2. Handlungsorientierung und Veranschaulichung

2.1 Die Darstellungsformen nach J. S. Bruner

Ein fester Bestandteil des heutigen Mathematikunterrichts in der Grundschule ist das auf Jerome S. Bruner zurückgehende Prinzip der **Variation der Darstellungs-** oder **Repräsentationsform**, das aufgrund der Anfangsbuchstaben der Bezeichnungen der Formen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) auch unter dem Namen **E-I-S-Prinzip** bekannt ist. Bruner sieht die kognitive Entwicklung als einen spiralförmigen Lernprozeß, bei dem sich der oder die Lernende mit drei ver-schiedenen Formen der Darstellung und Stufen der Abstraktion auseinandersetzt. In der **enaktiven** Darstellungsform wird der Sachverhalt durch eigenständig aus-geführte Handlungen erfaßt. Die **ikonische** Form der Darstellung umfaßt alle Erfahrungen durch bildhafte Darstellungen, wie Abbildungen und Zeichnungen. Das dritte Darstellungssystem, die **symbolische** Form, verwendet die Sprache und Zeichen mit besonderer Bedeutung, z.B. Ziffern oder Rechenzeichen.

Die ikonischen Darstellungen spielen im Lernprozeß eine zentrale Rolle, da durch sie verschiedene Aspekte und Zusammenhänge der Information *simultan* zugänglich und damit unmittelbar vergleichbar gemacht werden. Im Unterschied dazu kann durch den handelnden Umgang mit Material, durch Schreiben oder Sprechen, zum Beispiel von Einmalein s auf gaben oder von Gleichungen, die Gesamtinformation in *zeitlich sukzessiver* Weise als Folge von Teilaspekten erfaßt werden. Für Begriffsbildungen sind sowohl simultane als auch zeitlich sukzessive Formen der Wahrnehmung wichtig. Ferner ist es notwendig, daß der Lernprozeß neben der *Abstraktion* auch den rückläufigen Prozeß der *Konkretisierung* umfaßt. Lernen vollzieht sich wesentlich bei Übergängen zu anderen Darstellungsformen. Die Übergänge zu den Repräsentationsformen der Handlung, des Bildes, der Sprache und der Zeichen werden als *Enaktivierung*, als *Ikonisierung*, als *Verbalisierung* und als *Formalisierung* bezeichnet.

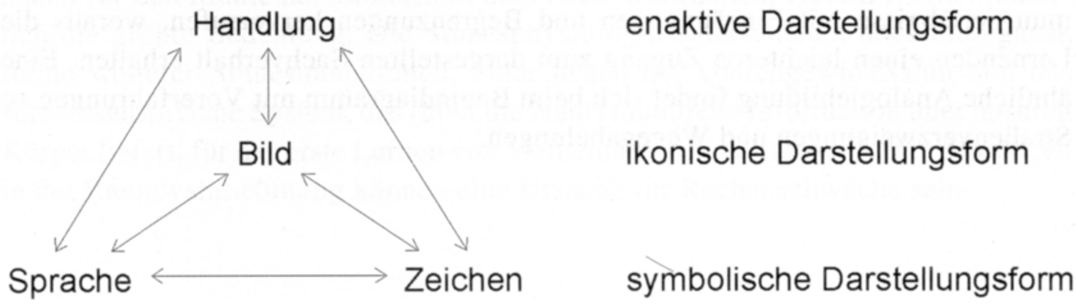


Abb. 2

Beispiel: Aufgabe 5 + 3 = ?

a) Enaktive Darstellungsform

Die Aufgabe 5 + 3 = ? kann in enaktiver Dar Stellung s form durch Handlung gelöst werden. Eine Schülerin zählt zuerst 5 Perlen aus einem Vorrat ab und legt diese hin. Dann werden 3 weitere Perlen abgezählt und dazugelegt. Es wird nun durch Zählen festgestellt, wie viele Perlen insgesamt daliegen: 8.

b) Ikonische Darstellungsform

Die Perlen werden nun nicht als konkrete Dinge, sondern in bildlicher Form dargestellt.

1) Hier sind 5 schwarze Perlen:

●●●●●

2) Hier sind 3 weiße Perlen:

○○○

3) Wie viele Perlen sind es zusammen?

Zur Bestimmung der Summe ist es erforderlich, daß eine Verknüpfung s Struktur zwischen der ersten und zweiten Menge gebildet wird, z. B. indem die zweite Perlenreihe als Fortsetzung der ersten gezeichnet wird. Zur Beantwortung der Frage „Wie viele Perlen sind es zusammen?" wendet die Schülerin die ihr bekannte Operation des *vollständigen Auszählens* der Elemente an.

●●●●●○○○

c) Symbolische Darstellungsform

In der symbolischen Darstellungsform schließlich kann die Aufgabe sprachlich als Textaufgabe formuliert werden, z. B.: „Miriam hat fünf Perlen. Sie bekommt drei weitere geschenkt. Wie viele Perlen hat sie nun?"

oder mit Hilfe von Zeichen: $5 + 3 = \square$

oder in der Pfeilschreibweise (Operatorschreibweise): $5 \xrightarrow{+3} \square$

Ikonische Darstellungsformen und Veranschaulichungsmittel greifen zurück auf das Reservoir an bildhaften Vorstellungen und die Fähigkeit zu abstrahieren, und sie ermöglichen dadurch ein Verstehen über Analogiebildung. Beispielsweise können die umschließenden Linien des Venn-Diagramms verschiedene Wahrnehmungserlebnisse mit Einzäunungen und Begrenzungen hervorrufen, woraus die Lernenden einen leichteren Zugang zum dargestellten Sachverhalt erhalten. Eine ähnliche Analogiebildung findet sich beim Baumdiagramm mit Vorerfahrungen zu Straßenverzweigungen und Wegegabelungen.

Das Verständnis mathematischer Begriffe und Operationen ist eng verbunden mit den zugrunde liegenden Handlungen und Darstellungsformen. Von den Begriffen und Operationen entwickelt sich ein mehr oder weniger großes Reservoir an Vorstellungsbildern, die stark individuell geprägt sind. Diese internen **Vorstellungsbilder**, auch **mentale Bilder** genannt, bilden die Verbindung mit den Objekten und Handlungen der äußeren *realen Welt.* Vorstellungen sind jedoch keine unmittelbaren Abbilder der Realität, sondern sie sind bereits Abstraktionen der Wirklichkeit. Sie sind das Werkzeug, mit dem die Vielfalt sensorischer Eindrücke aus der Umwelt gruppiert und strukturiert werden kann.

In diesem Abschnitt haben wir das visuelle System herausgestellt, doch ist zu beachten, daß Lernen mit *allen* Sinnen erfolgen sollte. Darauf wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

2.2 Lernen mit allen Sinnen

Am Anfang eines jeglichen Wahrnehmungsprozesses steht bei Mensch und Tier die Informationsaufnahme. Sie wird durch die Sinnesorgane bewerkstelligt, die von Art zu Art in unterschiedlichen und eingeschränkten Bereichen auf Reize der Außenwelt ansprechen. Obgleich die einzelnen Sinne des Menschen im Vergleich zum Tier nicht so hoch entwickelt sind (z.B. kann der Falke auf große Entfernungen wesentlich differenzierter sehen als der Mensch, die Fledermaus kann Ultraschall hören, usw.), ist der Mensch allerdings fähig, ein breiteres Spektrum komplexerer Sinnesreize aufzunehmen als jede andere Kreatur.

