattfindet.

2.233. Für Aussagenvariabeln:

Aus einer richtigen Formel $\mathfrak{A}$ entsteht wieder eine richtige Formel bei folgender Einsetzung:

Es wird etwas eingesetzt für eine Aussagenvariable $\mathfrak{B}$ mitsamt ihren Argumenten, und zwar an allen Stellen in $\mathfrak{A}$, wo sie mit der gleichen Anzahl von Argumenten vorkommt. Sei ν diese Anzahl (ν kann 0 sein). Zur Einsetzung dient eine Formel $\mathfrak{S}$, die keine Gegenstandsvariable enthält, welche in einem Klammerzeichen der Formel $\mathfrak{A}$ vorkommt, in dessen Bereich eine Einsetzung stattfindet. In $\mathfrak{S}$ dürfen, unter anderen, ν ausgezeichnete Gegenstandsvariabeln $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu$ vorkommen, doch nicht gebunden. (Sie brauchen nicht alle vorzukommen, es darf auch sein, daß keine vorkommt, vgl. 1.81.) Unter $\mathfrak{Sb}\left(\mathfrak{S}\begin{smallmatrix}\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\nu \\ \mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_\nu\end{smallmatrix}\right)$ verstehen wir die Formel, die aus $\mathfrak{S}$ entsteht, indem man jedes $\mathfrak{x}_\mu$, überall wo es vorkommt, durch den Term $\mathfrak{y}_\mu$ ersetzt. Nunmehr läßt sich die Gesamteinsetzung so beschreiben: Hat die Aussagenvariable an einer Stelle, wo etwas für sie eingesetzt werden soll, als Argumente die Terme $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_\nu$, so tritt an dieser Stelle für sie (mitsamt ihren Argumenten) die Formel

$$\mathfrak{Sb}\left(\mathfrak{S}\begin{matrix}\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\nu \\ \mathfrak{z}_1 \ldots \mathfrak{z}_\nu\end{matrix}\right).$$

2.3. Einige richtige Formeln der intuitionistischen Aussagenlogik.
Die folgenden richtigen Formeln, welche wir für die Beweise in § 3 und 4 brauchen werden, lassen sich aus den Axiomformeln 2.12 mit den Operationsregeln 2.21 und 2.233 (nur für Formeln ohne Terme angewandt) herleiten. Wir übernehmen sie aus der Arbeit von Heyting[6], die Nummern hinter den Formeln verweisen auf diese.

1.	$A\&B \cdot \supset A,$	2.2
2.	$A \supset B \cdot \& \cdot C \supset D : \supset : A\&C \cdot \supset \cdot B\&D,$	2.23
3.	$A \supset B \cdot \& \cdot A \supset C : \supset : A \supset \cdot B\&C,$	2.24
4.	$A\&B \cdot \supset C : \supset : A \supset \cdot B \supset C,$	2.27
5.	$A \supset \cdot B \supset C : \supset : B \supset \cdot A \supset C,$	2.271
6.	$A \supset B \cdot \supset : B \supset C \cdot \supset \cdot A \supset C,$	2.29
7.	$A \supset B \cdot \supset : \neg B \cdot \supset \neg A,$	4.2
8.	$A \supset B \cdot \supset : \neg\neg A \cdot \supset \neg\neg B,$	4.22
9.	$A \supset \neg\neg A,$	4.3
10.	$\neg\neg\neg A \cdot \supset \neg A,$	4.32
11.	$\neg\neg \cdot A\&B : \supset : \neg\neg A \cdot \& \neg\neg B.$	4.61

§ 3

Die intuitionistische Gültigkeit des Satzes von der doppelten Verneinung

Vorbemerkung über den Zusammenhang der folgenden Sätze: Der Satz II enthält die wesentliche Grundlage unserer Ergebnisse, Satz I dient als Hilfssatz zu dessen Beweis. Satz II besagt, daß der Satz von der doppelten Verneinung weitgehend intuitionistisch richtig ist; diese Tatsache wird dann benutzt (in § 4), um einen beliebigen klassischen Beweis in einen intuitionistischen umzuwandeln, wobei allerdings die Endaussage des Beweises einige Änderungen erfährt. Satz III gibt an, was sich in dieser Hinsicht erreichen läßt. Aus Satz III folgen dann (in § 5) eine Reihe von einzelnen Ergebnissen, darunter die beiden in der Einleitung genannten Sätze, nahezu ohne weiteres.

