Aussagenlogik

Aussagen
Interpretation
Verknüpfen von Aussagen
Tautologie und Widerspruch
Äquivalenz

Aussagen

Aussagen

*Eine **Aussage** ist ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert **wahr** (kurz w bzw. 1) oder **falsch** (kurz f bzw. 0) zuordnen lässt.*

Aussagen

Ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert zuordnen lässt.

Aussagen

Ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert zuordnen lässt.

<u>Beispiel:</u>

„Die Katze ist schwarz."

Aussagen

Ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert zuordnen lässt.

<u>Beispiel:</u>

„Die Katze ist schwarz."

„2 und 4 sind Primzahlen."

Aussagen

Ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert zuordnen lässt.

<u>Beispiel:</u>
„Die Katze ist schwarz."
„2 und 4 sind Primzahlen."

<u>Gegenbeispiel:</u>
„Ist die Katze schwarz?"

Aussagen

Ein Satz, dem sich ein eindeutiger Wahrheitswert zuordnen lässt.

Beispiel:

„Die Katze ist schwarz."

„2 und 4 sind Primzahlen."

Gegenbeispiel:

„Ist die Katze schwarz?"

„Schau hin!"

Aussagen

„Die Katze ist schwarz.“

Aussagen

A := „Die Katze ist schwarz.“

Aussagen

A := „Die Katze ist schwarz."

„Die Katze ist schwarz." =: A

Aussagen

A := „Die Katze ist schwarz.“

„Die Katze ist schwarz.“ =: A

„A ***wird definiert als*** *‚Die Katze ist schwarz.‘“*

Interpretation

Interpretation

*Eine **Interpretation** gibt die **Bedeutung** und damit den **Wahrheitswert** einer Aussage an.*

Interpretation

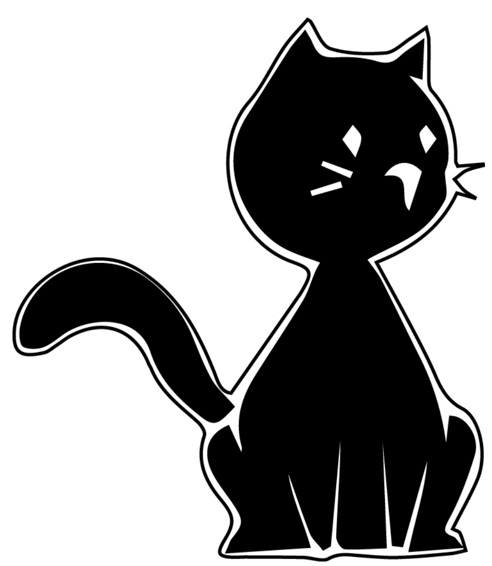
Gibt den Wahrheitswert einer Aussage an.

A := „Die Katze ist schwarz.“

Interpretation

Gibt den Wahrheitswert einer Aussage an.

