Eckehardt Spenhoff, Holzwickede

Prozessfähigkeitsindizes (PFI)

Wann wird ein Cp/Cpk oder Pp/Ppk genutzt ?

Die Fachliteratur, der VDA und die DGQ beschreiben die Anwendung von Prozessfähigkeitsindizes uneinheitlich. Im Dschungel von Definitionen und Interpretationen hat selbst der Fachmann seine liebe Not, Klarheit für sein Unternehmen zu gewinnen. Klarheit sollten die zurückgezogene DIN ISO 21747:2007 03 schaffen, diese wurde durch die DIN ISO 22514 2 und die ISO/TR 22514 4:2007 mit eindeutigen Definitionen ersetzt.

Historische Betrachtung

Die Entwicklung der *PFI* (Prozess-Fähigkeits-Indizes, *Cp/Cpk*) basiert auf Qualitätsregelkarten und wurde verbreitet mit dem Erscheinen der von Ford publizierten Richtlinie Q101. Die Richtlinie wurde ersetzt durch eine gemeinsame Schrift der Big Three (GM, Ford, Chrysler) mit dem Titel QS-9000 (Quality System Requirements, deutsch Qualitätsmanagement-System-Forderungen, Aug.1994). In der Zwischenzeit wurden die *PFI (Cp/Cpk)* zu einem Industriestandard der ständig weiter entwickelt wurde. Allerdings unterstellen diese Richtlinien immer einen idealen Prozess und die gezeigten Beispiele beziehen sich immer auf einfache Messungen (wie Längen) in einem Stückgut-Prozess, dagegen sind komplexe Messungen (wie Adhäsion) wie in einem verfahrenstechnischen Prozess nicht vorhanden. Auch zeigen Untersuchungen (*Birgit Kaiser, Hartmut M. W. Nowack: Nur scheinbar stabil, QZ Jahrgang 44 (1999) 6, Carl Hanser Verlag*), dass ideale (stabile, beherrschte) Prozesse eher selten sind. Dies hatten viele Fachleute auch bemerkt und mit der Entwicklung von Six Sigma bei Motorola die feststellten, dass auch stabile Prozesse bis 1.5 Standardabweichungen vom Mittelwert abweichen, wurde ein neuer *PFI (Pp/Ppk)* definiert.
Die Einordnung und Anwendung der verschiedenen Prozessfähigkeitsindizes *(PFI)* ist in der Literatur nicht einheitlich. So definierten der VDA, die DGQ und das Beratungs- und Softwareunternehmen QDAS den *Pp* und *Ppk* (*P* = preliminary) als kurzfristigen Index in der Vorserienphase und den *Cp* und *Cpk* als Langzeitindex. Die scheinbar einleuchtende Begründung ist, dass in der Vorserie ist ein stabiler Prozess eher nicht zu finden ist und dies wird durch den *Pp/Ppk* dokumentiert. Nun taucht aber ein besonderer Unsinn auf, die Forderungen an den *Pp/Ppk* werden enger gefasst als beim *Cp/Cpk*. Dabei sollte man wissen, dass für einen stabilen Prozess *Cp/Cpk* und *Pp/Ppk* gleich sind und für einen instabilen Prozess der *Pp/Ppk* immer niedriger ist. Andere Quellen (*Bower, K. M.: Cpk versus Ppk. ASQ Six Sigma Forum, 2005*) vor allem amerikanische bezeichnen dagegen, dass die *Pp/Ppk* (*P = performance*) Lanzeitindizes und die *Cp/Cpk* Kurzzeitindizes sind. Die Begründung ist, dass für Berechnung von *Cp/Cpk* die Prozesseigenstreuung ermittelt wird. Die Prozesseigenstreuung wird zwar über der gesamten Prozessverlauf ermittelt, aber immer mit kleinen zeitnah entnommenen Stichproben, die Varianzen werden aggregiert, so dass Mittelwertveränderungen nicht Bestandteil der Prozesseigenstreuung sind. Dagegen wird für die Berechnung der *Pp/Ppk* die Gesamtstreuung ermittelt und Mittelwertschwankungen gehen in die Berechnung ein. Die englischsprachige Literatur bezeichnet die *Cp/Cpk*-Indizes als *within indices* oder *short term indices*. *Pp/Ppk*-Indizes werden als *overall indices* oder *long term indices* geführt. Die Automobilindustrie (*AIAG, Quality Systems Requirements, 1995*) weicht von diesen Definitionen ab.
Zeitnah wurde zur Definition von Cp/Cpk ein weiterer *PFI* definiert, es war der Maschinenfähigkeitsindex *Cm/Cmk*. Auch die Nutzung der Maschinenfähigkeitsindizes *Cm/Cmk* werden von der DGQ und dem VDA empfohlen, obwohl klar sein sollte, dass im Falle eines stabilen Prozesses *Cm/Cmk* und *Cp/Cpk* identische Werte liefern, der größere Stichprobenumfang zur Berechnung des *Cm/Cmk* ändert nichts. Gemessen wird immer nur die Prozessfähigkeit und nicht eine Maschinenfähigkeit, deshalb wird bei einem auch kurzfristig instabilen Prozess der *Cm/Cmk* in Richtung *Pp/Ppk* gehen. Der *Cm/Cmk* ist somit völlig überflüssig, wird von Kunden aber nach wie vor gefordert.
Dem Statistiker ist es egal ob ein *Cp/Cpk* oder *Pp/Ppk* berechnet wird, wenn nur der Prozess stabil ist. Für instabile Prozesse dürfen nach den Regeln der Statistik weder *Cp/Cpk* noch *Pp/Ppk* berechnet werden.

In dieser unklaren Situation sollte Normung für Klarheit sorgen. Dies wurde mit dem Erscheinen der DIN ISO 22514 2 und der ISO/TR 22514 4:2007 erreicht. Trotzdem blieben noch einige Fragen offen, vor allem der Rückschritt gegenüber der vorangegangen Norm DIN ISO 21747:2007 03

Grundlagen in der Praxis

Mit der Einführung von Qualitätsregelkarten zu Anfang der dreißiger Jahre des vorherigen Jahrhunderts existierte der Wunsch nach einer Kenngröße, welche die Fähigkeit eines Prozesses beschreibt, um Kundenforderungen zu erfüllen. Zur Konstruktion von Qualitätsregelkarten wurden mindestens 100 Werte empfohlen. Diese waren aufzuteilen in Teilstichproben, etwa 20 Stichproben mit dem Teilstichprobenumfang 5. Die Teilstichproben sollten dann entsprechend den in der Fertigung vorgesehenen Prüfintervallen entnommen werden. Dabei waren die Teile des Teilstichprobenumfangs hintereinander zu entnehmen. Dies wurde gefordert, damit die inhärente Streuung (Prozesseigenstreuung) des Prozesses ermittelt werden konnte. Es sollten nur Streuungen erfasst werden, die auf kleine und zufällige Abweichungen von nicht regelbaren Einflussgrößen verursacht wurden (common causes genannt). Etwaige Trends und Lageveränderungen (special causes genannt) hätten sonst die Streuung vergrößert und zu falschen Eingriffsgrenzen geführt. Abweichungen von der mittleren Lage sollten, wenn sie nicht zufallsbedingt waren, geregelt werden. Ziel war es, stabile und beherrschte Prozesse zu erhalten, weil nur solche Prozesse auch fähig sein konnten. Man sollte aber wissen, selbst wenn der Prozess gut regelbar ist, dauert es im Mittel vier bis fünf Prüfungen (gilt für $\bar{x}-s$-Karte mit $n_j = 5,\ \ 3\sigma$-Grenzen), bevor eine Lageabweichung von einer Standardabweichung erkannt wird. Das heißt, ein Prozess, der über einen längeren Zeitraum beobachtet wurde, muss durchaus nicht stabil sein, auch wenn die Qualitätsregelkarte dies nicht zeigt. Wer mit der Prozessfähigkeit rechnet, kann auf die Regelkarte nicht verzichten. Er sollte aber bedenken, dass:

- die meisten Prozesse nicht stabil und beherrschbar sind,
- viele Prozesse äußerst komplex sind,
- man bei allgemeinen Geschäftsprozessen oft nur 12 Werte pro Jahr erhält,
- Zielwerte aufgrund mangelnder Messtechnik und zeitlicher Effekte nicht exakt einstellbar sind,
- die Prozessfähigkeit, Kundenforderungen zu erfüllen, gemessen und beurteilt werden muss,
- nur eine normgerechte Methodik, durch die Verwendung von *Cp*, *Cpk*, *Pp* und *Ppk*, eine angemessene Beurteilung zulässt.