Die Sinnesorgane reagieren durch Reizung der jeweiligen Rezeptoren genau auf die Information, die in *ihrer Sprache* gesendet wird. Die Reize lösen neuronale Impulse aus, die durch sensorische Nerven an das Gehirn weitergeleitet werden. Dort werden sie zu speziellen sensorischen Zentren geleitet, der ersten Stufe ihrer Verarbeitung im Gehirn. Bei diesem ersten Teil der Informationsverarbeitung spricht man von objektiver Sinnesphysiologie.

Beim sich anschließenden subjektiven Teil unterscheidet man zwischen den Sinneseindrücken oder **Empfindungen** und der **Wahrnehmung**. Die *Deutung* der Sinnesempfindungen durch das Gehirn nennen wir Wahrnehmung. Die Art einer Wahrnehmung hängt von früheren Erfahrungen ab und ist ein aktiver Prozeß, der selbst wieder Spuren hinterläßt.

Von den fünf klassischen Sinnen (Sehen, Hören, Fühlen, Schmecken und Riechen) haben für den Mathematikunterricht die ersten drei (Sehen, Hören, Fühlen) natürlich die größte Bedeutung. Die Sinnesphysiologie unterscheidet noch eine ganze Reihe weiterer Sinnesmodalitäten, unter denen der Gleichgewichtssinn und das somatosensorische System, das (über die Haut) räumliche Information über unseren Körper liefert, für das erste Lernen von Mathematik bedeutungsvoll sind. Störungen in der Raumwahrnehmung können eine Ursache für Rechenschwäche sein.

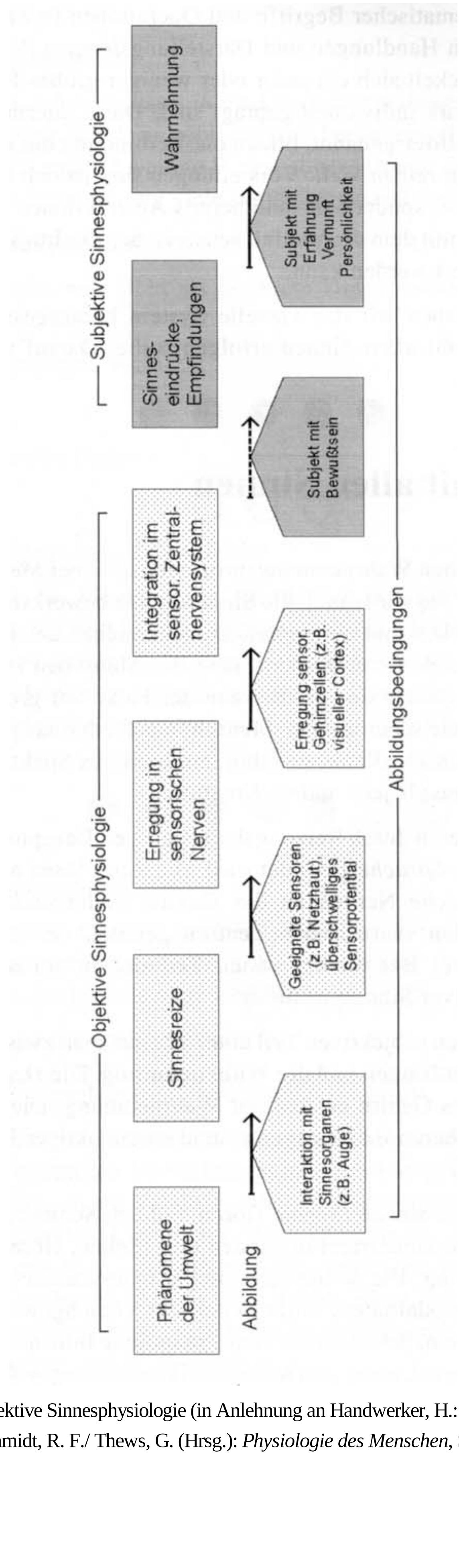


Abb. 3: Objektive und subjektive Sinnesphysiologie (in Anlehnung an Handwerker, H.: *Allgemeine Sinnesphysiologie*, aus: Schmidt, R. F./ Thews, G. (Hrsg.): *Physiologie des Menschen*, S. 187)

2.3 Aspekte visueller Darstellungsformen

Vergleiche zwischen dem auditiven und dem visuellen Kanal zeigen Vorzüge des letzteren. Zum einen findet sich bei der visuellen Informationsverarbeitung eine größere Aufnahmekapazität. Zum anderen sind visuelle Signale im Vergleich zu den auditiven weniger flüchtig und somit länger verfügbar. Sie werden i. allg. nicht linear - wie ein gesprochener Text -, sondern durch die gleichzeitige Vermittlung mehrerer Eindrücke in ganzheitlichen Komplexen aufgenommen. Visuelle Darstellungen im Unterricht erweitern auf diese Weise die Möglichkeiten der Aufgabenstellungen und damit den Freiraum der Schülerinnen und Schüler und begünstigen dadurch eine Individualisierung und Differenzierung des Unterrichts. Aus diesem Grund soll im folgenden hauptsächlich auf die *visuelle* Darstellungsform von Informationen eingegangen werden.

Visuelle Darstellungsformen können nach dem Grad ihrer Abstraktion und dem Grad ihrer Dynamik eingeteilt werden. Bei dem **Grad ihrer Abstraktion** lassen sich drei Ebenen der Wiedergabe unterscheiden, die analogische, die schematische und die symbolische Ebene.

Die **analogische** Ebene meint alle Darstellungen mit wirklichkeitsnahem Charakter. Im dreidimensionalen Raum sind dies insbesondere alle wirklichkeitsgetreuen Nachbildungen und Modelle von Personen, Tieren und Dingen. Im Zweidimensionalen finden wir Fotografien, Zeichnungen von physikalischen Objekten, Bildgeschichten, Dias, Videoaufnahmen, Computeranimationen usw. Eine Menge mit 5 Elementen wird z. B. ikonisch dargestellt durch eine Ansammlung von 5 Personen, 5 Tieren oder 5 Dingen.

In der **schematischen** Ebene werden bestimmte wesentliche Merkmale in schematisch strukturierter Form hervorgehoben und betont; unwesentliche Merkmale werden weggelassen. Beispiele hierzu sind Diagramme und Grafiken wie Wetterkarten, Landkarten, Blütenschnitte, Blutkreislaufschema usw. Mengen werden z. B. durch Venn-Diagramme dargestellt, wobei die Elemente nun etwa in Form von Strichen oder Punkten abgebildet werden. Als weitere Beispiele finden sich im Mathematikunterricht zur Darstellung von Zahlen die Punktfelder, Strecken mit Angaben der Längen, das Zahlenband, der Zahlenstrahl, die Hundertertafel sowie im Dreidimensionalen Lernmaterialien wie die Mehr-System-Blöcke von Dienes, die Cuisenaire-Stäbe, Steckwürfel, Wendeplättchen, aber auch das Rechengeld, die Uhr usw.

Auf der **symbolischen** Ebene wird schließlich der höchste Abstraktionsgrad erreicht. Hier wird die Bedeutung der Zeichen weitgehend durch Vereinbarung festgelegt. Beispiele sind Buchstaben, Satzzeichen, Noten, das Kreuz, Länderflaggen, Firmenzeichen, Zahlzeichen, Rechenzeichen oder die Zeichen der Algebra. Symbole werden häufig zur Darstellung abstrakter Begriffe benutzt. Stellen Symbole konkrete Objekte dar, so brauchen sie keine äußere Ähnlichkeit mit dem Dargestellten zu besitzen. Beispielsweise wird die Elementezahl der Menge mit fünf Elementen durch das Zahlzeichen 5 beschrieben.