[6] Siehe Anmerkung [4]. Heyting benutzt allerdings noch die Operationsregel: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ richtige Formeln, so ist $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ eine richtige Formel. Dies läßt sich, wie Bernays bemerkt hat, folgendermaßen mit Hilfe der Axiomformeln und übrigen Regeln nachmachen: Aus $\mathfrak{A}$ und Axiomformel 2.125 entsteht mittels der Regeln 2.233 und 2.21 $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, aus Axiomformel 2.123 durch Einsetzung (2.233) $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A} \cdot \supset : \mathfrak{B}\&\mathfrak{B} \cdot \supset \cdot \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, beides zusammen gibt $\mathfrak{B}\&\mathfrak{B} \cdot \supset \cdot \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$, aus $\mathfrak{B}$ und 2.121 entsteht $\mathfrak{B}\&\mathfrak{B}$, also mit dem vorigen $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$.

3.1. Satz I. Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ irgendwelche Formeln, ist $\mathfrak{x}$ irgendeine Gegenstandsvariable, die in $\mathfrak{A}$ nicht gebunden vorkommt, und sind $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ sowie $\neg\neg\mathfrak{B}\cdot\supset\mathfrak{B}$ intuitionistisch richtige Formeln, so sind auch $(\neg\neg\cdot\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})$, $(\neg\neg\cdot\neg\mathfrak{C})\supset(\neg\mathfrak{C})$ und $(\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{x})\mathfrak{A})$ intuitionistisch richtige Formeln.

3.11. Der inhaltliche Sinn dieses Satzes läßt sich etwa so aussprechen:
Wenn der Satz von der doppelten Verneinung für gewisse Aussagen intuitionistisch gilt, so gilt er auch für die Konjunktion von zwei solchen Aussagen, für die Implikation einer beliebigen Aussage mit einer solchen Aussage, für die Negation einer beliebigen Aussage, sowie für eine Generalisation einer solchen Aussage.

3.2. Beweis von Satz I. Es liegen vier einzelne Behauptungen vor, die jede für sich zu beweisen sind.

3.21. Aus $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ und $\neg\neg\mathfrak{B}\cdot\supset\mathfrak{B}$ läßt sich $(\neg\neg\cdot\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$ wie folgt (intuitionistisch) herleiten (die Nummern verweisen auf § 2):
Aus $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ und $\neg\neg\mathfrak{B}\cdot\supset\mathfrak{B}$ folgt mittels 2.32 und 2.34

$$(\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\&\neg\neg\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\,.$$

Dies zusammen mit 2.311 und 2.36 ergibt

$$(\neg\neg\cdot\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\supset(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})\,.$$

3.22. Aus $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ ist herzuleiten $(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})$. Das geschieht so:
2.126 zusammen mit 2.34 ergibt

$$\mathfrak{C}\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A})\,.$$

Nach 2.38 gilt

$$(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A})\supset(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}:\supset\neg\neg\mathfrak{A})\,.$$

Beides zusammen gibt (2.36)

$$\mathfrak{C}\supset(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A}:\supset\neg\neg\mathfrak{A})\,.$$

Hieraus folgt (2.35)

$$(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{C}\supset\neg\neg\mathfrak{A})\,.$$

Aus $\neg\neg\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$ erhält man (2.35, 2.36)

$$(\mathfrak{C}\supset\cdot\neg\neg\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\,,$$

also (2.36)

$$(\neg\neg\cdot\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\supset(\mathfrak{C}\supset\mathfrak{A})\,.$$

3.23. $(\neg\neg\neg\mathfrak{C})\supset(\neg\mathfrak{C})$ gilt gemäß 2.310. (Dieser Fall bietet nichts neues und ist nur der Vollständigkeit wegen mit in Satz I aufgenommen.)

3.24. Aus $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ ist herzuleiten:

$$(\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A})\supset((\mathfrak{x})\mathfrak{A})\,.$$

2.131 ergibt (2.231, 2.232, 2.233)

$$(\mathfrak{x})\,\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$$

(zulässig, da $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{A}$ nicht gebunden vorkommen sollte).

