Rang einer Matrix

Zur Erinnerung: Lineare Unabhängigkeit von Vektoren (Blatt 14)

Die Zeilen bzw. Spalten einer Matrix werden auch als Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren bezeichnet. Wir werden im Abschnitt Lineare Gleichungssysteme sehen, dass es von Bedeutung ist, dass jede Gleichung eine neue Information liefert. In einer Matrix (später werden wir eine Matrix als "Abkürzende Schreibweise" für die Bearbeitung von linearen Gleichungssystemen verwenden) ist es von Wichtigkeit ob eine Zeile einer Matrix von einer anderen Zeile linear unabhängig ist.

Def. (Rang einer Matrix)

Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten einer Matrix A wird als der Rang der Matrix A bezeichnet.

Schreibweise: $rg(A)$

Bem: Für jede Matrix gilt: Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten

(Zeilenrang = Spaltenrang)

Bp:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(E) = 4$$

(die Einheitsvektoren sind linear unabhängig)

Bem.: Für den Rang einer $(m \times n)$-Matrix A gilt:

$$rg(A) \leq \min\{m,n\}$$

Bem.: A heißt regulär $\Leftrightarrow A^{-1}$ ex. $\Leftrightarrow$ A besitzt den vollen Rang, $rg(A) = \min\{m,n\}$

Wie bestimmt man den Rang einer Matrix?

Es gilt: Jede $(m \times n)$-Matrix kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen in eine Matrix von Zeilenstufenform überführt werden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$(m \times n) \rightarrow$ Matrix

Elementare Zeilenumformungen sind folgende äquivalente Umformungen:

I. Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

II. Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile

III. Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile

IV. Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile

Diese Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.

Liegt eine Matrix in Zeilenstufenform vor, so muss man, um den Rang einer Matrix zu ermitteln, die Zeilen zählen, die nicht ausschließlich aus Nullen bestehen. Diese Zeilen sind linear unabhängig.

Da gilt: Zeilenrang = Spaltenrang genügt es, die für uns angenehmere Perspektive der Zeilenumformung zu wählen.

Bp.:

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. Zeile $\cdot \frac{1}{2}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. Zeile − 1. Zeile

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad rg(A) = 2$

② $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ + \text{Zeile } 1 \end{array}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 19 \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 38 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ - \text{Zeile } 2 \end{array}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -14 & 21 & -7 \\ 0 & 38 & 95 \\ 0 & 0 & -93 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :-14 \\ :38 \\ :-93 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{21}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{95}{38} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 3$

Lineare Gleichungssysteme

Das auf Blatt ② zu Beginn des Themas: Lineare Algebra gezeigte Beispiel mit der Planung einer Umgehungsstraße in Form einer ganzrationalen Funktion 4. Grades führte auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a - b + c - d + e &= 0 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e &= 0 \\ e &= -3 \\ 108a + 27b + 6c + d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Def. (lineares Gleichungssystem "LGS")

m Gleichungen n Variablen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Man betrachtet nur die Koeffizienten der Gleichungen und fasst diese in einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$-Matrix

Das LGS kann geschrieben werden als: $\underset{(m\times n)}{A} \cdot \underset{(n\times 1)}{\vec{x}} = \underset{m\times 1}{\vec{b}}$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zugehöriges LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bp.:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 20x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 5x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -20 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 2 & -5 & -1/2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Def.: (homogenes LGS)

LGS heißt homogen $\Leftrightarrow \vec{b} = \vec{0}$

Darstellung eines LGS mit m Gleichungen und n Variablen durch die "erweiterte Koeffizientenmatrix":

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Um sich unnötige Schreibarbeit zu sparen, wird man immer die Darstellung in der erweiterten Koeffizientenmatrix wählen – das ist auch immer der übersichtlichere Weg.

