L26

Kurs 01653 — Einführung in die Theoretische Informatik A

Lösungshinweise zur zweiten Klausur am 19. 03. 2011

Aufgabe 1 (a) Die erste Behauptung ist falsch, die beiden anderen treffen zu.

(b) Die zweite Behauptung lässt sich durch vollständige Induktion nach n beweisen. Wir führen dies aus:

Induktionsanfang $n = 0$:

Es sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{3\cdot 0}(1,(0,x,0,\dots)) &= (1,(0,x,0,\dots)) \text{ (da } \mathrm{ES}^0 = \mathrm{id}) \\ &= \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-0}^{x} i, x \dot{-} 0, 0, \dots)\right). \end{aligned}$$

Also trifft die Behauptung in diesem Falle zu.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

Es sei $x \in \mathbb{N}$, und es gelte $x \geq n+1$. Dann gilt sowohl

$$(*) \quad x \geq n$$

als auch

$$(**) \quad x \dot{-} n \neq 0.$$

Wegen $(*)$ liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{ES}^{3\cdot n}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \dots)\right).$$

Mit $(**)$ ergibt sich zudem

$$\begin{aligned} & \mathrm{ES}^3\left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot{-} n, 0, \dots)\right) \\ = & \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i + (x \dot{-} n), x \dot{-} n \dot{-} 1, 0, \dots)\right) \\ = & \left(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot{-} (n+1), 0, \dots)\right), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot(n+1)}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot{-} (n+1), 0, \dots)\right),$$

was zu zeigen war.

(c) Die Behauptung (3) aus (a) ergibt sich aus (2), indem man x für n setzt. Mit (3) folgt dann

$$(\forall x)\, \mathrm{ES}^{3\cdot x+1}\,(1,(0,x,0,\dots)) = \left(4,(\sum_{i=1}^{x} i,0,0,\dots)\right).$$

Gemäß Ein-/Ausgabecodierung für verallgemeinerte Registermaschinen ergibt sich also

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (a) Wir beweisen Behauptung 2 durch vollständige Induktion nach $n = \lg(w)$.

$\underline{n=0:}$ In diesem Fall ist $w = \varepsilon$, und mit $t := 3$ erhalten wir durch leichte Rechnung für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$:

$$\mathrm{ES}^t\,(3,(v,c,\varepsilon Bu)) = (7,(vc,B,u)) = \left(7,(vc\,\mathtt{b}^{\lg(\varepsilon)},B,u)\right).$$

Also gilt die Behauptung in diesem Fall.

$\underline{n \to n+1:}$ Sei nun $\lg(w) = n+1$. Dann gibt es $w' \in \Sigma^*$ und $d \in \Sigma$, so dass $w = dw'$. Es gilt nun für alle $u, v \in \Gamma^*$ und $c \in \Gamma$

$$\mathrm{ES}^3\,(3,(v,c,wBu)) = (3,(vc,\mathtt{b},w'Bu)),$$

und zwar sowohl im Falle $d = \mathtt{a}$ als auch im Falle $d = \mathtt{b}$. Es ist $\lg(w') = n$. Wir wenden jetzt die Induktionsvoraussetzung auf w' an, und zwar mit $\mathtt{b}$ anstelle von c und vc anstelle von v. Danach existiert ein $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}\,(3,(vc,\mathtt{b},w'Bu)) = \left(7,(vc\,\mathtt{b}\mathtt{b}^{\lg(w')},B,u)\right) = \left(7,(vc\,\mathtt{b}^{\lg(w)},B,u)\right).$$

Setzen wir $t := 3 + t'$, dann folgt

$$\mathrm{ES}^t\,(3,(v,c,wBu)) = \left(7,(vc\,\mathtt{b}^{\lg(w)},B,u)\right).$$

Dies war zu zeigen.

(b) Es seien $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gegeben. Für $v = \varepsilon$, $w = w_1$, $u = w_2$ und $c = B$ liefert Behauptung 1 die Existenz eines $t \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^t\,(1,(\varepsilon,B,w_1Bw_2)) = (3,(Bw_1,B,w_2)) = (3,(w_1,B,w_2B)).$$

Für $v = w_1$, $w = w_2$, $u = \varepsilon$ und $c = B$ liefert Behauptung 2 die Existenz eines $t' \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{ES}^{t'}(3, (w_1, B, w_2 B)) = \left(7, (w_1 B\, \mathsf{b}^{\lg(w_2)}, B, \varepsilon)\right).$$

Es folgt

$$\mathrm{ES}^{t+t'}(1, (\varepsilon, B, w_1 B w_2)) = \left(7, (w_1 B\, \mathsf{b}^{\lg(w_2)}, B, \varepsilon)\right).$$

Unter Berücksichtigung der Ein-/Ausgabecodierung für Bandmaschinen ist damit $f_M = f$ gezeigt.