Mit 2.38 entsteht $\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A}\cdot\supset\neg\neg\mathfrak{A}$, mit $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ weiter (2.36):

$$\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A},$$

und hieraus gemäß 2.22:

$$\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{x})\mathfrak{A}.$$

(Die Anwendung der Operationsregel ist in Ordnung, da $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{A}$ nicht gebunden vorkommen sollte, und in $\neg\neg(\mathfrak{x})\mathfrak{A}$ offensichtlich nicht frei vorkommt.)

3.3 Satz II. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, in welcher Elementarformeln mit Aussagenvariabeln nur mit $\neg$ davor und keine Zeichen $\vee$ und E auftreten, so ist $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ eine intuitionistisch richtige Formel.

3.4. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich leicht unter Benutzung von Satz I. $\mathfrak{A}$ setzt sich nämlich aus Formeln der Formen

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{g},\mathfrak{h}<\mathfrak{i},\ldots,\quad\text{sowie}\quad\neg\mathfrak{E}\mathfrak{k}_1\ldots\mathfrak{k}_\nu$$

($\mathfrak{f},\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{i},\mathfrak{k}_1\ldots\mathfrak{k}_\nu$ bedeuten Terme, $\mathfrak{E}$ eine Aussagenvariable) unter Verwendung der Zeichen &, $\supset$, $\neg$, $(\mathfrak{x})$ zusammen (1.8). Für jede solche Formel, nennen wir sie $\mathfrak{D}$, ist $\neg\neg\mathfrak{D}\cdot\supset\mathfrak{D}$ intuitionistisch richtig (2.14 mit 2.232, 2.310 mit 2.233). Bei der Zusammensetzung von $\mathfrak{A}$ aus ihnen überträgt sich, nach Satz I, diese Eigenschaft auf die einzelnen Teilformeln von $\mathfrak{A}$ und schließlich auf $\mathfrak{A}$ selbst, d. h. $\neg\neg\mathfrak{A}\cdot\supset\mathfrak{A}$ ist eine intuitionistisch richtige Formel.

§4

Umwandlung von Beweisen der klassischen Arithmetik in Beweise der intuitionistischen Arithmetik

4.1. Satz III. Eine Beweisfigur der klassischen Arithmetik mit der Endformel $\mathfrak{A}$ läßt sich in eine Beweisfigur der intuitionistischen Arithmetik mit der Endformel $\mathfrak{A}^*$ umwandeln, wobei $\mathfrak{A}^*$ aus $\mathfrak{E}$ auf folgende Weise entsteht: Jede Teilformel von $\mathfrak{E}$, die die Form $\mathfrak{C}\vee\mathfrak{D}$ hat, wird durch $\neg:\neg\mathfrak{C}\cdot\&\neg\mathfrak{D}$ ersetzt, jede Teilformel, die die Form $(E\mathfrak{x})\mathfrak{C}$ hat, wird durch $\neg(\mathfrak{x})\neg\mathfrak{C}$ ersetzt, jede Elementarformel mit einer Aussagenvariabeln wird durch dieselbe mit zwei Negationszeichen davor ersetzt.

4.11. Die so entstehende Formel $\mathfrak{E}^*$ ist bekanntlich in der klassischen Logik mit $\mathfrak{E}$ äquivalent (siehe etwa H.-A., S. 5, 7, 46, 61).
Die zum Beweise von Satz III erforderlichen, etwas langwierigen Betrachtungen bringen an sich nichts Neues, müssen nur eben für die vorliegende Anwendung genau durchgeführt werden.
4.2. Beweis von Satz III. Die Umwandlung der klassischen Beweisfigur, welche wir uns vorliegend denken, vollzieht sich in fünf Schritten (4.21 – 4.25).
4.21. Zunächst läßt sich erriechen, daß jede Formel der Beweisfigur, die Endformel $\mathfrak{E}$ ausgenommen, *genau einmal* zur Gewinnung einer neuen Formel (mittels einer Operationsregel) verwendet wird.

Man läßt nämlich Formeln, die nicht verwendet werden, ausgenommen die Endformel, der Reihe nach weg, und schreibt solche, die mehrmals verwendet werden, mitsamt den zu ihrer Herleitung benötigten Formeln entsprechend oft auf.