Der zunehmende Grad der Abstraktion erlaubt es, durch Vereinfachung und Vertiefung des tatsächlichen Sachverhalts die Aufmerksamkeit und den Denkprozeß in eine bestimmte für die Problemlösung erforderliche Richtung zu lenken. Die Übergänge zwischen den einzelnen Darstellungsformen sind fließend. Die Unterschiede zwischen den analogischen, schematischen und symbolischen Darstellungen können graduell durch zunehmende Schematisierung bzw. Symbolisierung der einzelnen Teile der Gesamtdarstellung verändert werden.
Die folgende Abbildung zeigt anhand der Aufgabe 5 - 3 = ? Beispiele für die verschiedenen Aspekte visueller Darstellungen, wobei noch zusätzlich die Differenzierung in *statisch* und *dynamisch* aufgenommen wurde.

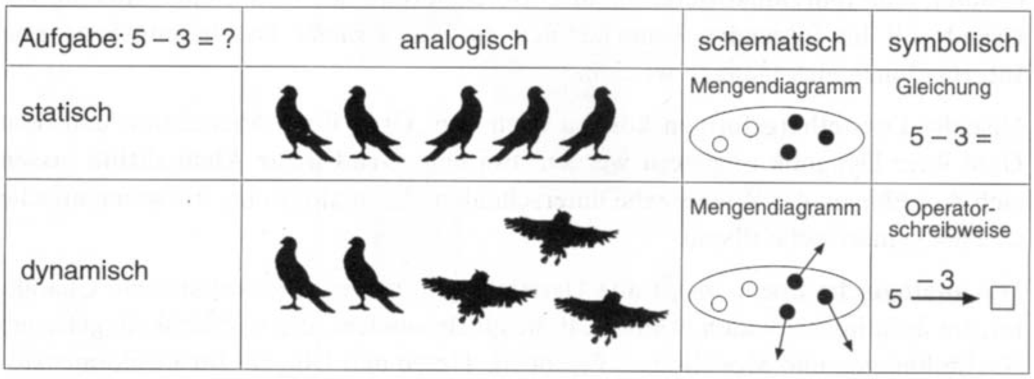


Abb. 4: Aspekte visueller Darstellung s formen, eingeteilt nach dem Grad der Abstraktion und dem Grad der Dynamik

Die zweite Einteilung der visuellen Darstellungen, die in Abb. 4 verwendet wurde, beruht auf dem **Grad ihrer Dynamik.** Beispielsweise sind Darstellungen von Kardinalzahlen in Form von Venn-Diagrammen meist **statisch** während Darstellungen von Zähl- und Meßvorgängen sowie von Rechenoperationen häufig Bezug auf Handlungserfahrungen nehmen und deshalb einen **dynamischen** Aspekt vermitteln. Der Grad der Dynamik hängt von der Betrachtungsweise ab. Während manche in einer Abbildung z.B. nur eine statische Ansammlung von Dingen erkennen, erleben andere dieselbe Abbildung dynamisch als Ergebnis ausgeführter Handlungen.

Von den beiden folgenden Schulbuchbeispielen illustriert das erste den statischen Aspekt an der Aufgabe der Addition und das zweite den dynamischen Aspekt an der Aufgabe der Subtraktion. Sie zeigen gleichzeitig die drei Ebenen der Abstraktion: analogisch, schematisch und symbolisch.

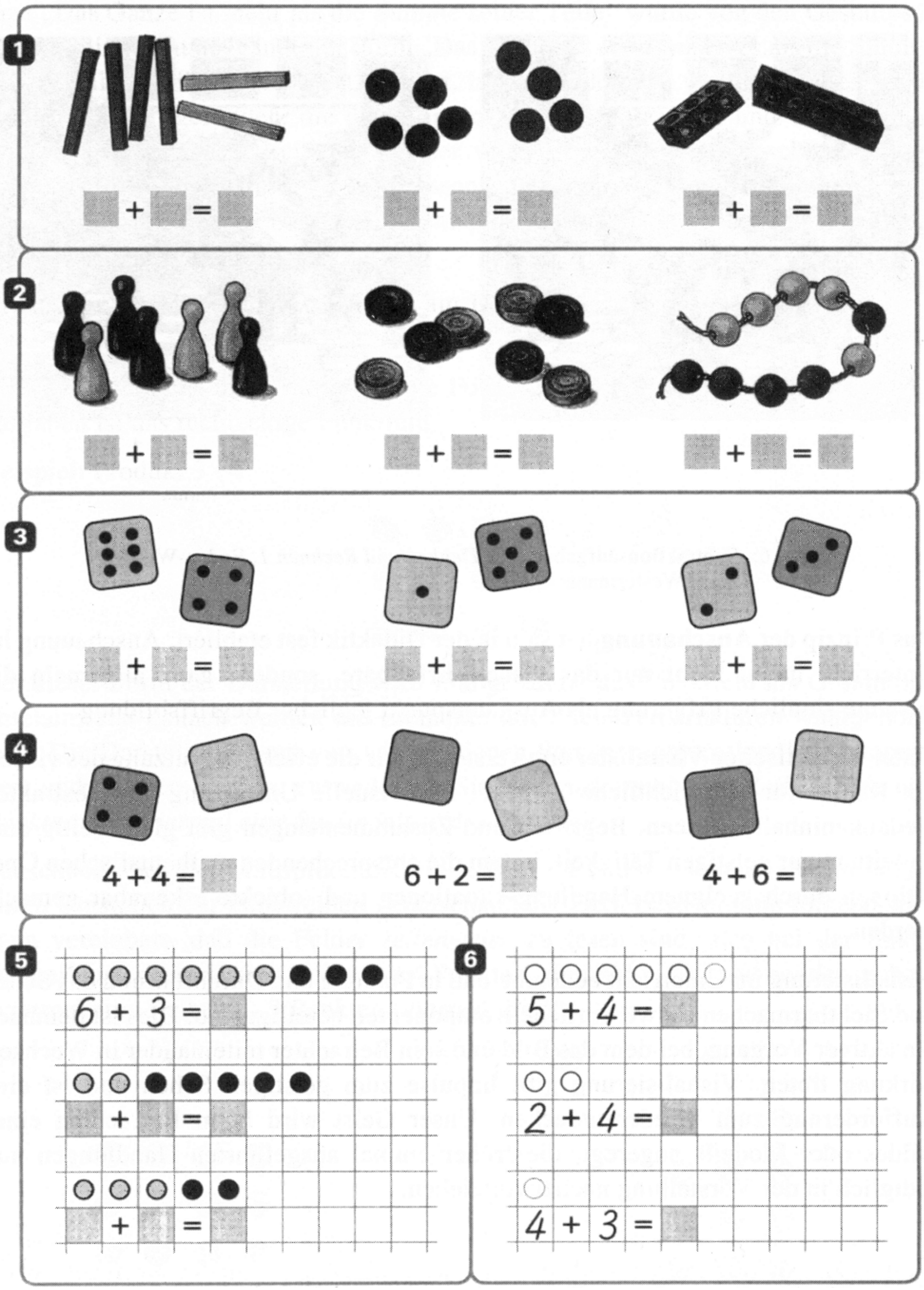


Abb. 5: Additionsaufgaben (aus *Nußknacker - Unser Rechenbuch*,
Ausgabe B -Neu, Baden-Württemberg, 1 Schuljahr, Klett 1994)