Aufgabe 3 (a) Es sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n, m) := n + m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Diese Funktion ist bekanntermaßen berechenbar. Die Standardnummerierung ν_Σ ist definiert durch $\nu_\Sigma(n) := \mathsf{a}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Man beachte, dass Σ einelementig ist.) Es gilt dann

$$\nu_\Sigma^{-1} g \vec{\nu}_\Sigma(n, m) = \nu_\Sigma^{-1} g\left(\mathsf{a}^n, \mathsf{a}^m\right) = \nu_\Sigma^{-1}\left(\mathsf{a}^n \mathsf{a}^m\right) = \nu_\Sigma^{-1}\left(\mathsf{a}^{n+m}\right) = n + m$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\nu_\Sigma^{-1} g \vec{\nu}_\Sigma = f$. Da f berechenbar ist, ergibt sich mit Satz 6.1.6 die Berechenbarkeit von g.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erfüllt die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$f(x, 0) = 1 = c_1^{(1)}$$

und

$$f(x, y+1) := (x + y + 1) \cdot f(x, y) = m\left(S(s(x, y)), f(x, y)\right)$$

für alle $x, y \in \mathbb{N}$. (Dabei sind m und s wie im Satz über primitiv-rekursive Funktionen aus dem Anhang, und S ist die Nachfolgerfunktion.) Definiert man nun $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ durch $h(x, y, z) := m\left(S(s(x, y)), z\right)$, dann gilt offenbar $f = \mathrm{Prk}(c_1^{(1)}, h)$. Ferner ist sowohl $c_1^{(1)}$ als auch h primitiv-rekursiv, denn

$$h = \mathrm{Sub}\left(m, \mathrm{Sub}\left(S, \mathrm{Sub}\left(s, \mathrm{pr}_1^{(3)}, \mathrm{pr}_2^{(3)}\right)\right), \mathrm{pr}_3^{(3)}\right).$$

Es folgt, dass f ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 4
Wir führen den Beweis indirekt und nehmen dazu an, dass eine Nummerierung $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ existiert. Dann bilden wir die folgende Menge:

$$A := \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin \nu(x)\}.$$

Als Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt A eine Nummer, d. h., es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\nu(i) = A$. Nun können zwei Fälle auftreten: $i \in A$ oder $i \notin A$. Im ersten Fall ergibt sich $i \notin \nu(i) = A$, ein Widerspruch. Im zweiten Fall folgt $i \in \nu(i) = A$, also ebenfalls ein Widerspruch. Damit ist unsere Annahme falsch. Infolgedessen gibt es keine Nummerierung $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 5 (a) (1) Es sei A rekursiv, und B sei rekursiv-aufzählbar. Dann ist sowohl A als auch B rekursiv-aufzählbar (s. Kurstext, 8.2.2). Nach Satz 8.2.3.1 folgt, dass $A \cap B$ und $A \cup B$ rekursiv-aufzählbar sind.

(2) Wiederum sei A rekursiv, und $A \cup B$ sei rekursiv-aufzählbar. Dann ist die charakteristische Funktion cf_A berechenbar, und es existiert ein $g \in P^{(1)}$ mit $\mathrm{Def}(g) = A \cup B$. Wir betrachten das folgende Flussdiagramm F einer verallgemeinerten Registermaschine M :

$0: \; R_1 := g(R_1),\ 1;$
$1: \; \mathrm{cf}_A(R_1) = 1,\ 1,\ 2;$
$2: \; \mathrm{HALT}$

Da in F nur berechenbare Funktionen und entscheidbare Tests vorkommen, ist $f_M \in P^{(1)}$. Ferner überzeugt man sich leicht, dass

$$\mathrm{Def}\,(f_M) = B \setminus A$$

gilt. Also ist $B \setminus A$ rekursiv-aufzählbar.