Mit Beginn der achtziger Jahre wurden dann die verschiedenen Prozessfähigkeitsindizes entwickelt. Heute weiß man, dass der Wunsch nach absolut stabilen Prozessen ein frommer ist. Manche Chargenprozesse weisen innerhalb einer Charge geringe Streuungen zwischen den Chargen aber große Abweichungen auf. Viele Prozessanalysen und die Erfahrung zeigen, dass nur wenige Prozesse als stabil anzusehen sind. Die einfache Regelung vieler Prozesse wird durch ihre Komplexität deutlich erschwert. Dies geht einher mit dem Gebrauch komplexer Messmethoden, etwa Schälkraft- oder Reißfestigkeitsmessungen, deren Präzision zu wünschen übrig lässt. Dies führt dazu, dass auch gut geregelte Prozesse nicht stabil sein können. Wenn zum Beispiel eine reflektierende Folie produziert wird, sind viele vernetzte Arbeitsvorgänge notwendig. Reflexion, Farbe, Dehnung, Reißfestigkeit etc. können erst nach Fertigstellung einer Charge geprüft werden. Regelungsmaßnahmen würden erst bei der nächsten Charge wirksam, ohne dass man weiß, welche Eigenschaften die nächste Charge hat. Änderungen der Einflussgrößen (Prozesseinstellungen) wirken sich zudem auf die Zielgrößen (Produkteigenschaften) unterschiedlich aus. Ähnlich komplizierte Prozesse findet man branchenübergreifend, etwa in der Roheisengewinnung, der Stromerzeugung, der Autoreifen- oder Papierherstellung. Diese Schwierigkeiten haben unter anderem dazu geführt, dass mit Hilfe statistischer Versuchsplanung , auch Design of Experiment (DoE), die Prozesse heute optimal eingestellt werden können. Die Einflussgrößen werden mittels Qualitätsregelkarten oder Regelungsanlagen gesteuert, während Produkteigenschaften nur überwacht werden. Sollten die Produkteigenschaften sich verändern, regelt man nicht mittels Einflussgrößen, da diese optimal eingestellt sind. Man sucht vielmehr die Ursache für eine Abweichung und eliminiert sie. Dies ist aber keine Regelung im engeren Sinn, weil Fehlerursachen nur selten kurzfristig beseitigt werden können.

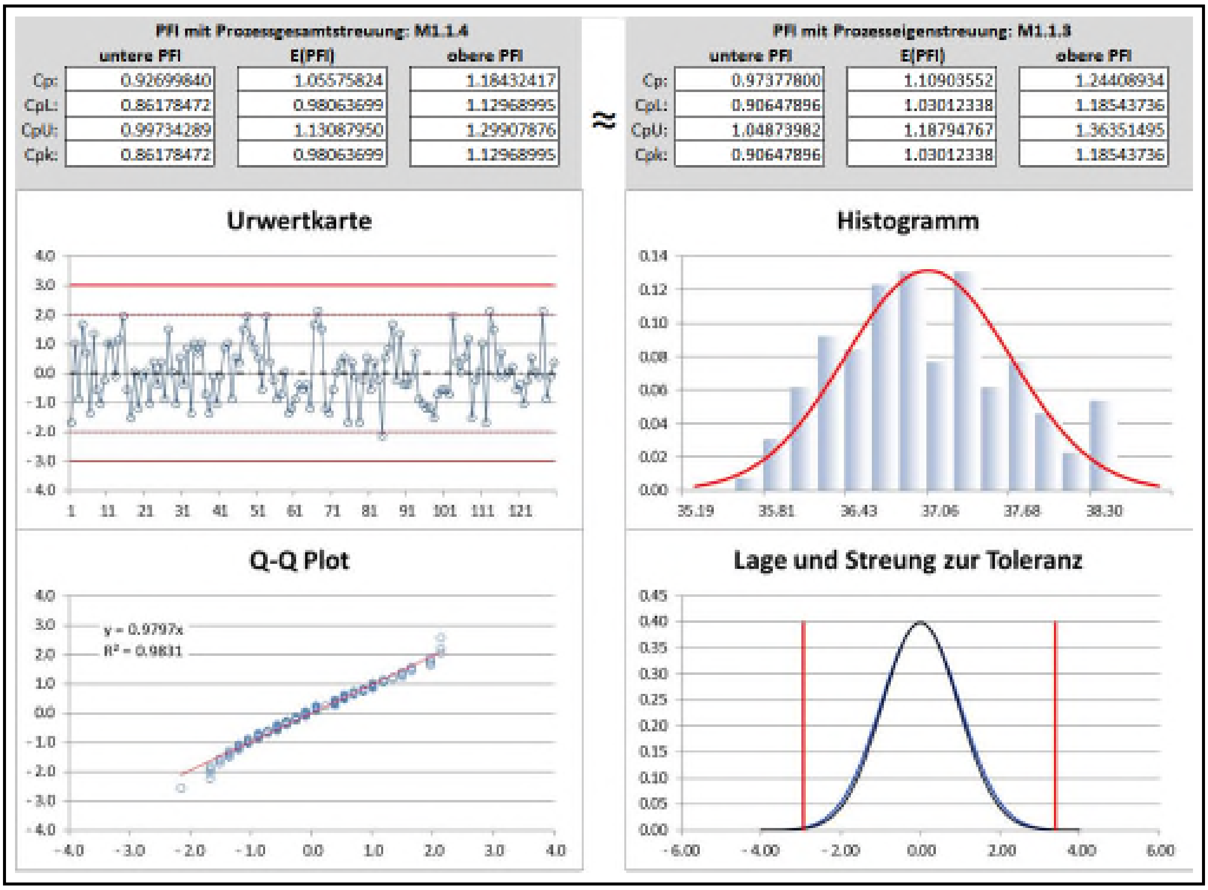

Abb.: 1 Bei stabilen Prozessen sind Prozessgesamt.- und Prozesseigenstreuung ungefähr gleich.