A := „Die Katze ist schwarz.“

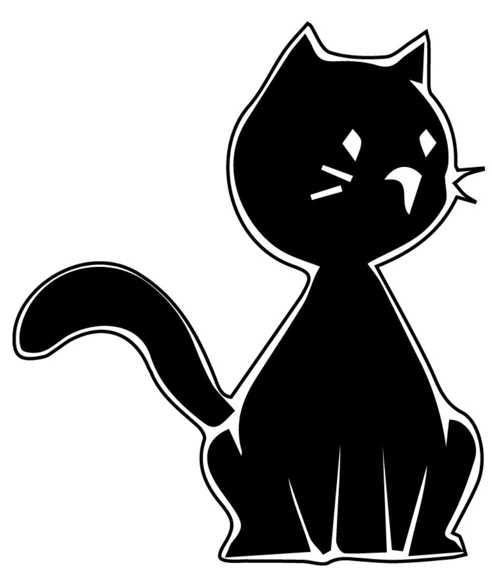


wahr

Interpretation

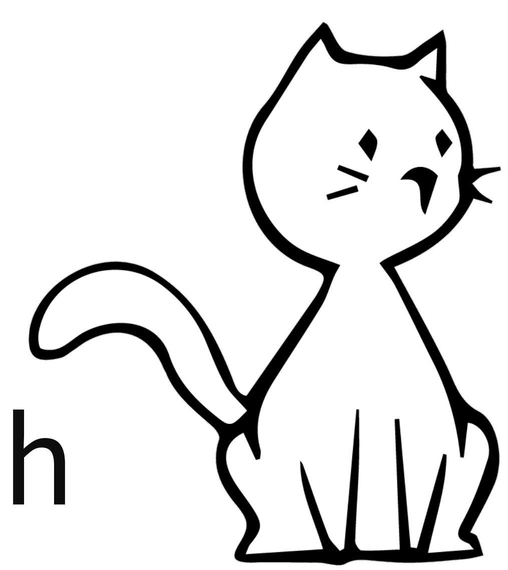
Gibt den Wahrheitswert einer Aussage an.

A := „Die Katze ist schwarz.“



wahr

falsch



Verknüpfen von Aussagen

Verknüpfen von Aussagen

***Junktoren** sind selbst keine Aussagen, können aber genutzt werden, um **Teilaussagen** zu neuen, komplexeren **Aussagen** zu **verknüpfen**.*

Negation – „Nicht“

$\neg$

Negation – „Nicht“

$\neg$

A := „Die Katze ist schwarz.“

($\neg$ A) = „Die Katze ist **nicht** schwarz.“

Negation – „Nicht“

$$\neg$$

*Bei der Negation ist der neue Wahrheitswert das **Gegenteil** des alten Wahrheitswertes.*

Negation – „Nicht“

$$\neg$$

A	$(\neg A)$
f	w
w	f

Konjunktion – „Und“

$\wedge$

Konjunktion – „Und“

$\wedge$

A := „Die Katze ist schwarz.“

B := „Die Katze miaut.“

$(A \wedge B)$ = „Die Katze ist schwarz **und** sie miaut.“

Konjunktion – „Und“

$\wedge$

*Bei der Konjunktion müssen **beide** der Teilaussagen wahr sein, damit die neue Aussage wahr ist.*

Konjunktion – „Und“

$\wedge$

A	B	$(A \wedge B)$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Disjunktion – „Oder“

$\vee$

Disjunktion – „Oder“

$$\vee$$

A := „Die Katze ist schwarz.“

B := „Die Katze miaut.“

$(A \vee B)$ = „Die Katze ist schwarz **oder** sie miaut.“

Disjunktion – „Oder“

$\vee$

*Beim **Inklusiven Oder** muss **mindestens eine** der Teilaussagen wahr sein.*

Disjunktion – „Oder“

$\vee$

A	B	$(A \vee B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Kontravalenz – „Entweder oder“

$\dot{\vee}$

Kontravalenz – „Entweder oder“

$\dot{\vee}$

A := „Die Katze ist schwarz.“

B := „Die Katze miaut.“

$(A \dot{\vee} B)$ = „**Entweder** die Katze ist schwarz **oder** sie miaut.“

Kontravalenz – „Entweder oder“

$\dot{\vee}$

Beim ***Exklusiven Oder*** *muss* ***genau eine*** *der Teilaussagen wahr sein.*

Kontravalenz – „Entweder oder“

$\dot{\vee}$

A	B	$(A \dot{\vee} B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Implikation – „Wenn, dann“

$$\rightarrow$$

Implikation – „Wenn, dann“

$\rightarrow$

A := „Die Katze hat Hunger.“

B := „Die Katze miaut.“

$(A \rightarrow B)$ = „**Wenn** die Katze Hunger hat,

dann miaut sie.“

Implikation – „Wenn, dann“

$$\rightarrow$$

Die Implikation ist nur falsch, wenn aus ***Wahrem*** *etwas* ***Falsches folgt.***

Implikation – „Wenn, dann“

$$\rightarrow$$

A	B	$(A \rightarrow B)$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Äquivalenz – „Genau dann, wenn“

$$\leftrightarrow$$

Äquivalenz – „Genau dann, wenn"

$\leftrightarrow$

A := „Die Katze hat Hunger."