Lösungwege LGS – Grundlagen

1) Lösung einer linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b_1$$

Fall 1: $n = 1$ (1 Unbekannte) : $a_1x_1 = b$

Falls $a_1 \neq 0$, dann ex. genau eine Lösung, nämlich: $x_1 = \frac{b}{a_1}$

Bp.: $5x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{5} = 4$

Fall 2: $n=2$ (1 Gleichung, 2 Unbekannte)

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$$

Umformen: $a_1x_1 = b_1 - a_2x_2 \quad |:a_1 \ (a_1 \neq 0)$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \cdot x_2 \quad (*)$$

Es existieren unendlich viele Lösungen, die man jedoch mit (*) beschreiben kann. Gibt man für eine Variable einen Parameter vor (wir nennen ihn t), so kann die andere Variable in Abhängigkeit von t dargestellt werden, z.B. in (*):

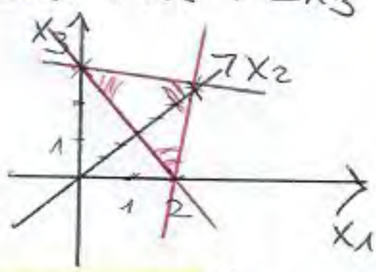
$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \cdot t$$

Die Lösungsmenge ist unendlich groß und sämtliche Lösungen befinden sich auf einer Geraden im $\mathbb{R}^2$.

Fall 3: $n=3$ (1 Gleichung, 3 Unbekannte)

Auch hier existieren unendlich viele Lösungen, es werden 2 Parameter vorgegeben, die Lösungsgleichung repräsentiert eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

Bp: $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ ist die Gleichung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Fall 4: $n=4$ (1 Gleichung, 4 Unbekannte)

Hier versagt unsere Vorstellungskraft, man spricht von Hyperebenen

Frage: Was benötigt man, wenn man eine Gleichung mit 2 Unbekannten hat, um eine eindeutige Lösung zu erhalten?

Antwort: Man benötigt eine zweite Gleichung, die "neue" Informationen über die beiden Unbekannten liefert.

Also: Zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten, die gleichzeitig gelten

Die Verallgemeinerung von "mehrere Gleichungen" mit "mehreren Unbekannten" wurde auf Blatt 40 in der Definition eines LGS formuliert.

Bem: Wenn bei einer Gleichung mit 3 Unbekannten (Lösung ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$) zwei Parameter vorgegeben werden, so ist die dritte Variable automatisch bestimmt, man hat bei drei Variablen die Freiheit, zwei Parameter vorzugeben, daher spricht man von Freiheitsgraden.
Liegt eine zweite lineare Gleichung mit drei Variablen vor, die gleichzeitig gelten soll, so liegen die Lösungen, die beide Gleichungen erfüllen, auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Es ist nun nur noch eine Variable frei wählbar, man sagt: ein Freiheitsgrad ist gebunden.
Liegt nun eine dritte lineare Gleichung vor, die nicht parallel zur Schnittgeraden verläuft, so sind alle Variablen bestimmt.
Das LGS besitzt dann eine eindeutige Lösung, einen Punkt im $\mathbb{R}^3$.

Verallgemeinerung dieser Betrachtungen:
Um eine eindeutige Lösung eines LGS mit n Variablen zu erhalten, benötigt man mindestens n Gleichungen. Welche Anforderungen an die Gleichungen gestellt werden müssen (im $\mathbb{R}^3$: nicht parallele Ebenen), hängt eng mit dem Begriff der linearen Unabhängigkeit zusammen

Def.: 1) LGS mit m Gleichungen und n Variablen heißt exakt bestimmt $\Leftrightarrow m = n$
Das LGS hat eine eindeutige Lösung, wenn die Gleichungen linear unabhängig sind (→ später mehr dazu)

2) LGS mit m Gleichungen und n Variablen heißt überbestimmt $\Leftrightarrow m > n$, d.h. es sind mehr Gleichungen als Variablen.
Das LGS besitzt nur Lösungen, wenn die überzähligen Gleichungen linear abhängig sind.

3) LGS unterbestimmt $\Leftrightarrow m < n$, d.h. es sind weniger Gleichungen vorhanden als Variablen.
Ein solches GS hat i.a. unendlich viele Lösungen

Frage: Wie kann man herausfinden, wie viele Gleichungen eines LGS linear unabhängig sind?