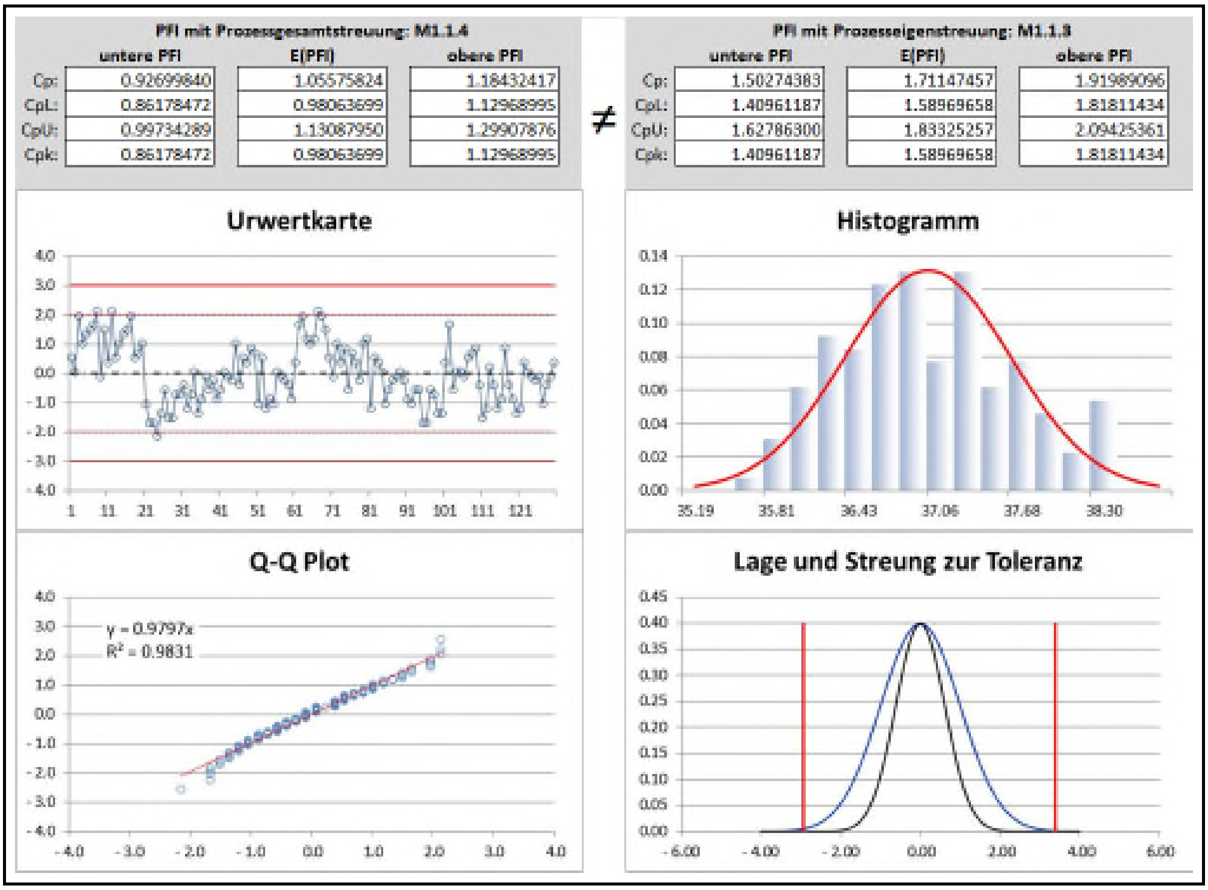

Abb.: 2 Ein instabiler Prozess ist an Mustern zu erkennen.

Neben den technischen Prozessen, bei denen ein physikalisches Produkt entsteht, werden zunehmend auch Geschäftsprozesse mittels Qualitätsregelkarten überwacht und geregelt. Regelungen des Prozesses sind meist nur bedingt möglich, weil beispielsweise Daten nur monatlich zur Verfügung stehen oder zusätzliche Ressourcen notwendig werden. Betrachten wir ein Call Center, in dem halbstündlich der Servicegrad ermittelt wird. Man wird versuchen, die Zielvorgaben bezüglich der Wartezeit und verlorener Anrufe möglichst einzuhalten, weil im Fall von zu guten Ergebnissen unwirtschaftlich gearbeitet wird und im Fall schlechter Ergebnisse Kunden unzufrieden werden. Fast ausschließlich wird dies durch die Anzahl der Agenten geregelt. Bei plötzlich auftretenden Problemen wird man nicht sofort neue Mitarbeiter einstellen, sondern erst, wenn sich der neue Bedarf etabliert. Auf zeitliche Verschiebungen der Schwerpunkte kann man in der Regel kurzfristig reagieren. Das Ergebnis eines solchen Prozesses kann nur bedingt stabil sein. Trotzdem ist der Einsatz der Regelkarte unerlässlich, wenn man auf Dauer sein Ziel erreichen möchte.
Qualitätsregelkarten zeigen und bewerten zwar einen Prozess, doch die Kundenforderungen spielen keine Rolle. Will man zwei unabhängige Variablen miteinander verbinden, wird eine Verhältniszahl spezifiziert. Dazu folgende Überlegung: Das Intervall $\pm 3\sigma$ umfasst modellmäßig 99,73 % aller Werte, für die Praxis sind dies 98 % bis 100 %. Deshalb wird dieses Intervall auch als die natürliche Prozessstreuung bezeichnet. Die Kundenforderung drückt sich in der Toleranz aus. Das Verhältnis dieser Kenngrößen ist die Basis der Fähigkeitsindizes:

$$Prozessfähigkeit = \frac{Toleranz}{natürliche\ Prozessstreuung}$$

Im Fall eines stabilen Prozesses mit normalverteilten Werten ergeben sich die bekannten Formeln für Berechnung des *Cp*:

$$Cp = \frac{OGW - UGW}{6\hat{\sigma}}$$

Im Fall eines instabilen Prozesses mit beliebig verteilten Werten ergeben sich die Formeln für Berechnung des *Pp*:

$$Cp \text{ oder } Pp = \frac{OGW - UGW}{X_{0.99865} - X_{0.00135}}$$

Weil der *Cp* bzw. *Pp* die Lage der Verteilung nicht berücksichtigen, obwohl sie einen großen Einfluss auf die Prozessfähigkeit hat, wurde der *Cpk* bzw. *Ppk* definiert. *Der Wert k* ist also die größte Abweichung des Mittelwertes von dem gewünschten Zielwert. Es ergeben sich der *Cpk* aus:

$$Cpk = Min\left|\frac{ZW - UGW}{3\hat{\sigma}};\ \frac{OGW - ZW}{3\hat{\sigma}}\right|$$

Allgemeiner gilt:

$$Cpk \text{ oder } Ppk = Min\left|\frac{ZW - UGW}{X_{0.5} - X_{0.00135}};\ \frac{OGW - ZW}{X_{0.99865} - X_{0.5}}\right|$$

Die Streuung $\hat{\sigma}$ und auch die Perzentile $X_{0.00135}$, $X_{0.5}$, $X_{0.99865}$ können nun auf verschiedene Arten geschätzt werden, die alle genutzt werden dürfen, obwohl es Unterschiede in Effizienz der Schätzungen gibt.