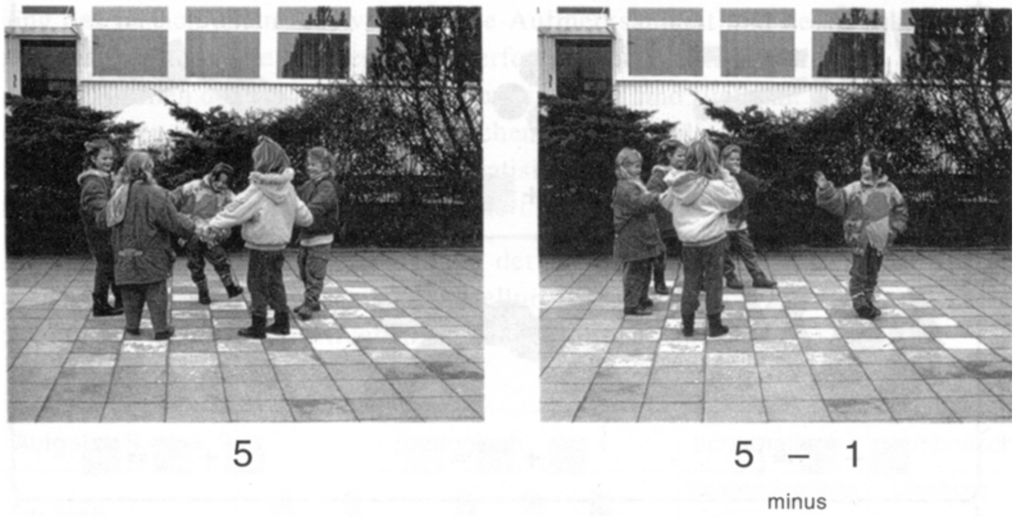


Abb. 6: Subtraktionsaufgaben
(aus *Denken und Rechnen 1,* Baden-Württemberg, Westermann 1994)

Das Prinzip der **Anschauung** hat sich in der Didaktik fest etabliert. Anschauung im Unterricht meint nicht nur das visuell Erfaßbare, sondern ganz allgemein die gesamte sinnliche Erfahrung als Ausgangspunkt jeglicher Begriffsbildung.

Unter **didaktischer Visualisierung** verstehen wir die effektive Nutzung des visuellen Kanals für unterrichtliche Zwecke. Die visuelle Umsetzung von abstrakten Gedankeninhalten, Ideen, Begriffen und Zusammenhängen gibt gleichzeitig eine Anleitung zur geistigen Tätigkeit, indem die entsprechenden mathematischen Operationen durch geeignete Handlungssituationen und -Objekte erkennbar gemacht werden.

Visualisierung im Unterricht bedeutet, daß in Planung und Durchführung das Sehen und Sichtbarmachen als wesentliche Komponenten beteiligt sind. Dies ist demnach ein aktiver Vorgang, bei dem das Bild und sein Betrachter miteinander in Wechselwirkung treten. Visualisierung gibt Impulse zum geistigen Sehen und ist eine Aufforderung zum Wiederentdecken. Unser Geist wird beim Betrachten eines Bildes oder Modells angeregt, die früher einmal ausgeführten Handlungen nun lediglich in der Vorstellung nachzuvollziehen.

2.4 Beiträge der Gestaltpsychologie

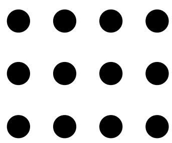
Die zu Beginn des Jahrhunderts durch Max Wertheimer (1880 - 1943), Wolfgang Köhler (1887 - 1967) und Kurt Koffka (1886 - 1941) gegründete **Gestaltpsychologie** hat viel zu unserem heutigen Verständnis der Wahrnehmung beigetragen. Insbesondere spielt bei der Wahrnehmung die Erfassung von Ganzheiten eine grundlegende Rolle. Wertheimer erkannte, daß unser visuelles System Teile des wahrgenommenen Bildes nach bestimmten Gruppierungs- oder Gestaltgesetzen zusammenfaßt, strukturiert und gliedert. Die auf Aristoteles zurückgehende Aussage „Das Ganze ist mehr als die

Summe seiner Teile" wurde von den Gestaltpsychologen in leicht abgeänderter Form „Das Ganze ist etwas anderes als die Summe seiner Teile" zu ihrem Hauptsatz erklärt. Im Laufe der Zeit wurde eine Reihe von Gestaltgesetzen gefunden, die den Vorgang der Strukturierung und Organisation bei der Erfassung und Verarbeitung der visuellen Information beschreiben. Die Erkenntnisse der Gestaltpsychologie lassen sich am deutlichsten an unserem visuellen System aufzeigen, doch wurden entsprechende Gesetze für alle Formen der Wahrnehmung gefunden.

Einige der Gestaltgesetze sollen nun am Beispiel der Multiplikation verdeutlicht werden.

Eine gebräuchliche und weitverbreitete Form der Darstellung für Multiplikationsaufgaben ist das rechteckige Punktfeld.

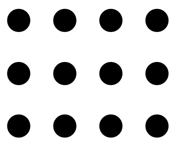
Beispiel: Produkt $3 \cdot 4$



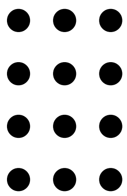
Bei dieser Form der Darstellung wird i. allg. zuerst das Punktfeld als Gesamtheit gesehen; erst danach werden die Elemente mit ihren Teilstrukturen wahrgenommen. Die Darstellung kann von verschiedenen Personen unterschiedlich interpretiert und gelesen werden, entweder im Sinne von *dreimal eine Zeile mit je vier Punkten* oder *viermal eine Spalte mit je drei Punkten.*

Tauschaufgaben der Multiplikation wie z. B. $3 \cdot 4$ und $4 \cdot 3$ werden dann häufig durch Umstellen der Punktreihen veranschaulicht. Dem Lesevorgang folgend wird dann vereinbart, daß die Felder *zeilenweise* zu lesen sind, also bei der linken Darstellung „dreimal eine Reihe mit 4 Punkten (dreimal vier)" und bei der rechten „viermal eine Reihe mit 3 Punkten (viermal drei)".

(1) $3 \cdot 4$

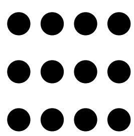


(2) $4 \cdot 3$

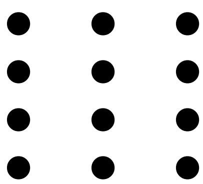


Diese Regel muß jedoch erst vereinbart und erlernt werden, da der natürliche Wahrnehmungsvorgang für jede der Darstellungen beide Interpretationen zuläßt. Durch geeignete Gruppierung der Punktreihen können die Darstellungen jedoch für jeden Betrachter eindeutig lesbar gemacht werden, z. B.:

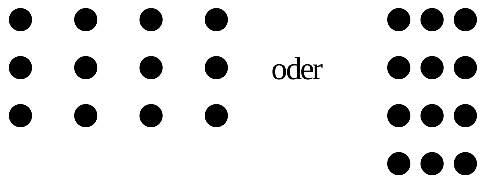
(1) $3 \cdot 4$



oder

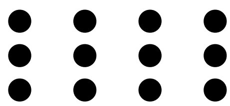


(2) $4 \cdot 3$

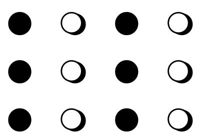


Eine solche natürliche Zusammenfassung wird z. B. bewerkstelligt, wenn die Teile wie im obigen Beispiel näher beieinanderliegen, wenn sie einander gleich oder ähnlich sind, durch einen Umriß von anderen Teilen abgeschlossen sind, durch einheitliche Strukturierungen oder direkte Verbindungen in Zusammenhang stehen oder innerhalb eines gemeinsamen Bereichs liegen.