4.22. Beseitigung der Zeichen $\vee$ und E aus der Beweisfigur. Die Herleitung (= Beweisfigur) wird nunmehr so abgeändert: Überall, wo als Bestandteil einer Herleitungsformel eine Formel von der Gestalt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ auftritt, wird sie durch $\neg : \neg \mathfrak{A} \cdot \& \neg \mathfrak{B}$ ersetzt, wo eine Formel von der Gestalt $(E\mathfrak{x})\,\mathfrak{A}$ vorkommt, wird sie durch $\neg\,(\mathfrak{x}) \neg\, \mathfrak{A}$ ersetzt.

(Die Reihenfolge dieser Ersetzungen ist offenbar gleichgültig.)

Wir haben nun die so entstehende neue Figur daraufhin zu untersuchen, wieweit sie eine korrekte Herleitung geblieben ist, und wo dies nicht der Fall ist, sie entsprechend umzuwandeln. Dazu betrachten wir 1. die Anwendungen der Operationsregeln, 2. die Axiomformeln (4.221, 4.222).

Bei den Umwandlungen werden wir der Beweisfigur einige richtige Formeln von 2.3 mitsamt ihren Herleitungen hinzufügen; wir bemerken dazu, daß diese Formeln sich, wie man aus der Arbeit von Heyting entnehmen kann, ohne Benutzung der Zeichen $\vee$ und E herleiten lassen, so daß wirklich dann kein solches Zeichen mehr in der Beweisfigur vorkommt. (Dies ist übrigens nicht wesentlich.) Wir denken uns diese Herleitungen bereits durch das unter 4.21 beschriebene Verfahren auf eine Form gebracht, in der jede Formel außer der Endformel genau einmal zur Gewinnung einer neuen Formel verwendet wird.

4.221. Alle in der Beweisfigur vorkommenden Anwendungen von Operationsregeln sind bei der Ersetzung, wie man leicht einsieht, korrekt geblieben, ausgenommen die Stellen, wo eine Anwendung der Regel für „es gibt" (2.22, 2. Teil) vorlag.

Eine solche Stelle, die zuvor $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, $(E\mathfrak{x})\,\mathfrak{B} \cdot \supset \mathfrak{A}$ lautete, ist übergegangen in $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{A}^*$, $\neg\,(\mathfrak{x}) \neg\, \mathfrak{B}^* \cdot \supset \mathfrak{A}^*$. $\mathfrak{x}$ kommt in $\mathfrak{A}^*$ nicht frei, in $\mathfrak{B}^*$ nicht gebunden vor. Wir ändern die Stelle so ab:

Aus $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{A}^*$ erhält man mit Hilfe der richtigen Formel 2.37 (die mit ihrer Herleitung der Beweisfigur hinzuzufügen ist), $\neg\, \mathfrak{A}^* \cdot \supset \neg\, \mathfrak{B}^*$, hieraus durch die Regel für „alle" $\neg\, \mathfrak{A}^* \cdot \supset (\mathfrak{x}) \neg\, \mathfrak{B}^*$, hieraus wiederum mittels 2.37 $\neg\,(\mathfrak{x}) \neg\, \mathfrak{B}^* \cdot \supset \neg \neg\, \mathfrak{A}^*$, und schließlich mit Hinzunahme von $\neg \neg\, \mathfrak{A}^* \cdot \supset \mathfrak{A}^*$ (2.11) und 2.36 $\neg\,(\mathfrak{x}) \neg\, \mathfrak{B}^* \cdot \supset \mathfrak{A}^*$, womit die in der Beweisfigur entstandene Lücke wieder ausgefüllt ist.

4.222. Durch die Ersetzung der $\vee$- und E-Zeichen können ferner gewisse Axiomformeln verändert worden sein, nämlich diejenigen, welche $\vee$ oder E enthielten. Das sind die Axiomformeln 2.127, 2.128, 2.129 und 2.132. (Die arithmetischen Axiomformeln (2.14) enthalten, wie dort ausdrücklich verlangt wurde, kein $\vee$ und E.) Die aus diesen vier Axiomformeln entstandenen Formeln werden nun wie folgt hergeleitet:

4.222.1. Die Axiomformel 2.127 wurde zu

$$A \supset \neg : \neg A \cdot \& \neg B .$$

Nach 2.31 gilt

$$\neg A \cdot \& \neg B : \supset \neg A ,$$

hieraus entsteht mit Hilfe von 2.37

$$\neg\neg A \supset :\cdot \neg : \neg A \cdot \& \neg B\,,$$

ferner gilt (2.39)

$$A \supset \neg\neg A\,,$$

beides zusammen ergibt (2.36) die herzuleitende Formel.
4.222.2. Die Axiomformel 2.128 wurde zu

$$\neg : \neg A \cdot \& \neg B :\cdot \supset :\cdot \neg : \neg B \cdot \& \neg A\,,$$

Aus 2.122 entsteht durch Einsetzung:

$$\neg B \cdot \& \neg A : \supset : \neg A \cdot \& \neg B\,,$$

hieraus mit Hilfe von 2.37 das Gewünschte.
4.222.3. Die Axiomformel 2.129 wurde zu

$$(A \supset C \cdot \& \cdot B \supset C) \supset (\neg : \neg A \cdot \& \neg B :\cdot \supset C)\,.$$

Dies läßt sich so herleiten: 2.37 ergibt

$$A \supset C \cdot \supset : \neg C \cdot \supset \neg A \quad \text{und} \quad B \supset C \cdot \supset : \neg C \cdot \supset \neg B\,.$$

Mit 2.32 (und 2.34) ergibt sich hieraus

$$(A \supset C \cdot \& \cdot B \supset C) \supset (\neg C \cdot \supset \neg A :\& : \neg C \cdot \supset \neg B)\,.$$

Ferner gilt nach 2.33

$$(\neg C \cdot \supset \neg A :\& : \neg C \cdot \supset \neg B) \supset (\neg C \cdot \supset : \neg A \cdot \& \neg B)\,,$$

weiter nach 2.37

$$(\neg C \cdot \supset : \neg A \cdot \& \neg B) \supset (\neg : \neg A \cdot \& \neg B :\cdot \supset \neg\neg C)\,.$$

Nimmt man noch (2.11) $\neg\neg C \supset C$ hinzu, so entsteht durch mehrmalige Anwendung von 2.36 (und einmal 2.35) schließlich die herzuleitende Formel.
4.222.4. Die Axiomformel 2.132 wurde zu

$$Fy \supset \neg (x) \neg Fx\,.$$

Aus (2.13) $(x)\neg Fx \cdot \supset \neg Fy$ entsteht mittels 2.37

$$\neg\neg Fy \cdot \supset \neg (x) \neg Fx\,,$$

hieraus mit Hilfe von $Fy \supset \neg\neg Fy$ (2.39) und 2.36 die herzuleitende Formel.
4.23. Nunmehr soll die Beweisfigur so abgeändert werden, daß Einsetzungen für Aussagenvariabeln (2.233) nur im Anschluß an die Axiomformeln stattfinden, d. h. ehe eine Anwendung einer der übrigen Operationsregeln (2.21, 2.22, 2.231, 2.232) erfolgt. (Es bleibt zulässig, daß im Anschluß an eine Axiomformel *mehrere* solche Einsetzungen unmittelbar nacheinander stattfinden.)
4.231. Vorbereitender Schritt: Alle Stellen der Beweisfigur, wo eine Einsetzung für eine Aussagenvariable stattfindet, werden so abgeändert:

Die Einsetzung verwandle eine Formel $\mathfrak{F}$ in eine Formel $\mathfrak{G}$. An Stelle der eingesetzten Formel $\mathfrak{S}$ (2.233) tritt eine Formel $\mathfrak{T}$, welche an Stelle der Gegenstandsvariabeln von $\mathfrak{S}$ andere und zwar in der ganzen Beweisfigur noch nicht vorkommende Gegenstandsvariabeln enthält. Nach der Einsetzung von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{F}$ läßt man dann mehrere Einsetzungen von Gegenstandsvariabeln gemäß 2.231 und 2.232 folgen, derart, daß schließlich wieder die Formel $\mathfrak{G}$ entsteht.