Die zeitabhängigen Verteilungsmodelle in der Normung

Die Fertigstellung der DIN ISO 21747:2007-03 war ein Quantensprung zur Berechnung von *PFI*. So wurden erstmals in einer Norm die zeitabhängigen Verteilungsmodelle beschrieben. Zur Berechnung der *PFI* wurden vier Hauptmethoden M1, M2, M3 und M4 beschrieben und angewendet. Damit war es möglich PFI-Berechnungen gleichermaßen für verfahrenstechnische und Stückgut-Prozesse anzuwenden. Leider waren diese Methoden nur in wenigen kommerziellen Programmen zu finden. Die teilweise aufwendigen Berechnungen erschwerten die breite Anwendung dieser Methoden. Das Ergebnis ist die DIN ISO 22514-2 und die ISO/TR 22514-4:2007, die DIN ISO 21747:2007-03 wurde zurück gezogen und DIN

ISO 22514 etabliert. Dieses ist aber ein teilweiser Rückschritt, weil die Berechnung der *PFI* mit erweiterten Grenzen (M2 und M3) nicht mehr Bestandteil der Norm ist. Noch gravierender ist der Wegfall der Methode M4 deren Basis der Fehleranteil der Gesamtstichprobe ist. Allerdings gab es eine wünschenswerte Klarstellung bezüglich der Anwendung von *Cp/Cpk* und *Pp/Ppk*.
Das gewünschte zeitabhängige Verteilungsmodell gemäß *Shewhart* basiert auf einem qualitätsfähigen, beherrschten und stabilen Prozess. Dieses Modell A1 ist eine starke Einschränkung für die Anwendung von Prozessfähigkeitsindizes wie den *Cp/Cpk*. Deshalb sollen hier auch andere Prozessmodelle diskutiert und die Anwendung von *Pp/Ppk* angegeben werden.

Zeitabhängiges Verteilungsmodell								
	A1	A2	B	C1	C2	C3	C4	D
Parameterverhalten								
Lage	*konstant*	*konstant*	*konstant*	*zufällig*	*zufällig*	*systematisch*	*zufällig / systematisch*	*zufällig / systematisch*
Streuung	*konstant*	*konstant*	*zufällig / systematisch*	*konstant*	*konstant*	*konstant*	*konstant*	*zufällig / systematisch*
Verteilung								
momentan	*normal*	*unimodal*	*normal*	*normal*	*normal*	*beliebig*	*beliebig*	*beliebig*
resultierend	*normal*	*unimodal*	*unimodal*	*normal*	*unimodal*	*beliebig*	*beliebig*	*beliebig*
Berechnungsmethode nach DIN ISO 21747 zurück gezogen								
M1x.1	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
M1x.2	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
M1x.3	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
M1x.4	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
M1x.5	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*	*bedingt ok*
M1x.6	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*
M2	*bedingt ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*nicht ok*
M3	*bedingt ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*nicht ok*
M4	*ok*	*ok*	*nicht ok*	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
Berechnungsmethode nach DIN ISO 22514								
Mx.1 statt M1x.6	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*
Mx.2 statt M1x.1	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
Mx.3 statt M1x.2	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
Mx.4 statt M1x.3	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*
Mx.5 statt M1x.4	*ok*	*ok*	*ok*	*ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*nicht ok*	*ok*
M2, M3, M4	*ersatzlos gestrichen*							

Abb.: 3 Tabelle der Verfahren für zeitabhängige Verteilungsmodelle

Wir erkennen, dass die zeitabhängigen Verteilungsmodelle in den Normen gleich geblieben sind, die Berechnungsmethoden umbenannt und teilweise gestrichen wurden. Nur die zeitabhängigen Verteilungsmodelle A1 und A2 sind als stabil anzusehen und rechtfertigen die Verwendung von *Cp/Cpk* für alle anderen zeitabhängigen Verteilungsmodelle sollte nur *Pp/Ppk* verwendet werden. Die Berechnungen von *Cp/Cpk* und *Pp/Ppk* müssen sich nicht unterscheiden, die Prozesseigenstreuung darf allerdings nur bei dem zeitabhängigen Verteilungsmodell A1 verwendet werden.

Zeitabhängiges Verteilungsmodell A1

Das zeitabhängiges Verteilungsmodell A1 steht für einen stabilen beherrschten Prozess, dessen Momentanverteilungen und resultierende Verteilung normalverteilt ist. Die Parameter Mittelwert und Standardabweichung variieren nur innerhalb der Zufallsgrenzen. Solche Prozesse sind selten, weil konstante Herstellungsbedingungen (kein Mitarbeitereinfluss, keine Rohmaterialschwankungen, keine Maschineneinflüsse, etc.) vorausgesetzt werden müssen. Idealer, anzustrebender Prozess, der die Grundlage einer klassischen Shewhart-Karte ist.

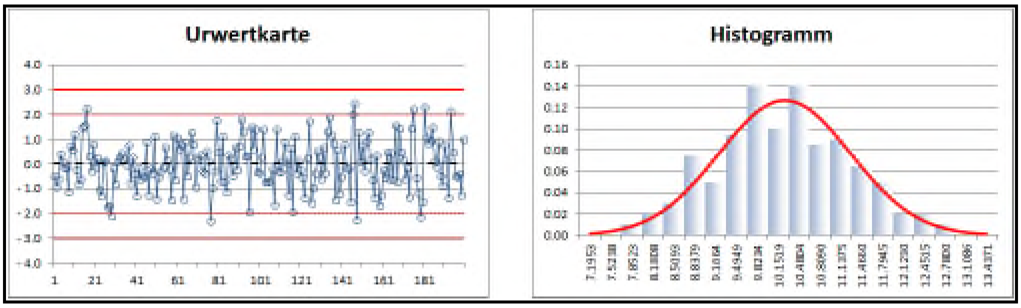

Abb.: 4 Zeitabhängiges Verteilungsmodell A1

Zeitabhängiges Verteilungsmodell A2

Wie beim zeitabhängigen Verteilungsmodell A1 sind Lage und Streuung konstant. Das zeitabhängige Verteilungsmodell A2 steht für einen stabilen beherrschten Prozess, dessen Momentanverteilungen und resultierende Verteilung aber nicht normalverteilt sind. Diese Verteilungsformen sind häufig einseitig durch Null begrenzt. Beispiele sind: Logarithmische Normalverteilung, harmonische Normalverteilung, Extremwertverteilungen, etc. Die Gründe für solche Verteilungen sind äußerst vielfältig, so dass Beispiele (absolute Beträge, Rautiefen, Lebensdauern, Wasserstände, Leistung / Zeit, etc.) nur einen sehr kleinen Ausschnitt möglicher Fälle darstellen. Durch geeignete Transformationen kann ein zeitabhängiges Verteilungsmodell A1 erreicht werden. Es ist aber auch möglich mit der richtigen statistischen Verteilung die PFI zu berechnen.

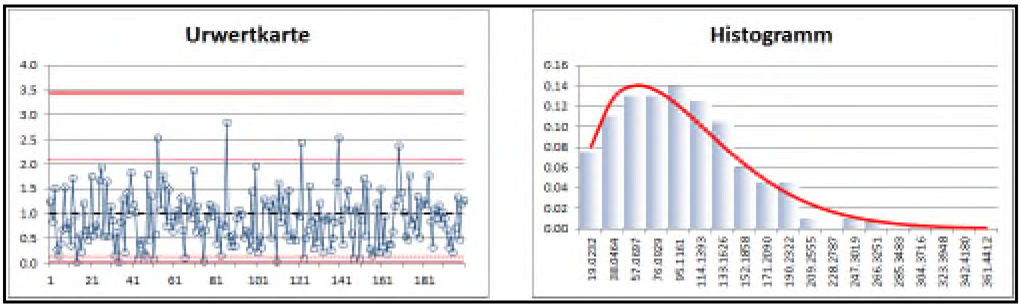

Abb.: 5 Zeitabhängiges Verteilungsmodell A2

Zeitabhängiges Verteilungsmodell B

Das zeitabhängiges Verteilungsmodell B stellt einen Prozess dar, dessen Lage konstant ist, dessen Streuung sich aber verändert. Alle Momentanverteilungen sind normalverteilt, nicht jedoch die resultierende Verteilung, diese ist immer eine spitzgipflige Verteilung. Durch geeignete Transformationen oder die Zerlegung in einer Mischungsanalyse lässt sich die Berechnung der PFI mit der Normalverteilung oder Mischungsanalyse durchführen. Solche Prozesse können auftreten, wenn die verwendeten Rohmaterialien nicht homogenisierte Naturstoffe sind. Auch verschiedene Güteprüfer können solche Effekte verursachen, ebenso verschiedene Herstellungsanlagen.

