Klausur zu Theoretische Grundlagen der Informatik

Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie beschreiben, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Abgesehen von Schreibzeug sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte erforderlich. Es werden maximal 70 Punkte gewertet. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Bearbeiten Sie höchstens sechs Aufgaben. Falls mehr als sechs Aufgaben bearbeitet wurden, werden die sechs bearbeiteten Aufgaben mit den niedrigsten Aufgabennummern bewertet.

Aufgabe 1 (Termersetzungssysteme) **10 Punkte**

Sei $\Sigma = \{\mathsf{empty}/0, \underline{0}/1, \underline{1}/1\}$. Betrachten Sie das folgende Termersetzungssystem:

$$\begin{aligned} T = \{&\underline{1}(\underline{0}(x)) \to \underline{0}(\underline{1}(x)),\\ &\underline{0}(\underline{0}(x)) \to x,\\ &\underline{1}(\underline{1}(x)) \to x\} \ . \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass T terminierend ist.

b) Zeigen Sie, dass T nicht diamantig ist.

c) Beweisen Sie induktiv, dass für alle $u \in \mathcal{T}(\{\mathsf{empty}, \underline{0}, \underline{1}\})$ gilt:

$u \to_T^* \mathsf{empty}$ genau dann, wenn die Anzahl der Vorkommen von $\underline{0}$ und die Anzahl der Vorkommen von $\underline{1}$ in u gerade sind .

Aufgabe 2 (Programme) **10 Punkte**

Sei Σ die in der Vorlesung verwendete Signatur zur Kodierung von Programmen.

a) Geben Sie ein Programm P mit Kopfsymbol $\mathsf{is\text{-}in}$ an, so dass gilt:

$$F_P^{\mathsf{is\text{-}in}}(u,v) = \begin{cases} \mathsf{true}, & \text{falls } u \text{ die Kodierung eines Terms über } \Sigma \text{ und } v \text{ die Kodierung} \\ & \text{einer Variablen ist, die in } u \text{ vorkommt} \\ \mathsf{false}, & \text{falls } u \text{ die Kodierung eines Terms über } \Sigma \text{ und } v \text{ die Kodierung} \\ & \text{einer Variablen ist, die } \underline{\text{nicht}} \text{ in } u \text{ vorkommt} \end{cases}$$

b) Geben sie eine sinnvolle obere Schranke für die Laufzeit Ihres Programms an.

Sie dürfen die Hilfsfunktionen equal, if-then-else, append als gegeben betrachten und sinnvolle Annahmen über deren Laufzeit machen.

Aufgabe 3 (Unentscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit) **10 Punkte**

Zeigen Sie, dass es kein minimales unentscheidbares Problem gibt. Zeigen Sie also, dass es kein unentscheidbares Problem U gibt, so dass für alle unentscheidbaren Probleme U' gilt: $U \leq U'$.

Hinweis: Betrachten Sie die formalen Probleme HALT und $\overline{\text{HALT}}$.

Aufgabe 4 (Nicht-deterministische polynomielle Entscheidbarkeit) **10 Punkte**

Die Instanzen des Problems LONGESTPATH sind Tupel (G, u, v, k), wobei $G = (V, E)$ ein ungerichteter endlicher Graph ist, $u, v \in V$ sind und $k \leq |V|$ ist. Eine Instanz (G, u, v, k) dieses Problems ist genau dann eine positive Instanz, wenn es in G einen einfachen Pfad (ein Pfad, in dem jeder Knoten höchstens einmal vorkommt) von u nach v der Länge mindestens k gibt.

Zeigen Sie, dass LONGESTPATH in NP ist, indem Sie ein nicht-deterministisches polynomielles Programm P der Gestalt

$$\mathsf{longestpath}(xs, u, v, k) \to \ldots$$

angeben, das das Problem LONGESTPATH nicht-deterministisch entscheidet.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, dann wird G durch eine Liste $xs = [l_0, \ldots, l_{n-1}]$ repräsentiert. Dabei ist jede Liste l_i von der Gestalt $[v, v_0, \ldots, v_j]$, wobei v ein Knoten ist und $v_0, \ldots, v_j$ seine Nachbarn sind. Die Knoten des Graphen und die Zahl k seien wie üblich über der Signatur $\{\mathsf{suc}/1, \mathsf{zero}/0\}$ definiert.

Sie dürfen die Hilfsfunktionen equal, if-then-else, append, sowie die üblichen Boolschen Funktionen als gegeben betrachten. Alle weiteren Hilfsfunktionen, die Sie verwenden, müssen definiert werden.

Aufgabe 5 (Polynomielle Reduktion) **10 Punkte**

Die Instanzen des Problems DOMINATINGSET sind Paare (G, k) bestehend aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl $k \leq |V|$. Eine Instanz $((V, E), k)$ ist genau dann eine positive Instanz, falls eine Menge von Knoten $V' \subseteq V$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- $|V'| \leq k$
- Zu jedem Knoten $v \in V \setminus V'$ existiert ein Knoten $w \in V'$ mit $\{v, w\} \in E$.

Geben Sie eine polynomielle Reduktion f von DOMINATINGSET auf SAT an.

Sie dürfen Formeln in der üblichen mathematischen Notation schreiben. Es wird nicht verlangt, dass ein Programm angegeben wird, das die Reduktion f berechnet.