B := „Die Katze miaut."

$(A \leftrightarrow B)$ = „**Genau dann, wenn** die Katze Hunger hat, miaut sie."

Äquivalenz – „Genau dann, wenn“

$$\leftrightarrow$$

Die Äquivalenz ist wahr, wenn beide Teilaussagen den ***gleichen Wahrheitswert*** *haben.*

Äquivalenz – „Genau dann, wenn“

$\leftrightarrow$

Die Äquivalenz ist wahr, wenn beide Teilaussagen den ***gleichen Wahrheitswert*** *haben.*

$(A \leftrightarrow B)$ ist immer dann wahr, wenn sowohl $(A \rightarrow B)$ als auch $(B \rightarrow A)$ wahr sind.

Äquivalenz – „Genau dann, wenn“

$\leftrightarrow$

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Klammerung

„Die Katze ist nicht schwarz und miaut.“

Klammerung

„Die Katze ist nicht schwarz und miaut."

A := „Die Katze ist schwarz."

B := „Die Katze miaut."

Klammerung

„Die Katze ist nicht schwarz und miaut."

A := „Die Katze ist schwarz."

B := „Die Katze miaut."

$(\neg A)$ = „Die Katze ist nicht schwarz."

Klammerung

„Die Katze ist nicht schwarz und miaut."

$A :=$ „Die Katze ist schwarz."

$B :=$ „Die Katze miaut."

$(\neg A) =$ „Die Katze ist nicht schwarz."

$((\neg A) \wedge B) =$ „Die Katze (ist nicht schwarz) und miaut."

Klammerung

$$(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Klammerung

$$(((A \wedge (\neg B)) \wedge C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Aneinander gereihte Konjunktion dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Klammerung

$$(((A \land (\neg B)) \land C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Aneinander gereihte Konjunktion dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Klammerung

$$((A \land (\neg B) \land C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Aneinander gereihte Konjunktion dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Klammerung

$$((A \land (\neg B) \land C) \to (D \leftrightarrow E))$$

Aneinander gereihte Konjunktion dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden.

Das gleiche gilt auch für Disjunktionen.

Klammerung

$$((A \wedge (\neg B) \wedge C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Klammerung

$$((A \wedge (\neg B) \wedge C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$((A \land (\neg B) \land C) \to (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \land \quad , \quad \lor \quad , \quad \to \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$((A \land \neg B \quad \land C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \land \quad , \quad \lor \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$((A \wedge \neg B \wedge C) \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$

Klammerung

$$(\quad A \land \neg B \quad \land C \;\rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \land \quad , \quad \lor \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$(\;A \land \neg B \;\land C \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \land \quad , \quad \lor \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$(\quad A \wedge \neg B \quad \wedge C \rightarrow (D \leftrightarrow E))$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

Klammerung

$$\Big(A \land \neg B \land C \rightarrow (D \leftrightarrow E) \Big)$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$\neg \quad , \quad \land \quad , \quad \lor \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$

Klammerung

$$A \wedge \neg B \wedge C \rightarrow (D \leftrightarrow E)$$

Am stärksten bindende Junktoren:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Klammerung

$$A \land \neg B \land C \rightarrow (D \leftrightarrow E)$$

Tautologie

Tautologie

A := „Die Katze ist schwarz."

Tautologie

A := „Die Katze ist schwarz.“

$$A \vee \neg A$$

Tautologie

A := „Die Katze ist schwarz."

$$A \vee \neg A$$

„Die Katze ist schwarz oder sie ist nicht schwarz."