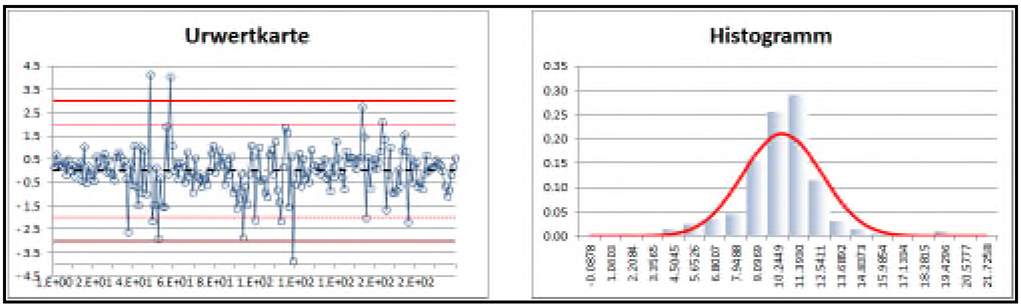

Abb.: 6 Zeitabhängiges Verteilungsmodell B

Zeitabhängiges Verteilungsmodell C1
Das zeitabhängiges Verteilungsmodell C1 ist die Streuung konstant, nicht jedoch die Lage. Die Momentanverteilung ist normalverteilt. Die Lage ändert sich zufällig, dabei sind die zufälligen Änderungen wieder normalverteilt, was eine normalverteilte, resultierende Verteilung zur Folge hat. Dies ist ein gar nicht seltener Fall, wenn Rohmaterial-Chargen (vielleicht homogenisiert, mehrere Rohmaterialchargen werden vor der Weiterverarbeitung gemischt) nur geringfügig aber zufällig streuen ist dieses Modell häufig zutreffend.

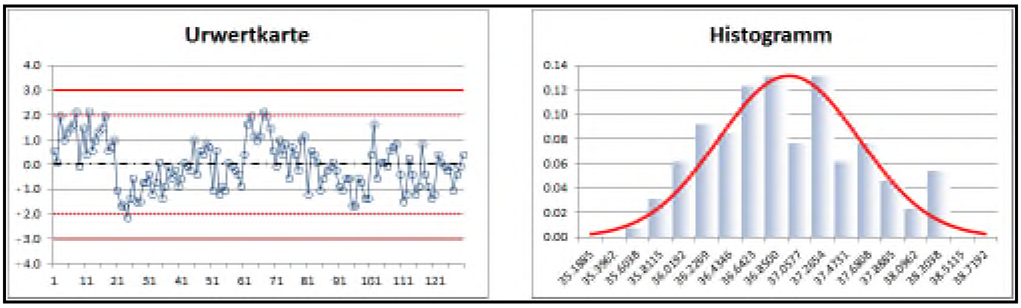

Abb.: 7 Zeitabhängiges Verteilungsmodell C1

Zeitabhängiges Verteilungsmodell C2
Wie beim zeitabhängiges Verteilungsmodell C1 ist die Streuung konstant. Die Momentanverteilung ist normalverteilt. Die Lage ändert sich zufällig und ist beliebig verteilt, so dass die resultierende Verteilung nicht normalverteilt ist. Durch geeignete Transformationen kann dieses zeitabhängige Verteilungsmodell C2 in ein C1 überführt werden. Dieses Verteilungsmodell ist eher selten anzutreffen.

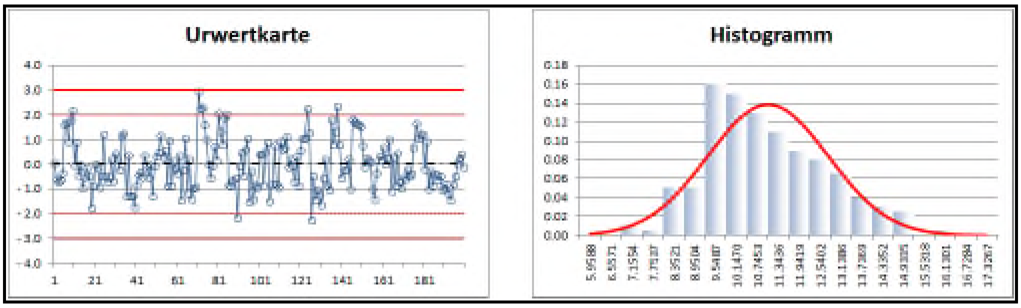

Abb.: 8 Zeitabhängiges Verteilungsmodell C2

Zeitabhängiges Verteilungsmodell C3
Bei dem zeitabhängigen Verteilungsmodell C3 ist die Streuung konstant. Allerdings ändert der Prozess seine Lage systematisch. Dadurch ergibt sich eine beliebig verteilte, resultierende Verteilung. Typische Prozesse sind Trendprozesse z.B. Aufgrund von Verschleiß. Die systematischen Veränderungen können auch zyklisch erfolgen. Dies ist in der Regel dann der Fall, wenn bei einem Verschleiß in festen Zeitabständen nachgestellt wird. Bei periodischen Einflüssen kann ein ähnliches Verhalten festgestellt werden.

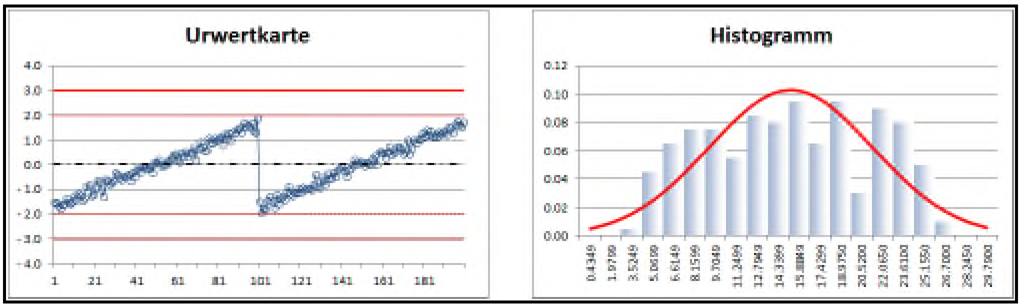

Abb.: 9 Zeitabhängiges Verteilungsmodell C3

Zeitabhängiges Verteilungsmodell C4
Beim zeitabhängigen Verteilungsmodell C4 ist die Streuung konstant, Während die Prozesslage sich zufällig oder systematisch verändert. Die resultierende Verteilung ist beliebig und häufig auch mehrgipflig.

Typische Prozesse, bei denen dieses zeitabhängige Verteilungsmodell vorkommt, sind Prozesse, bei denen die Variation aufgrund von Chargen- oder Werkzeugwechsel entstehen. Dieses zeitabhängige Verteilungsmodell ist um so deutlicher ausgeprägt, je kleiner die Streuung der Momentanverteilung im Vergleich zur Streuung der Prozesslage ist.