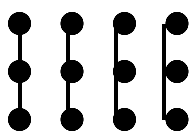
Gesetz der räumlichen Nähe (vgl. auch Beispiel oben):



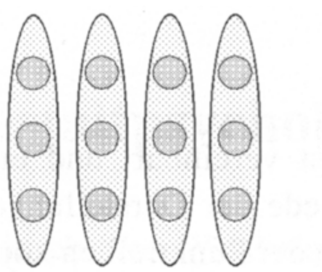
Gesetz der Ähnlichkeit bzw. der Gleichartigkeit:



Gesetz des Zusammenhangs:



Gesetz des gemeinsamen Bereichs:



In allen fünf Anordnungen wird man 4 Spalten mit jeweils 3 Elementen „sehen", also sagen können, daß hier 4 - 3 runde Plättchen gezeichnet sind.

2.5 Vorstellungsbilder zu Zahlen und Rechenoperationen

Die wechselseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Darstellungsebenen und die Bedeutung der Übersetzungen für den Lernprozeß waren Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Hierbei ist insbesondere von Interesse, welche Vorstellungsbilder Grundschülerinnen und -schüler zu Zahlen und Rechenoperationen besitzen und ob diese Bilder Rückübersetzungen in die erlebte Handlungs- bzw. Veranschaulichungsphase des eigenen Mathematikunterrichts sind. Legt man Kindern einfache Rechenaufgaben vor mit der Bitte, diese mit Hilfe einer Zeichnung jemandem verständlich zu machen, der unsere Sprache und auch unsere Zeichen nicht kennt, z. B. einem Kind aus China, so tritt in den Zeichnungen eine Vielzahl unterschiedlicher Vorstellungsbilder zutage.

In einer empirischen Untersuchung von U. Grevsmühl wurden mehrere hundert Zeichnungen von Grundschülerinnen und -schülern der vier Klassenstufen sowohl nach ihrem Grad der Abstraktion (analogisch, schematisch, symbolisch) als auch nach dem Grad der Dynamik (statisch, dynamisch) ausgewertet (vgl. 2.3), von denen in den Abb. 7 bis 10 insgesamt 13 wiedergegeben sind. Die Untersuchung ergab hierbei keine nennenswerte Abhängigkeit vom Alter oder Geschlecht, jedoch eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Leistung im Rechnen, der jeweils dargestellten Rechenoperation und von den im Unterricht verwendeten Lehr- und Lernmitteln.

Darstellungen von Additionsaufgaben (Male ein Bild oder eine Bildgeschichte!)

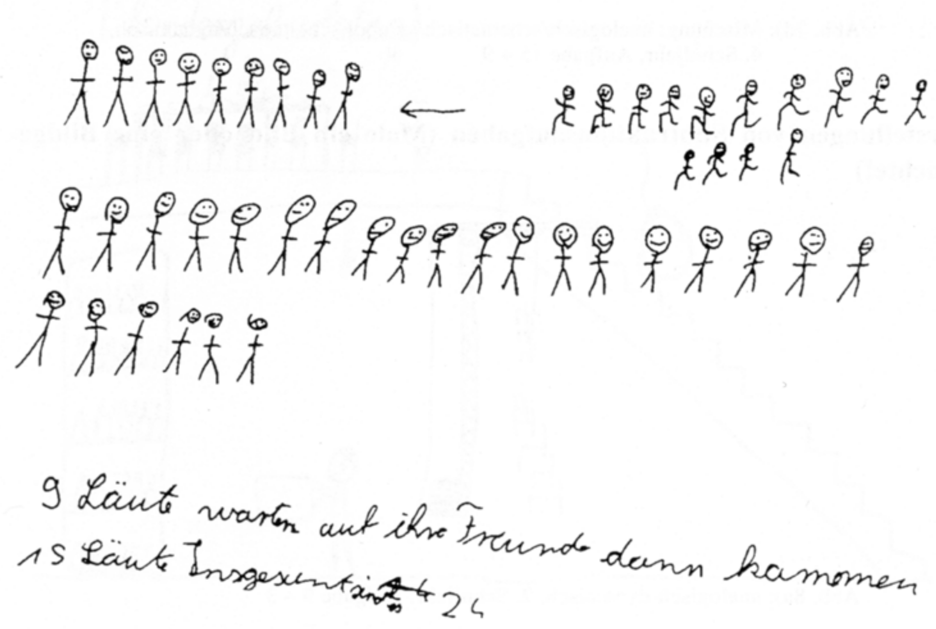


Abb. 7a): analogisch-dynamisch mit sprachlich-symbolischem Zusatz, 3. Schuljahr, Aufgabe 9 + 1 5

Abb. 7b): analogisch-statisch, 1. Schuljahr, Aufgabe 2 + 7

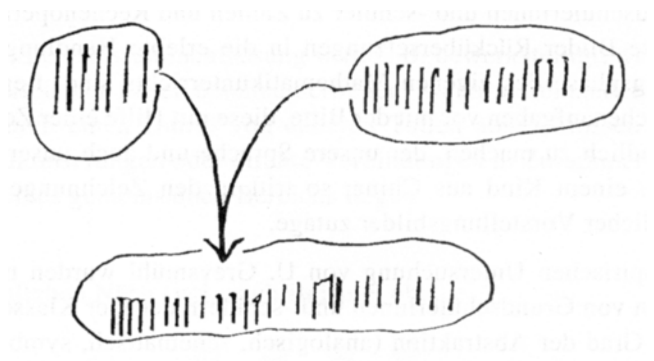


Abb. 7c): schematisch-dynamisch, 3. Schuljahr, Aufgabe 7 + 1 9 (rechts oben nur 18)

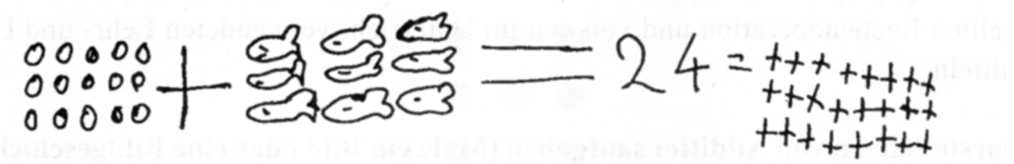


Abb. 7d): Mischung: analogisch/schematisch/symbolisch-statisch/dynamisch, 4. Schuljahr, Aufgabe 15 + 9

Darstellungen von Subtraktionsaufgaben (Male ein Bild oder eine Bildgeschichte!)

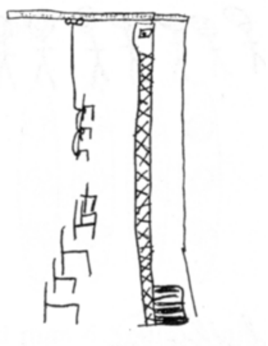


Abb. 8a): analogisch-dynamisch, 2. Schuljahr, Aufgabe 9 - 3

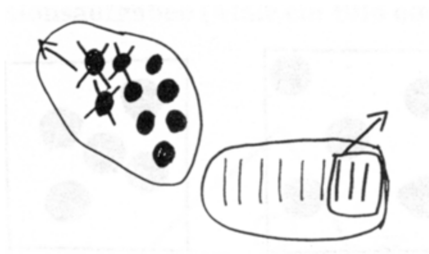


Abb. 8b): schematisch-dynamisch, 2. Schuljahr, Aufgabe 9 - 3
(links dargestellt als Entfernen dreier einzelner Elemente, rechts als Entfernen einer Teilmenge mit drei Elementen)

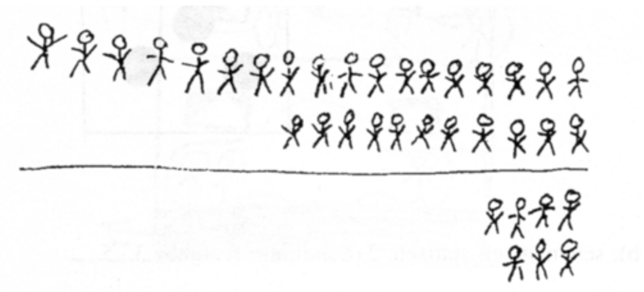


Abb. 8c): analogisch/schematisch-statisch (mit Anklang an schriftliches Rechnen), 3. Schuljahr, Aufgabe 1 8 - 1 1

Darstellungen von Multiplikationsaufgaben (Male ein Bild oder eine Bildgeschichte!)