(b) Es sei $A := \emptyset$ und $B := \mathbb{N} \setminus K_\varphi$. Dann ist A rekursiv und $A \cap B = \emptyset$ rekursiv-aufzählbar, aber $B \setminus A = \mathbb{N} \setminus K_\varphi$ ist nicht rekursiv-aufzählbar.

Aufgabe 6
Da A rekursiv-aufzählbar ist, gibt es ein $f \in P^{(1)}$ mit $\mathrm{Def}(f) = A$. Es sei nun

$$F := \{h \in P^{(1)} \mid \mathrm{Def}(h) = A\}.$$

Offenbar ist $F \neq \emptyset$. Es gilt aber auch $F \neq P^{(1)}$, denn für eine rekursiv-aufzählbare Teilmenge $B \neq A$ von $\mathbb{N}$ und ein $g \in P^{(1)}$ mit $\mathrm{Def}(g) = B$ gilt sicherlich $g \notin F$.

Nach dem Satz von Rice ist damit die Menge

$$\varphi^{-1}[F] = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i \in F\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Def}\,(\varphi_i) = A\}$$

nicht rekursiv. Nach Satz 8.1.3.2 kann diese Menge dann auch nicht endlich sein.

Aufgabe 7 (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\nu_{C2}(n) \in \Delta \iff \pi_1(n) = \pi_2(n).$$

Es sei also $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi_1(n) = \pi_2(n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist, wie man schnell mit Hilfe einer geeigneten verallgemeinerten Registermaschine zeigt, g eine totale berechenbare Funktion. Es folgt, dass Δ ν_{C2}-rekursiv ist.

(b) Es sei $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(i, n) := 2 \cdot \varphi_i(n) = 2 \cdot u_\varphi(i, n)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Da wegen des utm-Theorems und der Berechenbarkeit der Multiplikation mit 2 die Funktion h in $P^{(2)}$ ist, liefert das smn-Theorem eine Funktion $g \in R^{(1)}$ mit

$$\varphi_{g(i)}(n) = 2 \cdot \varphi_i(n) \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt

$$\texttt{twice}\,(\varphi_i)\,(n) = 2 \cdot \varphi_i(n) = \varphi_{g(i)}(n) \text{ für alle } i, n \in \mathbb{N},$$

und genau dies war zu zeigen.

Aufgabe 8

Wir skizzieren eine Typ-2-Maschine M, die eine Funktion $f_M :\subseteq \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ berechnet, so dass

$$2 \cdot \rho(p) = \rho f_M(p)$$

für alle $p \in \mathrm{Def}(\rho)$ gilt. Daraus folgt dann, dass f eine (ρ, ρ)-berechenbare, also eine *berechenbare* Funktion ist.

Wir beschreiben das Verhalten von M bei Eingabe von $p = u_0\#u_1\#\cdots$: Für jedes $k = 0, 1, ...$ berechnet M ein Wort $w_k \in \mathrm{Def}(\nu_{\mathrm{rat}})$, so dass

$$\nu_{\mathrm{rat}}(w_k) = 2 \cdot \nu_{\mathrm{rat}}(u_{k+1})$$

gilt. (Dies ist möglich, da die Multiplikation mit 2 auf den rationalen Zahlen bez. ν_{rat} berechenbar ist.) Dabei gibt M sukzessive die Folge $r = w_0\#w_1\#\cdots$ aus.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned}
& |\, 2 \cdot \rho(p) - \nu_{\mathrm{rat}}(w_k) \,| \\
= \; & |\, 2 \cdot \rho(p) - 2 \cdot \nu_{\mathrm{rat}}(u_{k+1}) \,| \\
= \; & 2 \cdot |\, \rho(p) - \nu_{\mathrm{rat}}(u_{k+1}) \,| \\
\leq \; & 2 \cdot 2^{-(k+1)} \\
= \; & 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Damit ist $r \in \mathrm{Def}(\rho)$, und, falls wir $x = \rho(p)$ setzen, so konvergiert die Folge der $\nu_{\mathrm{rat}}(w_k)$ schnell gegen $f(x) = 2 \cdot x$:

$$\rho f_M(p) = \rho(r) = \lim_{k \to \infty} \nu_{\mathrm{rat}}(w_k) = 2 \cdot \rho(p),$$

was zu zeigen war.

Aufgabe 9 1. (a) Richtig.

(b) Falsch.

(c) Richtig.

(d) Richtig.

(e) Falsch.

2. (f) Falsch.

(g) Falsch.

(h) Richtig.

(i) Richtig.

(j) Richtig.