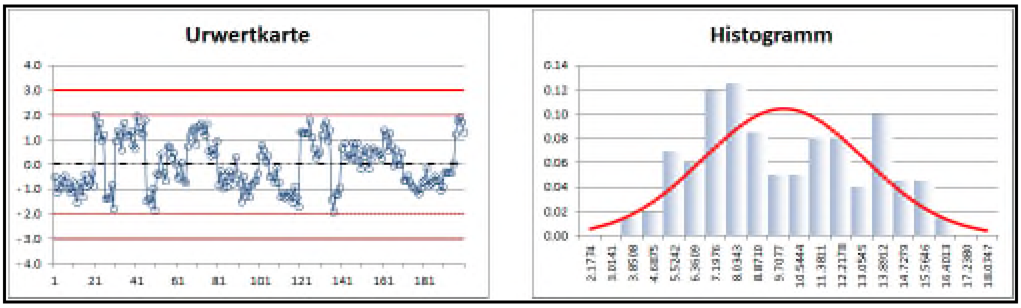

Abb.: 10 Zeitabhängiges Verteilungsmodell C4

Zeitabhängiges Verteilungsmodell D

Das zeitabhängige Verteilungsmodell D ist der schlechteste Fall, d.h. alle Parameter können sich sowohl zufällig wie systematisch ändern. Deshalb ist die Momentanverteilung beliebig und manchmal mehrgipflig, wie auch die resultierende Verteilung. Dieser Fall tritt oft ein, wenn viele Einflussgrößen manuell geregelt werden. Der Prozess wird häufig übersteuert.

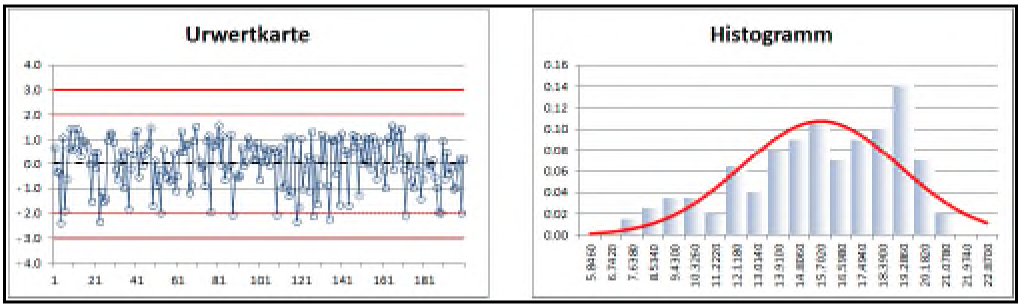

Abb.: 11 Zeitabhängiges Verteilungsmodell D

Die Schätzverfahren in den Normen

Wie schon dargestellt, sind ist die Verteilungen der Werte eines Produktmerkmals die Basis für die Berechnung von Cp/Cpk und Pp/Ppk. Die Berechnung dieser Größen beruht auf der Lage und der Streuung der Merkmalswerte bezogen auf die Toleranz.

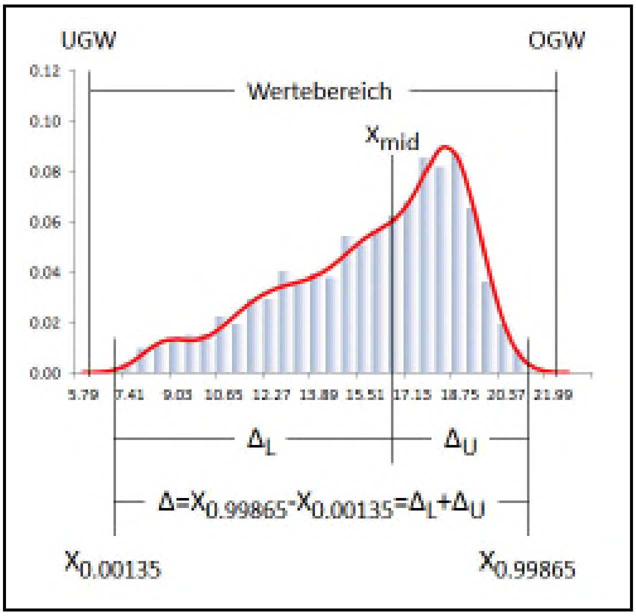

Abb.: 12 Allgemeine graphische Darstellung.

Es bezeichnen X_{mid} die Lage und Δ die Streuung des Prozesses. Ihre genauen Bestimmungen werden später in Abhängigkeit vom gewählten Verfahren angegeben. Die Streuung wird durch den unteren Bezugsgrenzwert $X_{0.00135}$ und den oberen Bezugsgrenzwert $X_{0.99865}$ begrenzt. Dann gelten

$$\Delta_L = X_{mid} - X_{0.00135}$$

und

$$\Delta_U = X_{0.99865} - X_{mid}$$

Die Prozessleistungskenngrößen sind definiert als Quotienten des Wertes eines geometrischen Parameters der Verteilung zur festgelegten Toleranz:

- potenzieller Prozessleistungsindex $P_p = \dfrac{OGW - UGW}{\Delta}$
- unterer Prozessleistungsindex $P_{pL} = \dfrac{X_{mid} - UGW}{\Delta_L}$
- oberer Prozessleistungsindex $P_{pU} = \dfrac{OGW - X_{mid}}{\Delta_U}$
- kleinster Prozessleistungsindex $P_{pk} = min\left|P_{pL},\ P_{pU}\right|$

Wenn ein Prozess stabil ist, kann ihm ein Fähigkeitsindex zugeordnet werden. Die Gleichungen sind die gleichen wie für den entsprechenden Leistungsindex:

- potenzieller Prozessfähigkeitsindex $C_p = \dfrac{OGW - UGW}{\Delta}$
- unterer Prozessfähigkeitsindex $C_{pL} = \dfrac{X_{mid} - UGW}{\Delta_L}$
- oberer Prozessfähigkeitsindex $C_{pU} = \dfrac{OGW - X_{mid}}{\Delta_U}$
- kleinster Prozessfähigkeitsindex $C_{pk} = min\left|C_{pL},\ C_{pU}\right|$

Es gibt mehrere Schätzer für die Lage X_{mid} und die Streuung Δ eines gegebenen Datensatzes.
Die Norm DIN ISO 21747 definiert vier Hauptverfahren zur Berechnung der PFI. Die Norm DIN ISO 22514 kennt nur noch ein Hauptverfahren. Zu diesen grundlegenden Verfahren zählen:

- **M1, l, d: allgemeines Verfahren (DIN ISO 21747)**
  Die Berechnung wird mittels Lage X_{mid} und Streuung Δ durchgeführt. Die Indizes l (location) und d (dispersion) stehen für die unterschiedlichen Schätzungen der Lage- und Streuungsparameter.
- **M, l, d: allgemeines Verfahren (DIN ISO 22514)**
  Die Berechnung wird mittels Lage X_{mid} und Streuung Δ durchgeführt. Die Indizes l (location) und d (dispersion) stehen für die unterschiedlichen Schätzungen der Lage- und Streuungsparameter.

DIN ISO 22514	DIN ISO 21747	Schätzung	Bemerkung
Typ l = 1	Typ l = 1	$X_{mid} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	Dies ist der beste Schätzer für angenähert normalverteilte Werte und wird bevorzugt bei der Berechnung von PFI und QRK angewendet.
Typ l = 2	Typ l = 2	Messwerte x_i geordnet. *Wenn n ungerade* $X_{mid} = \tilde{x} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ *Wenn n gerade* $X_{mid} = \tilde{x} = \frac{1}{2}\left[x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right]$	Dies ist der beste verteilungsfreie Schätzer (Ordnungsstatistik) und sollte nur verwendet werden, wenn die Verteilung unbekannt ist und nicht ermittelt werden kann. Im Falle einer Normalverteilung ist der Gesamt-Median ein Schätzer des Gesamtmittelwertes mit geringerer Effizienz.
entfallen	Typ l = 3	$X_{mid} = x_{0.5} = F^{-1}_{(0.5\mid\ldots)}$	Dieser Wert ist im Falle der Normalverteilung identisch mit dem Gesamtmittelwert und eine Schätzung des Median. Im Falle einer unbekannten Verteilung der verteilungsgebundene Schätzwert durch den Median ersetzt.

