Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 10 — 20. November 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 27. November um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, deren Eigenwerte irrational sind (d.h. in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen).

(ii) Finden Sie eine rationale 2×2 Matrix $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, die keine reellen Eigenwerte hat.

(iii) Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(v) Diagonalisieren Sie die folgende Matrix.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 $(*)$

(i) Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestimmen Sie über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Finden Sie eine Matrix C von der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, die zu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
ähnlich ist, d.h. geben Sie eine invertierbare Matrix P an, so dass $A = PCP^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3

(i) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 15x + 4y + 3z \\ -8x + 10z \\ 6x + 2y + 6z \end{pmatrix}$$

beschriebene lineare Abbildung und seien

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \quad \mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

zwei Basen von $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Matrix M an, so dass gilt $[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = M \cdot [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis, bezüglich der die folgende lineare Abbildung durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

$$T(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ y - 7x \end{pmatrix}$$

(iii) Wir betrachten die lineare Abbildung T mit Standardmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Basis, bezüglich der T durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 5.3, 5.4 und 5.5 Im Folgenden bezeichnet A eine $n \times n$ Matrix.

(i) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A sind linear unabhängig.

(ii) Die Summe zweier Eigenvektoren von A ist wieder ein Eigenvektor von A.

(iii) Wenn A invertierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.

(iv) Wenn A nicht invertierbar ist, dann ist A auch nicht diagonalisierbar.

(v) Wenn A weniger als n verschiedene Eigenwerte hat, dann ist A nicht diagonalisierbar.

(vi) Jeder Eigenvektor einer invertierbaren Matrix A ist auch ein Eigenvektor von A^{-1}.