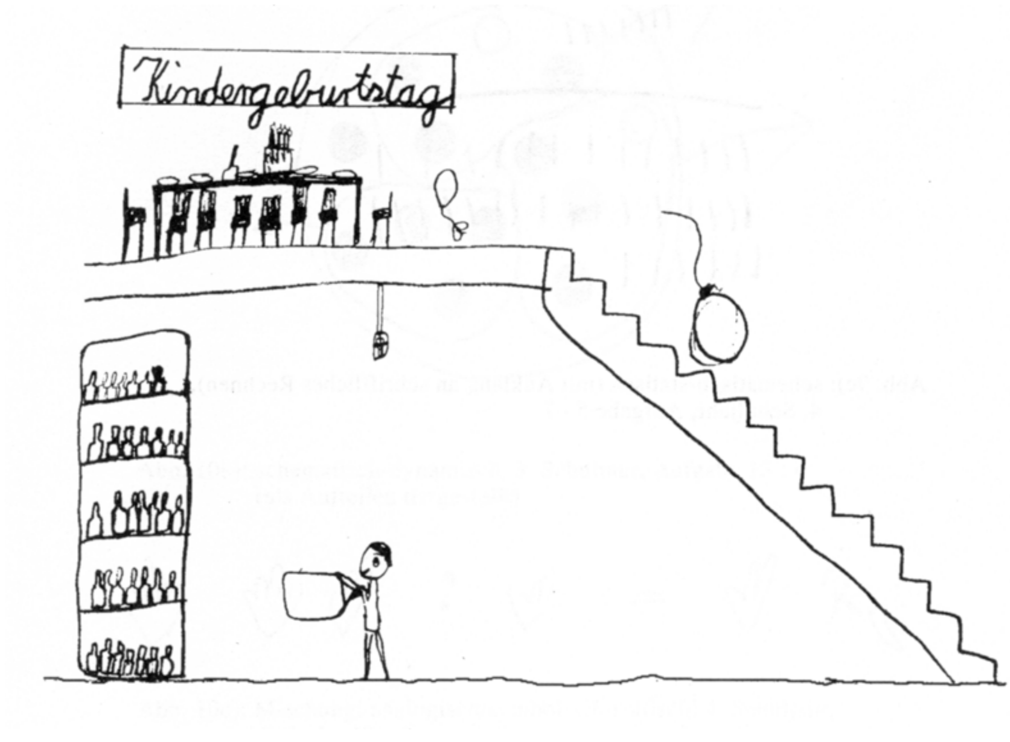


Abb. 9a): analogisch-dynamisch, 3. Schuljahr, Aufgabe 5 · 7

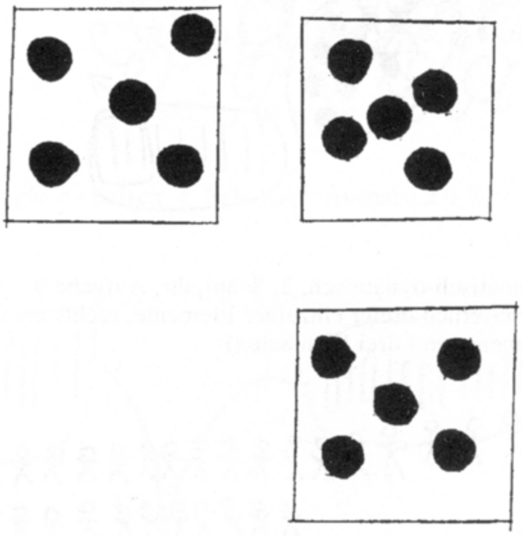


Abb. 9b): schematisch-statisch, 2. Schuljahr, Aufgabe 3 · 5

Abb. 9c): schematisch-statisch (mit Anklang an schriftliches Rechnen), 4. Schuljahr, Aufgabe 5 · 7

Darstellungen von Divisionsaufgaben (Male ein Bild oder eine Bildgeschichte!)

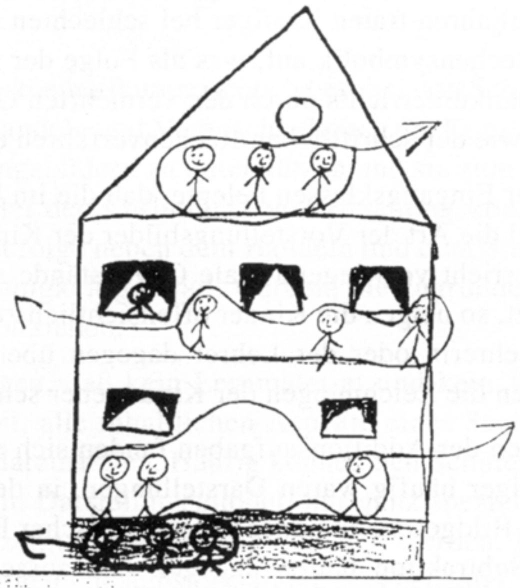


Abb. 10a): analogisch-dynamisch, 3. Schuljahr, Aufgabe 13 : 4 (als Verteilen dargestellt)

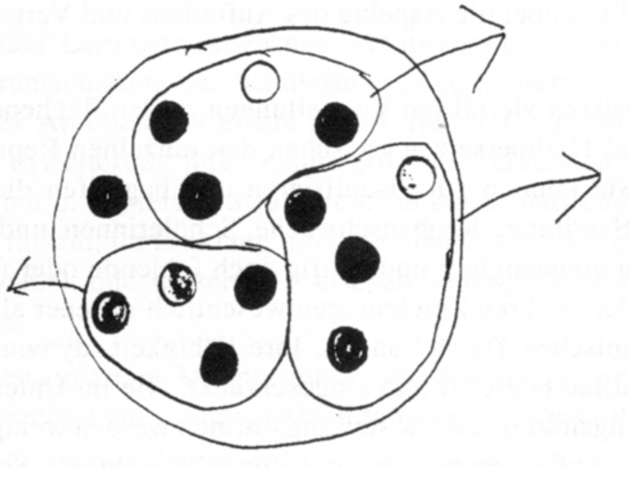


Abb. 10b): schematisch-dynamisch, 3. Schuljahr, Aufgabe 13 : 4 (als Aufteilen dargestellt)

Abb. 10c): Mischung: analogisch/symbolisch-statisch, 4. Schuljahr, Aufgabe 13:4

Auffallend ist, daß die guten Rechner mehr dynamische als statische sowie mehr analogische als schematische Darstellungen verwendeten, während hei den rechenschwachen Schülerinnen und Schülern die umgekehrte Tendenz zu beobachten war.

In den höheren Schuljahren traten häufiger bei schlechten als bei guten Rechnern Darstellungen mit Rechensymbolik auf, was als Folge der zunehmenden Formalisierung des Mathematikunterrichts durch den vermehrten Gebrauch von Zahl- und Rechensymbolen sowie der schriftlichen Rechen verfahren erklärt werden kann.