DIN ISO 22514	DIN ISO 21747	Schätzung	Bemerkung
Typ l = 3	Typ l = 4	$X_{mid} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j$	Diese Schätzung steht für den Gesamtmittelwert berechnet aus den Mittelwerten der Teilstichproben, dieser ist identisch mit Gesamtmittelwert aller Einzelwerte, wenn der Stichprobenumfang n_i konstant ist.
Typ l = 4	Typ l = 5	$X_{mid} = \bar{\tilde{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j$	Diese Schätzung steht für den Gesamtmittelwert berechnet aus den Medianen der Teilstichproben. Dies ist eine exotische Definition, allerdings auch ein Schätzer der Lage. Wird kaum angewendet und ist eigentlich überflüssig.

Eine weitere Definition betrifft die Schätzung der Streuung.

DIN ISO 22514	DIN ISO 21747	Schätzung	Bemerkung
Typ d = 2	Typ d = 1	$\Delta = 6 \cdot \sigma \quad \Delta_L = \Delta_U = 3 \cdot \sigma$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j^2} \cdot c_g$ $g = n - m$	Diese Schätzung steht für die Prozesseigenstreuung und wird aus den Varianzen der Teilstichproben ermittelt. Dieser Schätzer eignet sich nur für das zeitabhängige Verteilungsmodell A1.
Typ d = 3	Typ d = 2	$\Delta = 6 \cdot \sigma \quad \Delta_L = \Delta_U = 3 \cdot \sigma$ $\sigma = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j \right) \cdot c_g$ $g = n_i - 1$	Diese Schätzung steht für die Prozesseigenstreuung und wird aus den Standardabweichungen der Teilstichproben ermittelt. Dieser Schätzer eignet sich nur für das zeitabhängige Verteilungsmodell A1.
Typ d = 4	Typ d = 3	$\Delta = 6 \cdot \sigma \quad \Delta_L = \Delta_U = 3 \cdot \sigma$ $\sigma = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} R_j \right) \cdot d_2$	Diese Schätzung steht für die Prozesseigenstreuung ermittelt aus den Spannweiten der Teilstichproben. Dieser Schätzer eignet sich nur für das zeitabhängige Verteilungsmodell A1.
Typ d = 5	Typ d = 4	$\Delta = 6 \cdot \sigma \quad \Delta_L = \Delta_U = 3 \cdot \sigma$ $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \cdot c_g$ $g = n - 1$	Diese Schätzung steht für die Prozessgesamtstreuung ermittelt aus der Varianz aller Werte. Dieser Schätzer eignet sich für die zeitabhängigen Verteilungsmodelle A1 (bester Schätzer), A2 (nach Transformation z.B. logarithmische Normalverteilung), B (nach Johnson-Transformation) und C1 eventuell C2, C3 nach erfolgreicher Transformation.
entfallen	Typ d = 5	$\Delta = R$ $\hat{\Delta}_L = X_{mid} - \min(x_1)$ $\hat{\Delta}_U = \max(x_i) - X_{mid}$	Diese Schätzung steht für die Prozessgesamtstreuung ermittelt aus den Extremwerten aller Werte. Dieser Schätzer eignet sich für alle zeitabhängigen Verteilungsmodelle. Ist aber kein guter Schätzer, weil der Schätzer eine von der Verteilung und dem Umfang der Untergruppe abhängige systematische Abweichung aufweist.
Typ d = 1	Typ d = 6	$\Delta = X_{0.99865} - X_{0.00135}$ $\Delta_L = X_{mid} - X_{0.00135}$ $\Delta_U = X_{0.99865} - X_{mid}$	Diese Schätzung steht für die Prozessgesamtstreuung ermittelt aus den Quantilen $X_{0.00135}$, $X_{0.5}$ und $X_{0.99865}$ aller Werte. Dieser Schätzer eignet sich für alle zeitabhängigen Verteilungsmodelle und ist ein exakter Schätzer, wenn die Quantile gemäß der Verteilungsfunktion berechnet werden. In diesem Fall geht der universelle Charakter des Schätzers verloren, weil Verteilungsfunktionen für die zeitabhängigen Verteilungsmodelle (C3, C4 und D) kaum definiert werden können. Deshalb werden in solchen Fällen die Quantile häufig mit Hilfe der Ordnungsstatistiken (n > 1000) geschätzt. Damit ist die Methode universell und verteilungsfrei.

Eine weitere Schwierigkeit wird in der Norm nicht angesprochen, nämlich welcher Lageparameter l = 1 bis l = 5 soll verwendet werden. Der arithmetische Mittelwert (l = 1) gilt nur für die Normalverteilung, nur der Median (l = 2) unterstützt den universellen Charakter dieser Schätzung.

- **M2, l, d, a (DIN ISO 21747):**

Verfahren mit ausdrückliche Einbeziehung zusätzlicher Streuungen. Bei diesem Verfahren handelt es sich um eine Abwandlung des ersten Verfahrens, die explizit zusätzliche Streuungen μ_{add} berücksichtigt. Die Schätzer für die Streuung mit d = 1, 2, 3 gelten ausschließlich für die Streuung innerhalb der Untergruppen. μ_{add} kann aus der zusätzlichen Streuung zwischen den Untergruppen (Prozessmodelle C und D) geschätzt werden.

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{OGW-UGW}{6\cdot\sigma+\mu_{add}} \\ P_{pL} &= \frac{\bar{x}-UGW}{3\cdot\sigma+0.5\cdot\mu_{add}} \\ P_{pU} &= \frac{OGW-\bar{x}}{3\cdot\sigma+0.5\cdot\mu_{add}} \\ P_{pk} &= \min\left|P_{pL},P_{pU}\right| \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} P_p &= \frac{OGW-UGW}{\Delta+\mu_{add}} \\ P_{pL} &= \frac{\bar{x}-UGW}{\Delta_L+0.5\cdot\mu_{add}} \\ P_{pU} &= \frac{OGW-\bar{x}}{\Delta_U+0.5\cdot\mu_{add}} \\ P_{pk} &= \min\left|P_{pL},P_{pU}\right| \end{aligned}$$

Zur Schätzung der Lage und der Streuung werden dieselben Verfahren wie beim Ansatz M1 verwendet. Dieses Verfahren erweitert die Streuung. Zusätzlich existieren zwei Möglichkeiten zur Schätzung der zusätzlichen Streuung, diese Schätzer für zusätzliche Varianz schätzen die Streuung zwischen verschiedenen Untergruppen. Sie sollten ausschließlich in Verbindung mit einem der Schätzer für die Streuung, d = 1, 2, 3, verwendet werden:

- **a = 1** Spannweite der Stichprobenmittelwerte

  $$\mu_{add} = \max(\bar{x}_i) - \min(\bar{x}_i)$$

  Dies ist ein unzureichendes Verfahren, weil es abhängig ist von der Anzahl der Stichproben und nur größer werden kann. Außerdem ist es nur von extremen Lagen bestimmt.