Antwort: Mit Hilfe von äquivalenten Umformungen

Schreibt man statt des LGS die erweiterte Koeffizientenmatrix als abkürzende Darstellung, so lassen sich alle äquivalenten Umformungen an dieser Matrix vornehmen.

Äquivalente Umformungen verändern die Lösungsmenge nicht.

Frage: Was sind äquivalente Umformungen?

Antwort: (s. Rangbestimmung einer Matrix)

1) Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen und Vertauschen der Variablen

2) Multiplizieren einer Gleichung mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

3) Addieren einer Gleichung zu einer anderen Gleichung oder Subtrahieren einer Gleichung von einer anderen Gleichung.

4) Gleichungen in einem LGS dürfen linear kombiniert werden, d. h. man darf zum Vielfachen einer Gleichung das Vielfache einer anderen Gleichung addieren oder von dieser subtrahieren.

Die Umformungen 1)–4) ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht, Ziel ist es, durch endlich vielesolcher Umformungen das LGS als ein einfacheres darzustellen. Das ist das Prinzip des Gauß'schen Lösungsalgorithmus

Der Gauß'sche Lösungsalgorithmus (Carl Friedrich Gauß 1777–1855)

Die vorgestellten erlaubten äquivalenten Umformungen werden nach einem vorgegebenen Schema angewandt, der Algorithmus wird auch das Gauß'sche Eliminationsverfahren genannt, eine Bezeichnung, die das Vorgehen besser beschreibt: Nach und nach Elimination der Variablen, so dass am Ende eine Variable bestimmt ist und man mit dieser Kenntnis die nächste Variable bestimmen kann. Der Lösungsweg soll anhand eines Beispiels erläutert werden.

Bp.: Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Dieses GS wird durch die erweiterte Koeffizientenmatrix dargestellt, um die äquivalenten Umformungen übersichtlicher zu zeigen.

Zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

1. Iteration: Auswahl einer Zeile und Auswahl einer Spalte, das Element im Kreuzungspunkt heißt "Pivotelement"

im Bp: 2. Zeile, 1. Spalte 4 ist Pivotelement
Die Pivotzeile wird "nach dem Pivotelement" aufgelöst, d.h. man erzeugt aus dem Pivotelement eine 1, hier durch Division durch 4.

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2') \\ (3) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\times 2' \\ \\ -3\times 2' \\ -1\times 2' \end{array}$$

Über und unter dem Pivotelement 1 werden "Nullen" erzeugt durch entsprechende Addition oder Subtraktion der ausgewählten Pivotzeile oder ein Vielfaches von dieser

$$\begin{array}{c} (1') \\ (2') \\ (3') \\ (4') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/4 & -1/2 & 15/4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1 \end{array}\right)$$

2. Iteration: 3. Zeile, 2. Spalte: 5/4 wird Pivotelement

$$(3''): \; 0 \quad 1 \quad -2/5 \quad 3 \quad 4$$

$$\begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \\ (4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5/2\cdot 3'' \\ \\ \\ -3/4\cdot 3'' \end{array}$$

Über und unter dem Pivotelement 1 werden "Nullen" erzeugt durch entsprechende Addition oder Subtraktion der ausgewählten Pivotzeile oder ein Vielfaches von dieser, und zwar in den Zeilen nur, die noch nicht Pivotzeile waren, hier: 1'' und 4''

$$\begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \\ (3'') \\ (4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 19/5 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -19/5\cdot 1'' \end{array}$$

3. Iteration 1. Zeile, 3. Spalte : 1 wird Pivotelement

$$\begin{array}{l} (1''') \\ (2''') \\ (3''') \\ (4''') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -78 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ :-39 \end{array}$$

4. Iteration 4. Zeile 4. Spalte : −39 wird Pivotelement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vertauschen der Zeilen liefert Treppenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Durch Rücksubstitution erhält man folgende Ergebnisse:

Aus der 4. Zeile : $x_4 = 2$

Aus der 3. Zeile : $x_3 + 10 \cdot 2 = 20$

$\Rightarrow x_3 = 0$

Aus der 2. Zeile : $x_2 - 2/5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4$