Tautologie

$$A \vee \neg A$$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
f	w	w
w	f	w

Tautologie

*Eine Aussage, die **unabhängig** von der Interpretation **stets wahr** ist, nennen wir Tautologie.*

Widerspruch

*Eine Aussage, die **unabhängig** von der Interpretation **stets falsch** ist, nennen wir Widerspruch.*

Äquivalenz

Äquivalenz

≡

Zwei Aussagen A und B, die ***für jede*** *gegebene Interpretation* ***stets den selben*** *Wahrheitswert besitzen, nennen wir äquivalent.*

Äquivalenz

$$\equiv$$

*Zwei Aussagen A und B, die **für jede** gegebene Interpretation **stets den selben** Wahrheitswert besitzen, nennen wir äquivalent.*

Es gilt $A \equiv B$ genau dann, wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist.

Äquivalenz – „Genau dann, wenn“

$\leftrightarrow$

Die Äquivalenz ist wahr, wenn beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben.

$(A \leftrightarrow B)$ ist immer dann wahr, wenn sowohl $(A \rightarrow B)$ als auch $(B \rightarrow A)$ wahr sind.

Äquivalenz

$\equiv$

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
f	f				
f	w				
w	f				
w	w				

Äquivalenz

$$\equiv$$

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Äquivalenz

$\equiv$

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv A \leftrightarrow B$$

Äquivalenzumformung

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad A \leftrightarrow B$$

Äquivalenzumformung

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv A \leftrightarrow B$$

$$(A \to B) \wedge (B \to A) \vee (C \to B) \wedge (B \to C)$$

Äquivalenzumformung

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad \equiv \quad A \leftrightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$$

$$\equiv$$

$$(A \leftrightarrow B) \vee$$

Äquivalenzumformung

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A) \equiv A \leftrightarrow B$$

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A) \lor (C \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)$$

$$\equiv$$

$$(A \leftrightarrow B) \lor (C \leftrightarrow B)$$

Äquivalenzumformung

Äquivalenzumformung

Kommutativgesetz:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Äquivalenzumformung

Kommutativgesetz:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Assoziativgesetz:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

Äquivalenzumformung

Kommutativgesetz:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Distributivgesetz:

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Assoziativgesetz:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

Äquivalenzumformung

Kommutativgesetz:

$$A \land B \equiv B \land A$$

$$A \lor B \equiv B \lor A$$

Distributivgesetz:

$$(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C)$$

$$(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$$

Assoziativgesetz:

$$(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$$

$$(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$$

Regel von de Morgan:

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$$

$$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

Äquivalenzumformung

Implikationselimination:

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

Äquivalenzumformung

Implikationselimination:

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

Äquivalenzelimination:

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Äquivalenzumformung

Implikationselimination:

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

Äquivalenzelimination:

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Kontraposition:

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Äquivalenzumformung

Implikationselimination:

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

Äquivalenzelimination:

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Kontraposition:

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Absorbtionsregel:

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

Äquivalenzumformung

Implikationselimination:

$$(A \rightarrow B) \equiv \neg A \vee B$$

Äquivalenzelimination:

$$(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Kontraposition:

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Absorbtionsregel:

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

Doppelnegation:

$$\neg\neg A \equiv A$$

Aussagen sind Sätze, denen man einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann.

Aussagen sind Sätze, denen man einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann.

Interpretationen bestimmen diesen Wahrheitswert.

Aussagen sind Sätze, denen man einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann.

Interpretationen bestimmen diesen Wahrheitswert.

Junktoren verknüpfen Aussagen zu neuen Aussagen.

Aussagen sind Sätze, denen man einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann.

Interpretationen bestimmen diesen Wahrheitswert.

Junktoren verknüpfen Aussagen zu neuen Aussagen.

Der Wahrheitswert mancher Aussagen ist konstant.

Aussagen sind Sätze, denen man einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann.

Interpretationen bestimmen diesen Wahrheitswert.

Junktoren verknüpfen Aussagen zu neuen Aussagen.

Der Wahrheitswert mancher Aussagen ist konstant.

Äquivalente Aussagen können einander ersetzen.