- **a = 2** wird durch Varianzanalyse (ANOVA) bestimmt. Dies Verfahren wird aufgrund der besseren Güte in dem Add-in verwandt. Dabei ist folgendes Verfahren möglich:

  $$\mu_{add} = 4\cdot s_A \text{ mit } s_A = \sqrt{\frac{1}{n_i}(s_{zwis}^2 - s_{inn}^2)}$$

  wenn die Differenz $s_{zwis}^2 - s_{inn}^2$ kleiner gleich Null ist, wird μ_{add} gleich Null gesetzt. Dieser Schätzer deckt ~95% möglicher Mittelwerte ab. Es ist ein Schätzer zur Definition zweier Mittelwerte:

  $$\mu_{un}^{ob} = \mu \pm 2\cdot s_A$$

- **M3, l, d, a (DIN ISO 21747):**

Ist ein alternatives Verfahren zur ausdrücklichen Einbeziehung zusätzlicher Streuung. Dieses Verfahren ähnelt dem zweiten, jedoch werden die zusätzlichen Streuungen in anderer Weise berücksichtigt. Dieses Verfahren erweitert die Streuung in dem zwei Lagen verwendet werden.

$$\begin{aligned} P_p &= \frac{OGW-UGW-(\mu_{oben}-\mu_{unten})}{6\cdot\sigma} \\ P_{pL} &= \frac{\mu_{unten}-UGW}{3\cdot\sigma} \\ P_{pU} &= \frac{OGW-\mu_{oben}}{3\cdot\sigma} \\ P_{pk} &= \min\left|P_{pL},P_{pU}\right| \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} P_p &= \frac{OGW-UGW-\mu_{add}}{\Delta} \\ P_{pL} &= \frac{\bar{x}-UGW-0.5\cdot\mu_{add}}{\Delta_L} \\ P_{pU} &= \frac{OGW-\bar{x}-0.5\cdot\mu_{add}}{\Delta_U} \\ P_{pk} &= \min\left|P_{pL},P_{pU}\right| \end{aligned}$$

- **M4 (DIN ISO 21747):**

Diese Methode nutzt zur Berechnung der *PFI* die Anteile fehlerhafter Einheiten. Für die Berechnung muss das Verteilungsmodell bekannt sein, damit der Fehleranteil entsprechend dem Verteilungsmodell berechnet werden kann. Der untere Anteil fehlerhafter Einheiten p_L entspricht der Fläche unter der Verteilungskurve links des unteren Grenzwertes. Der obere Anteil fehlerhafter Einheiten p_U entspricht der Fläche unter der Verteilungskurve rechts des oberen Grenzwertes. Die Berechnung ist etwas komplexer als in der Norm dargestellt. Beispiel: Verteilungsmodell: Normalverteilung; *UGW* und *OGW*.

$$p_L = \Phi(UGW \mid \mu, \sigma)$$
$$p_U = 1 - \Phi(OGW \mid \mu, \sigma)$$
$$z_{(1-p_L)} = \Phi^{-1}(1 - p_L \mid 0, 1)$$
$$z_{(1-p_U)} = \Phi^{-1}(1 - p_U \mid 0, 1)$$

Erst nach dieser Berechnung können die Formeln in der Norm weiter verwendet werden. Zuerst werden mit der zu treffenden Verteilungsfunktion (*cdf*) die Fehleranteile geschätzt. Danach werden mit der inversen Standardnormalverteilung die standardisierten Werte (z) der Normalverteilung berechnet.

$$\begin{aligned} C_{pL} &= \frac{z_{(1-p_L)}}{3} \\ C_{pU} &= \frac{z_{(1-p_U)}}{3} \\ C_{pk} &= \min\left|C_{pL}, C_{pU}\right| \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} P_{pL} &= \frac{z_{(1-p_L)}}{3} \\ P_{pU} &= \frac{z_{(1-p_U)}}{3} \\ P_{pk} &= \min\left|P_{pL}, P_{pU}\right| \end{aligned}$$

Das eigentliche Problem mit der Norm ist wie werden die Quantile von $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ berechnet. Die Norm DIN ISO 22514 bietet dazu drei Verfahren, die zur Schätzung von $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ verwendet werden können, es sind folgende:

- Die Gesamtdaten können an eine statistische Verteilung angepasst werden, so dass man die Quantile $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ aus der angepassten resultierenden Verteilung schätzen kann. In diesem Fall könnte man auch das Verfahren M4 nutzen. Die Gesamtdaten dürfen auch transformiert werden um eine Anpassung zu erreichen. Die Norm ISO/TR 22514 4:2007 nutzt dazu die Pearson-Verteilungen, es können stattdessen auch die gleichwertigen Johnson-Transformationen genutzt werden. Die Nachteile dieser Methodik liegen auf der Hand, so können diese Schätzungen bei mehrgipfligen Verteilungen (C3, C4 und D) nicht angewendet.
- Man kann die Quantile $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ direkt mit Hilfe der Ordnungsstatistiken aus den Gesamtdaten schätzen. Um mit dieser Methodik zuverlässige Schätzungen von $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ zu erhalten, muss der Umfang ($n > 1000$) des Datensatzes groß sein. Denn Standardverfahren können keine Werte kleiner X_{min} oder größer X_{max} schätzen. Die Schätzungen liegen immer zwischen X_{min} und X_{max}. Es gibt zwar komplexere Verfahren die mittels Anpassung der Asymptoten an eine Pareto-Verteilung auch Schätzungen kleiner X_{min} bzw. größer X_{max} erlauben. Die Nachteile dieser Methodik sind, nur anwendbar bei großen Gesamtstichprobenumfängen.
- Die Norm schreibt: *Schätze sie von der graphischen Darstellung des Wahrscheinlichkeitsnetzes (siehe ISO 5479). Wenn die Daten keine Normalverteilung bilden, kann es notwendig werden, ein anderes Arbeitsblatt einzusetzen.* Hier ist zu bemerken, dass bei vorliegen einer Normalverteilung die Schätzung mit anderen Methoden effizienter durchgeführt werden kann. Die weitere Frage ist, welches Wahrscheinlichkeitsnetz sollte man verwenden, wenn keine Normalverteilung sondern eine Mischverteilung vorliegt.

Ein weiteres Verfahren, nicht Bestandteil der Norm, ist die Zerlegung einer Mischverteilung in Normal-Verteilungen mittels EM-Algorithmus (es gibt auch andere Verfahren). Nun ist es wieder einfach die Quantile $X_{0.00135}$ und $X_{0.99865}$ mit den Regeln, welche für die Normalverteilungen gelten, zu schätzen. Auch das Verfahren M4 kann problemlos angewendet werden. Für die gesamte Problematik existiert ein Excel Add-in ***OQM-Stat*** das alle beschriebenen Methoden beherrscht.

Literatur

Geiger, W.; Kotte, W.: Handbuch Qualität. Grundlagen und Elemente des Qualitätsmanagements. Vieweg Verlag, Wiesbaden 2005
Box, G.; Luceno, A.: Quality Quandaries - Six Sigma. University of Wisconsin, Madison, 1999
Bower, K. M.: Cpk versus Ppk. ASQ Six Sigma Forum. 2005
Küster Holding GmbH: Qualitätsrichtlinien für Lieferanten, 2003
Knorr-Bremse : Qualitätsmanagement-Programm für die Beschaffung, 2001
VDA-Band 4, Sicherung der Qualität vor Serieneinsatz, 2005
Rinne, H.: Mittag, H.-J.: Prozessfähigkeitsmessung. Carl Hanser Verlag, München 1999
Normen: DIN ISO 21747:2007 03, DIN ISO 22514 2 und ISO/TR 22514 4:2007