4.232. Schrittweise Rückverlegung der Einsetzungen für Aussagenvariabeln:
Eine Einsetzung für eine Aussagenvariable, die *nach* einer Anwendung einer der *übrigen* Operationsregeln stattfindet, wird ersetzt durch dieselbe Einsetzung *vor* dieser. Mit „dieselbe Einsetzung" ist gemeint: Es wird für dieselbe Aussagenvariable mit derselben Zahl von Argumenten dieselbe Formel $\mathfrak{S}$ (2.233) eingesetzt, und zwar in der Formel bzw. den beiden Formeln (im Falle 2.21), auf welche die andere Operationsregel angewandt wird. (Kommt die Aussagenvariable in einer dieser Formeln gar nicht vor, so fällt natürlich hier die Einsetzung fort.) Die Einsetzung ist korrekt auf Grund des vorbereitenden Schrittes 4.231. Die nunmehr *nach* der Einsetzung (bzw. den beiden Einsetzungen im Falle 2.21) folgende Anwendung der anderen Operationsregel ist ebenfalls korrekt, wie man sich für alle vier Fälle (2.21 bis 2.232) überlegen kann. (Auf Grund des vorbereitenden Schrittes sind durch die Einsetzung von $\mathfrak{S}$ an jeder Stelle höchstens solche Gegenstandsvariabeln neu aufgetreten, die zuvor in den zur Anwendung der Operationsregel gehörigen Formeln nicht vorkamen.)
Durch genügend häufige Wiederholung dieses Rückverlegungsschrittes wird schließlich erreicht, daß Einsetzungen für Aussagenvariabeln nur im Anschluß an die Axiomformeln stattfinden.

4.24. Vorsetzen von zwei Negationszeichen vor solche Aussagenvariabeln, für die nichts eingesetzt wird.
Man läßt im Anschluß an die Einsetzungen für Aussagenvariabeln eine Reihe von ebensolchen Einsetzungen stattfinden, derart, daß dabei jede etwa noch vorkommende Elementarformel mit einer Aussagenvariabeln durch dieselbe mit zwei Negationszeichen davor ersetzt wird. Im weiteren Verlauf der Beweisfigur schreibt man vor dieselbe Elementarformel überall zwei Negationszeichen. Die Beweisfigur bleibt korrekt.

4.25. Nunmehr ist der Beweis von Satz III leicht so zu vollenden:
Wir haben erreicht, daß in der behandelten Beweisfigur die Axiomformel $\neg\neg A \cdot \supset A$ (wie auch alle übrigen Axiomformeln, wovon wir jedoch keinen Gebrauch machen) nur in folgender Weise Verwendung findet: Im Anschluß an die Axiomformel finden Einsetzungen für Aussagenvariabeln statt, deren Ergebnis eine Formel ist, in welcher Elementarformeln mit Aussagenvariabeln nur mit $\neg$ davor und keine Zeichen $\vee$ und E auftreten. Diese Formel hat (im Falle der Axiomformel $\neg\neg A \cdot \supset A$) die Gestalt $\neg\neg \mathfrak{A} \cdot \supset \mathfrak{A}$. (Denn diese Gestalt behält sie notwendigerweise bei jeder der Einsetzungen.)
Sie ist nun auf Grund von Satz II intuitionistisch herleitbar. Indem man in allen solchen Fällen die intuitionistische Herleitung hinschreibt, gelingt es, die Axiomformel $\neg\neg A \cdot \supset A$ überall zu eliminieren (als Axiomformel), so daß schließlich

eine intuitionistische Beweisfigur dasteht. Deren Endformel hat durch die Schritte 4.22 und 4.24 genau diejenigen Veränderungen erlitten, welche in Satz III angegeben sind. Damit ist dieser Satz bewiesen.

§5

Folgerungen

5.1 Satz IV. Eine Beweisfigur der klassischen Arithmetik, deren Endformel keine Aussagenvariabeln und keine Zeichen $\vee$ und E enthält, läßt sich in eine Beweisfigur der intuitionistischen Arithmetik mit der gleichen Endformel umwandeln.

5.11. Der inhaltliche Sinn dieses Satzes läßt sich etwa so aussprechen:
Jede bestimmte Aussage der Arithmetik, welche die Begriffe „oder" und „es gibt" nicht enthält, und klassisch beweisbar ist, ist auch intuitionistisch beweisbar.
Als „bestimmte Aussage" bezeichnen wir eine Aussage, deren Formel keine Aussagenvariabeln enthält. „Beweisbarkeit" ist immer als Beweisbarkeit in unserem formalen System der Arithmetik zu verstehen. Beweise, welche Hilfsmittel der Analysis benutzen, sind z. B. nicht einbegriffen.
5.2 Satz IV folgt ohne weiteres aus Satz III.