$\Rightarrow x_2 = 4 - 6 \Rightarrow x_2 = -2$

Aus der 1. Zeile : $x_1 + 1/4 \cdot (-2) + 1/2 \cdot 0 - 1/4 \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 + 1/2 + 1/2 \Rightarrow x_1 = 1$

Zusammenfassung:

$x_1 = 1, \; x_2 = -2, \; x_3 = 0, \; x_4 = 2$

Beachte: Jede Zeile und jede Spalte werden jeweils nur einmal ausgewählt

Bem: Die Ausformulierung des Gauß'schen Lösungsalgorithmus allgemein soll an dieser Stelle nicht erfolgen.
In Worten: Teilweise Elimination und anschließende Substitution, jede Zeile wird genau einmal Pivotzeile und jede Spalte genau einmal Pivotspalte, danach sind sie "gesperrt"

Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit von Gleichungen

Im Beispiel haben wir gesehen, dass bei vier Gleichungen und vier Unbekannten nach den äquivalenten Umformungen im Rahmen des Gauß'schen Lösungsalgorithmus in der erweiterten Koeffizientenmatrix auch vier linear unabhängige Zeilen vorhanden waren, die Matrix also den vollen Rang besaß.

Bp.: Linear abhängige Zeilen in einem LGS

2 Brote und 10 Brötchen kosten 10€
3 Brote und 15 Brötchen kosten 15€

Interessiert man sich für den Preis eines Brotes und eines Brötchens, so kann man zunächst ein "kleines" LGS aufstellen:

$$\begin{aligned} 2p_1 + 10p_2 &= 10 \\ 3p_1 + 15p_2 &= 15 \end{aligned} \quad (*)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & 10 \\ 3 & 15 & 15 \end{array}\right)$

Gauß'scher Lösungsalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 10 & 10 \\ 3 & 15 & 15 \end{array}\right) \text{ Pivotzeile} : 2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 5 \\ 3 & 15 & 15 \end{array}\right) -3 \times \text{Zeile } 1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Diese Matrix hat eine Zeile, die nur aus Nullen besteht, d.h. eine Zeile ist linear abhängig, die zweite der beiden Gleichungen in (*) liefert keine neue Information.

Fazit: Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$rg(A) = rg(A, b) = m \quad (m \text{ Anzahl der Gleichung})$$

Der Rang der Koeffizientenmatrix ist gleich dem Rang der um das Absolutglied erweiterten Koeffizientenmatrix und wenn der gemeinsame Rang mit der Zahl der in dem GS vorkommenden Variablen übereinstimmt.

Aufgabe: Geg:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -5 && (1) \\ 4x_1 - x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 - 2x_4 &= 10 && (2) \\ -3x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + 3x_4 &= 9 && (3) \\ x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 - x_4 &= 8 && (4) \end{aligned}$$

Lösung (bitte nachprüfen): GS lin. abhängig
z.B. Gl(2) = Gl(4) − Gl(1) − 1/3 Gl(3)
(das ist nicht immer auf Anhieb zu sehen sein, der sichere Weg ist die Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Zusammenfassung: Lösbarkeit von LGS: (s. Blatt 44)

Geg. ist ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen

- das GS hat in keinem Fall eine Lösung, wenn sich die Gleichungen widersprechen, diese Widersprüche werden in der Regel während des Lösungsprozesses erkannt, z.B. erhält man am Ende:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \text{↯ Widerspruch}$$

- Fall $m < n$
  das GS ist unterbestimmt
  es besitzt unendlich viele Lösungen
  linear abhängige Gleichungen können eliminiert werden
- Fall $m = n$
  das GS ist bestimmt
  sind die Gleichungen linear unabhängig, dann ex. eine eindeutige Lösung
  falls lin. abhängige Gleichungen eliminiert werden können, so ist das Restsystem unterbestimmt und besitzt unendlich viele Lösungen
- Fall $m > n$
  das GS ist überbestimmt, mindestens $m-n$ Gleichungen stellen eine Linearkombination der übrigen dar und