Sie dürfen dabei für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_k = \varphi_k(x_0, \ldots, x_{n-1})$ als gegeben betrachten, so dass für jede Belegung β gilt:

$$\beta(\varphi_k) = \mathsf{true} \text{ genau dann, wenn höchstens } k \text{ der } n \text{ Variablen mit } \mathsf{true} \text{ belegt werden} \quad .$$

Die Länge einer solchen Formel φ_k dürfen Sie als polynomiell in n und k ansehen.

Aufgabe 6 (Nicht reguläre Sprachen) **10 Punkte**

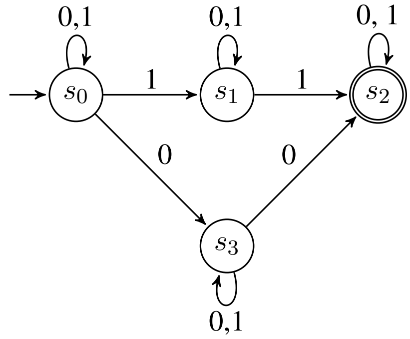
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

a) Die Menge der wohlgeklammerten Ausdrücke über $\{(,)\}$.

   Zur Erläuterung: Das Wort $(()())()$ ist wohlgeklammert, während die Wörter $)($ und $(()$ nicht wohlgeklammert sind.

b) $L = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 7 (Potenzmengenkonstruktion) **10 Punkte**



Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion für den nebenstehenden NEA durch.

Aufgabe 8 (Reguläre Sprachen) **25 Punkte**

Für Alphabete C, D mit $C \subseteq D$ sei eine Projektion $\pi_C : D^* \to C^*$ wie folgt definiert:

$$\pi_C(a_0 \cdots a_{n-1}) = a_{i_0} \cdots a_{i_{m-1}} \ ,$$

wobei $i_0, \ldots, i_{m-1}$ die aufsteigende Folge der Indizes der Buchstaben $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ist, die zu C gehören.
Zum Beispiel ist $\pi_C(d_0c_0c_1d_1c_2) = c_0c_1c_2$, falls $c_0, c_1, c_2 \in C$ und $d_0, d_1 \in D \setminus C$ sind.

Seien A, B Alphabete und $L \subseteq A^*$, $M \subseteq B^*$ reguläre Sprachen.
Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L \triangledown M := \{u \in (A \cup B)^* | \pi_A(u) \in L \text{ und } \pi_B(u) \in M\}$$

regulär ist.

Name, Martrikelnummer:

Aufgabe 9 **10 Punkte**

Entscheiden Sie, welche der folgenen Aussagen wahr und welche falsch sind.

Für jede richtige angekreuzte Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsch angekreuzte Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Insgesamt können nicht weniger als 0 Punkte erreicht werden.

a) Jede konfluente Reduktionsrelation ist auch terminierend. .... ☐ ja ☐ nein

b) Jede terminierend Reduktionsrelation ist auch konfluent. .... ☐ ja ☐ nein

c) In jedem nicht-deterministischen Programm sind alle linken Regelseiten linear. .... ☐ ja ☐ nein

d) Zwei Programme, die dieselbe Funktion berechnen, haben asymptotisch dieselbe Laufzeit. .... ☐ ja ☐ nein

e) In jedem nicht-deterministischen Programm sind alle linken Regelseiten paarweise verschieden. .... ☐ ja ☐ nein

f) Jedes unentscheidbare Problem ist semi-entscheidbar. .... ☐ ja ☐ nein

g) Das formale Problem $\overline{\text{HALT}}$ ist semi-entscheidbar. .... ☐ ja ☐ nein

h) Jedes entscheidbare Problem ist semi-entscheidbar. .... ☐ ja ☐ nein

i) Jedes nicht-deterministische Programm, das ein Problem U nicht-deterministisch semi-entscheidet, terminiert auf jeder Instanz von U. .. ☐ ja ☐ nein

j) Ein formales Problem ist entscheidbar genau dann, wenn es nicht-deterministisch entscheidbar ist. .... ☐ ja ☐ nein

k) Das formale Problem PCP ist <u>nicht</u> auf SAT reduzierbar. .... ☐ ja ☐ nein

l) Das Problem SAT kann mit exponentieller Laufzeit und polynomiellen Speicherbedarf gelöst werden. .... ☐ ja ☐ nein

m) Gilt $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, so gibt es kein NP-vollständiges Problem, das polynomiell lösbar ist. .... ☐ ja ☐ nein

n) Die Relation $\leq_P$ ist antisymmetrisch, d.h., für alle formalen Probleme U und U' gilt: Aus $U \leq_P U'$ und $U' \leq_P U$ folgt $U = U'$. .... ☐ ja ☐ nein

o) Ist ein Problem nicht-deterministisch polynomiell lösbar, so ist es entscheidbar. .... ☐ ja ☐ nein

p) Das formale Problem SAT ist nicht-deterministisch polynomiell lösbar. .... ☐ ja ☐ nein

q) Es gibt nicht-reguläre endliche Sprachen. .... ☐ ja ☐ nein

r) Die Vereinigung zweier regulärer Sprachen ist eine reguläre Sprache. .... ☐ ja ☐ nein

s) Die Menge der regulären Ausdrücke über einem festen Alphabet ist endlich. ☐ ja ☐ nein

t) Die Menge der regulären Ausdrücke über einem festen Alphabet ist eine reguläre Sprache. .... ☐ ja ☐ nein