5.3. Satz V. Zu jeder Formel (der Arithmetik) gibt es eine klassisch äquivalente Formel, die dann und nur dann intuitionistisch herleitbar ist, wenn jene klassisch herleitbar ist.

5.31. Der inhaltliche Sinn dieses Satzes läßt sich etwa so aussprechen: Zu jeder Aussage der Arithmetik gibt es eine klassisch äquivalente Aussage, die dann und nur dann intuitionistisch beweisbar ist, wenn jene klassisch beweisbar ist.
5.4. Satz V folgt ebenfalls ohne weiteres aus Satz III. Die Formeln $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ in Satz III sind ja klassisch äquivalent, wie bekannt, und die richtigen Formeln $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{C}^* \supset \mathfrak{C}$, welche zusammen die Äquivalenz ausdrücken, lassen sich in unserem logischen Formalismus (§ 2 ohne 2.14) herleiten. (Wir führen dies nicht aus, es ist mit Hilfe von H.-A. und der Arbeit von Heyting unschwer einzusehen.) Wenn nun $\mathfrak{C}$ klassisch herleitbar ist, so ist $\mathfrak{C}^*$ nach Satz III intuitionistisch herleitbar, und wenn $\mathfrak{C}^*$ intuitionistisch herleitbar ist, ist $\mathfrak{C}$ mit Hilfe von $\mathfrak{C}^* \supset \mathfrak{C}$ klassisch herleitbar.

5.5. Satz VI. Wenn die intuitionistische Arithmetik widerspruchsfrei ist, so ist auch die klassische Arithmetik widerspruchsfrei.

5.51. Daß die Arithmetik widerspruchsfrei sei, bedeutet formal: Es gibt keine Herleitung mit einer Endformel der Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A}$ irgendeine Formel ist.
5.6. Zum Beweise von Satz VI nehmen wir an, es gäbe eine solche Beweisfigur in der klassischen Arithmetik. Dann ließe sich nach Satz III eine intuitionistische Beweisfigur angeben, deren Endformel von der Form $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg\mathfrak{A}^*$ wäre. Dann wäre also auch die intuitionistische Arithmetik nicht widerspruchsfrei.

5.7. Satz VII. Zu jeder rein logischen Formel gibt es eine klassisch äquivalente Formel, die dann und nur dann in der intuitionistischen Prädikatenlogik herleitbar ist, wenn jene in der klassischen Prädikatenlogik herleitbar ist.

5.71. Unter einer rein logischen Formel verstehen wir eine Formel, die (außer den logischen Zeichen) nur Variabeln (Gegenstands- und Aussagenvariabeln) enthält (also keine Zeichen für bestimmte Gegenstände, bestimmte Funktionen und bestimmte Prädikate).
Unter einer Beweisfigur der klassischen Prädikatenlogik verstehen wir eine Beweisfigur mit den Axiomformeln 2.11 bis 2.13 und sämtlichen Operationsregeln (2.2), wobei letztere jedoch nur so angewandt werden dürfen, daß immer wieder rein logische Formeln entstehen (wie die genannten Axiomformeln es schon sind). Das heißt für freie Gegenstandsvariabeln dürfen nur wieder Gegenstandsvariabeln eingesetzt werden (2.232), für Aussagenvariabeln dürfen nur rein logische Formeln eingesetzt werden (2.233).

Für eine Beweisfigur der intuitionistischen Prädikatenlogik gilt dasselbe, nur darf hier die Axiomformel 2.11 nicht verwendet werden.
5.8. Der Beweis von Satz VII ergibt sich wie der von Satz V, wenn man nur die Sätze I bis III und ihre Beweise auf Herleitungen der Prädikatenlogik spezialisiert. Man überlegt sich leicht, daß dabei alles in Ordnung bleibt.
Aus Satz VII folgt z. B., daß das „Entscheidungsproblem" für die klassische Prädikatenlogik gelöst wäre, wenn es für die intuitionistische Prädikatenlogik gelöst wäre. (Das umgekehrte folgt nicht.)

§6

Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
Entbehrlichkeit der Negation in der intuitionistischen Arithmetik

6.1. Einige Bemerkungen zur Frage der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik: Wenn man die intuitionistische Arithmetik als widerspruchsfrei hinnimmt, so ist durch unseren Satz VI auch die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik gesichert. Sieht man jedoch als sichere Grundlage nur einen engeren, wie etwa den von Hilbert in seiner Abhandlung „Über das Unendliche"[7] skizzierten „finiten" Standpunkt an, so verbleibt noch die Aufgabe, die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Arithmetik von diesem Standpunkte aus zu beweisen. Ob das überhaupt möglich ist, kann als fraglich gelten, da Gödel[8] gezeigt hat, daß sich die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik (genauer: eine äquivalente arithmetische Aussage) innerhalb der Arithmetik selbst nicht beweisen läßt (vorausgesetzt, daß die Arithmetik widerspruchsfrei ist). Unser Satz VI steht hierzu nicht im Widerspruch, er führt ja nur die Widerspruchsfreiheit der

[7] D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen **95** (1926).
[8] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys. **38** (1931).

klassischen Arithmetik auf die der intuitionistischen Arithmetik zurück, und letztere bleibt nach wie vor unbewiesen. Wendet man das Ergebnis von Gödel an, so folgt also, daß sich die Widerspruchsfreiheit der *intuitionistischen* Arithmetik innerhalb der *klassischen* Arithmetik nicht beweisen läßt (vorausgesetzt, daß die Arithmetik widerspruchsfrei ist).

6.2. Entbehrlichkeit der Negation in der intuitionistischen Arithmetik.

Man kann in der intuitionistischen Arithmetik die Negation ganz entbehren, indem man $\neg\mathfrak{A}$ als Abkürzung für $\mathfrak{A} \supset 1 \neq 1$ erklärt, und die „Ungleichheit" als Grundprädikat ansieht, für das die Axiomformeln aufgestellt werden: $x \neq y \cdot \supset : \neg \cdot x = y$ und $\neg \cdot x = y : \supset x \neq y$ (wobei also $\neg \cdot x = y$ nur $x = y \cdot \supset \cdot 1 \neq 1$ bedeutet). Diese Auffassung der Negation is korrekt, da $\neg A \cdot \supset (A \supset \neg \cdot 1 = 1)$ und $(A \supset \neg \cdot 1 = 1) \supset \neg A$ intuitionistisch herleitbare Formeln sind (2.1210, und 2.141, 2.125, 2.1211 mit 2.34).

Alsdann wird die Axiomformel 2.1211 herleitbar (mittels 2.33, 2.126), die andere Axiomformel für die Negation, 2.1210, wird äquivalent mit $1 \neq 1 \supset B$. Man kann diese Formel als arithmetische Axiomformel nehmen, man kann sie aber auch ganz weglassen und sich damit begnügen, daß $1 \neq 1 \supset \mathfrak{A}$ stets herleitbar ist, wenn $\mathfrak{A}$ keine Aussagenvariabeln enthält.

6.21. Letzteres folgt so: Zunächst gilt $1 \neq 1 \cdot \supset : B \supset \cdot 1 \neq 1$ (2.125) d. h. $1 \neq 1 \cdot \supset \neg B$; speziell $1 \neq 1 \cdot \supset : \neg\neg \cdot x = y$, also (mit 2.148) $1 \neq 1 \cdot \supset \cdot x = y$. Ebenso erhält man $1 \neq 1 \cdot \supset \cdot x < y$. Nun setzt sich (1.8) eine beliebige Formel $\mathfrak{A}$ ohne Aussagenvariabeln aus Elementarformeln $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{i}, \ldots$ ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ seien Terme) mit Hinzunahme von logischen Zeichen zusammen. Die Formel $1 \neq 1 \supset \mathfrak{C}$ gilt bereits, wenn $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} < \mathfrak{i}, \ldots$ für $\mathfrak{C}$ steht (nach dem vorigen mit 2.232), und bei der Zusammensetzung von $\mathfrak{A}$ überträgt sich ihre Gültigkeit auf die einzelnen Teilformeln von $\mathfrak{A}$ und schließlich auf $\mathfrak{A}$ selbst (gemäß 2.33 für &, 2.127 für $\vee$, 2.125 für $\supset$, 2.22 für $(\mathfrak{x})$, 2.132 für $(E\mathfrak{x})$).