Ein Vergleich zweier Eingangsklassen belegte, daß die im Unterricht eingesetzten Lehr- und Lernmittel die Art der Vorstellungsbilder der Kinder beeinflussen. Werden im Anfangsunterricht vorwiegend reale Gegenstände aus der Erfahrungswelt der Kinder eingesetzt, so neigen die Kinder offensichtlich zu analogischen Darstellungen. Setzt die Lehrerin oder der Lehrer dagegen überwiegend strukturiertes Material ein, so fallen die Zeichnungen der Kinder eher schematisch aus.

Bei den Darstellungen der Additionsaufgaben fanden sich am häufigsten statische Mengenbilder. Weniger häufig waren Darstellungen, in denen die Operation der Addition durch eine Bildgeschichte oder in schematischer Form verdeutlicht wird. Darstellungen der Subtraktion hatten dagegen fast ausschließlich dynamischen Charakter; hier wird die Rechenoperation durch Entfernen oder Wegstreichen von Elementen sichtbar gemacht. Multiplikationsaufgaben wurden unter Verwendung des räumlich-simultanen Aspekts überwiegend statisch abgebildet. Nur wenige Schülerinnen und Schüler verwendeten den dynamischen, zeitlich-sukzessiven Aspekt in Form von Bildgeschichten. Der kombinatorische Aspekt trat fast überhaupt nicht auf. Divisionsaufgaben wurden gleichermaßen dynamisch als auch statisch dargestellt, wobei die Aspekte des Aufteilens und Verteilens gleich häufig auftraten.

Gute Rechner besitzen vielfältige Vorstellungen zu den Rechenoperationen. Ihnen fallt das Hin- und Herübersetzen zwischen den einzelnen Repräsentationsebenen zumeist leicht. Sie können gut visualisieren und begreifen die Rechenoperation dynamisch als Handlung. Rechenschwache Schülerinnen und Schüler dagegen haben wesentlich eingeengtere und häufig auch fehlende oder falsche Vorstellungen. Sie verwenden in ihren Zeichnungen wesentlich seltener als gute Rechner die analogisch-dynamischen Darstellungen. Ihre Fähigkeit, dynamisch zu visualisieren, ist offensichtlich begrenzt und eingeschränkt. Die im Unterricht angebotenen Veranschaulichungsmittel und Darstellungsformen werden wenig verinnerlicht und dienen kaum zum Aufbau entsprechender Vorstellungsbilder. Soll eine Rechenaufgabe zeichnerisch dargestellt werden, so ist dies häufig eine Übersetzung der einzelnen Zahlsymbole in statische Mengenbilder, ohne daß die Operation durch Handlung visualisiert wird.

2.6 Hinweise zu Lernmaterialien und Veranschaulichungsmitteln

Vorrangiges Ziel des Mathematikunterrichts ist es, bei den Schülerinnen und Schülern durch geeignetes Handeln und Veranschaulichen die Konstruktion von aktiven, dynamischen Vorstellungsbildern zu unterstützen und sie zum mentalen Operieren mit ihnen anzuregen. Bei der Ausbildung von Handlungskonzepten und Vor-stellungsbildern muß demzufolge neben dem Handeln und dem Sinneskontakt mit dem Gegenstand auch die Fähigkeit geschult werden, die zugrundeliegenden Handlungen im Geiste nachzuvollziehen.

Allgemein läßt sich sagen, daß kein Lernmaterial und kein Veranschaulichungsmittel allein geeignet ist, alle inhaltlichen Aspekte eines Sachverhalts umfassend und in gleichem Maße darzustellen. Häufig können den Schülerinnen und Schülern beim Arbeiten mit einem Darstellungsmodell nur ganz spezielle Sachverhalte und Aufgabenstellungen gezeigt und einsichtig gemacht werden. Darüber hinaus sind viele Darstellungsmodelle nicht selbsterklärend, was bedeutet, daß das Sehen eines bestimmten mathematischen Sachverhalts in einem für die Kinder neuen Lernmaterial oder in einer neuen Darstellungsform erst erlernt werden muß. Während bei einigen Veranschaulichungsmitteln die Alltagserfahrungen hilfreich sind, müssen bei anderen zuerst Erfahrungen durch Handlung gesammelt werden. Deshalb wird der Lehrer oder die Lehrerin je nach Thema das jeweils passende Darstellungsmodell auswählen.

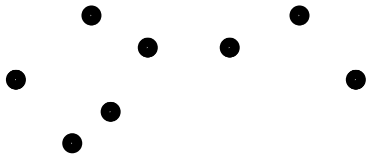
Die Einführung neuer Lernmaterialien und Veranschaulichungsmittel führt nicht selten zu einer Verunsicherung der Schülerinnen und Schüler. Werden sie jedoch durch ausreichendes Arbeiten mit einem neuen Material vertraut, so erfahren sie dadurch auch eine Erweiterung ihres Zahlbegriffs und erkennen in den einzelnen Darstellungsmodellen u.a. gleiche Strukturen. Im mathematischen Anfangsunterricht ist es deshalb ratsam, im Einklang mit dem Schulbuch zwei oder drei Darstellungs-modelle zu wählen und weitere Veranschaulichungsmittel nur zur Differenzierung einzusetzen.

Im folgenden werden einige im Anfangsunterricht verwendete Lernmaterialien und Veranschaulichungsmittel zur Zahlbegriffsbildung kurz vorgestellt.

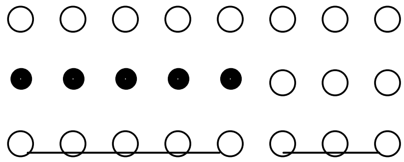
Darstellung durch Mengen

Bei der Darstellung durch Mengen wird der kardinale Zahlaspekt herausgestellt. Die einzelnen Elemente der Menge können ganz unterschiedlich gewählt werden: natürliche Dinge und Personen, z.B. Äpfel, Nüsse, Steine, Perlen, Schüler oder künstliche Dinge und abstrakte Zeichen, z.B. Plättchen, Steckwürfel, Punkte, Striche. Auch die Anordnung der Elemente, seien sie konkreter oder abstrakter Art, spielt eine Rolle.

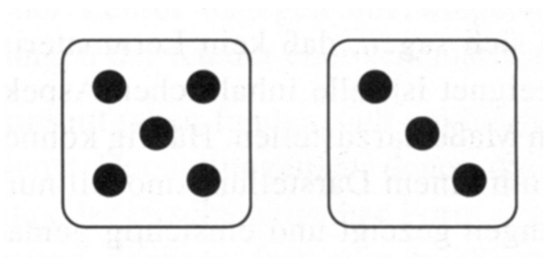
Ungeordnete Mengen:



In Reihen geordnete Mengen:



Mengen als Punktbilder:



Mengen als zweidimensionale Punktfelder mit Reihen und Spalten:

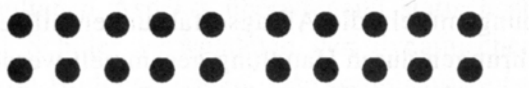


Abb. 11a) Zwanzigerfeld

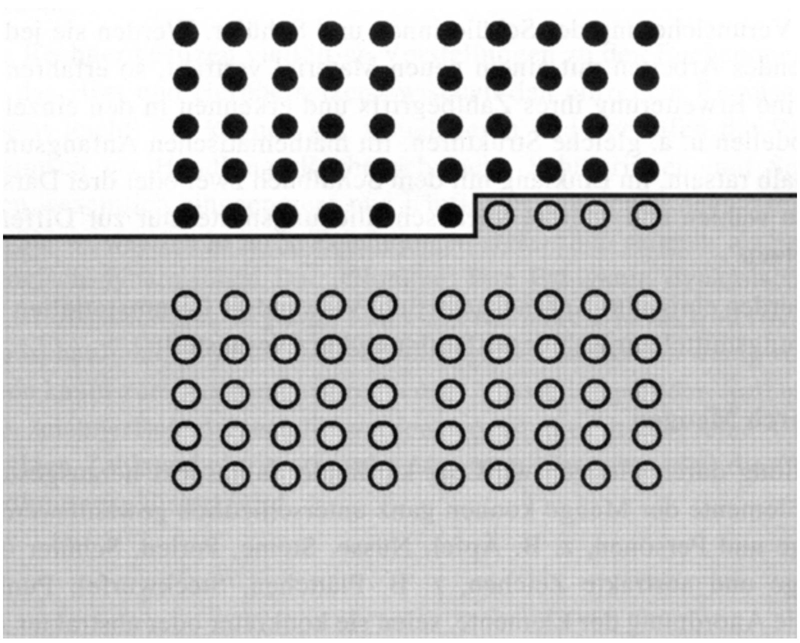


Abb. 11b) Hunderterfeld, hier mit Winkelschablone, z.B. zur Darstellung der Zahl 46

Darstellung durch Größen

Bei der Darstellung durch Größen werden die Zahlen als Maßzahlen von Längen, Flächeninhalten, Rauminhalten, Geldwerten usw. interpretiert.

Bei den **Farbstäben** nach **Georges Cuisenaire** werden die Zahlen von l bis 10 durch quadratische Säulen der Längen l cm bis 10 cm mit einheitlicher Einfärbung ohne Untergliederung dargestellt. Verwandte Zahlen, z. B. die Dreierreihe, tragen Farben einer Farbfamilie.

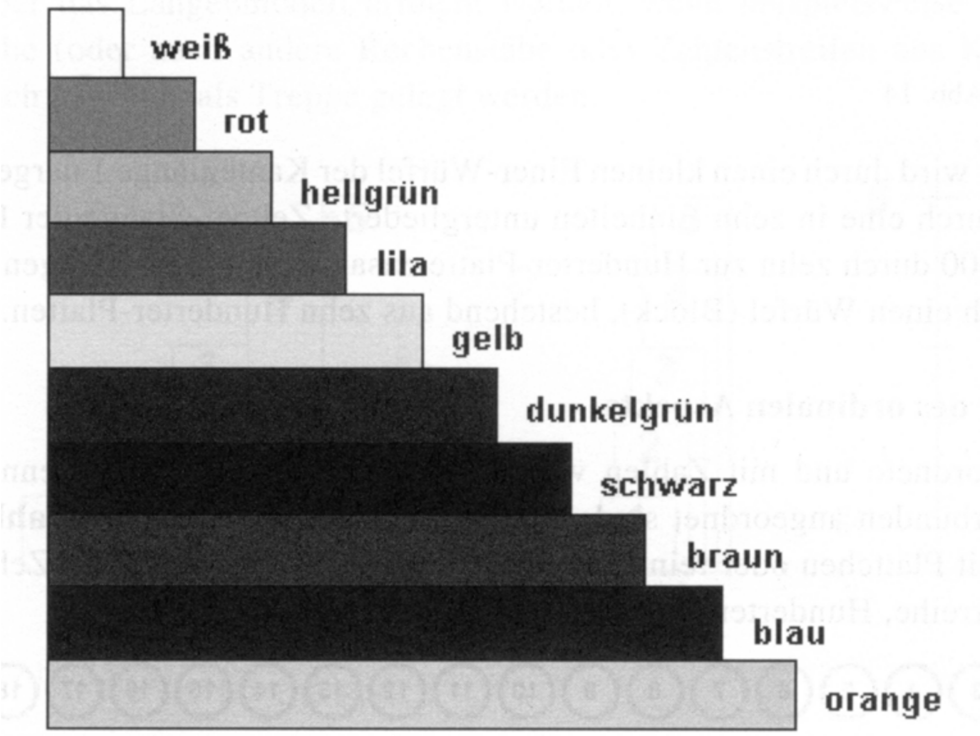


Abb. 12

Eine Verbindung vom diskreten Mengenmodell zu kontinuierlichen Größenmodellen bilden **Steckwürfel,** z. **B.** die Multilink- oder Druckknopf-Steckwürfel, die zu Stangen bzw. Türmen (Längen), Platten (Flächeninhalten) oder Quadern (Rauminhalten) zusammengesteckt werden können.

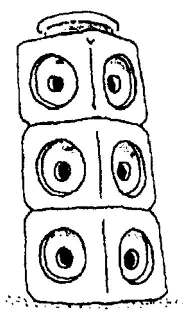


Abb. 13

Auch die **Mehr-System-Blöcke** nach **Z. P. Dienes** können sowohl dem Mengen- als auch dem Längen-, Flächen- oder Volumenmodell zugeordnet werden.

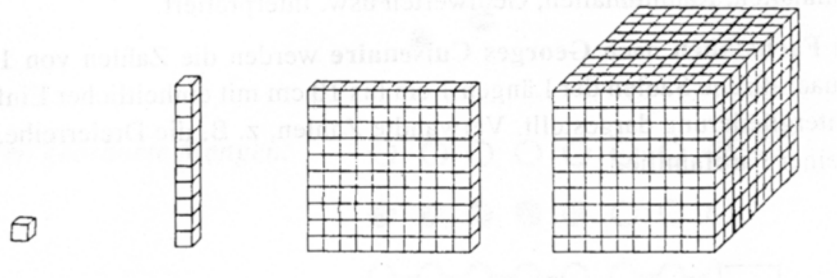
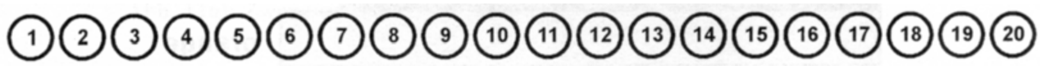


Abb. 14

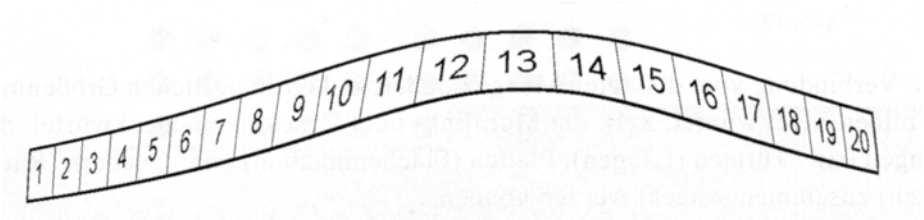
Die Zahl l wird durch einen kleinen Einer-Würfel der Kantenlänge l dargestellt, die Zahl 10 durch eine in zehn Einheiten untergliederte Zehner-Stange der Länge 10, die Zahl 100 durch zehn zur Hunderter-Platte zusammengefügte Stangen, die Zahl 1000 durch einen Würfel (Block), bestehend aus zehn Hunderter-Platten.

Betonung des ordinalen Aspekts

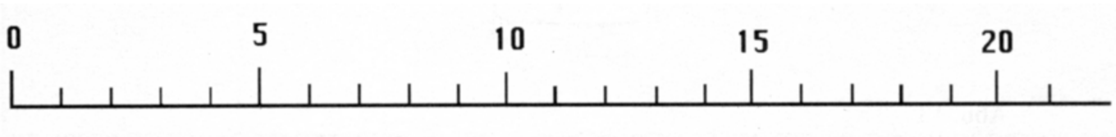
Linear geordnete und mit Zahlen versehene Punktmengen, die getrennt oder zu Ketten verbunden angeordnet sind, können als **Zahlenreihen** oder **Zahlenketten** konkret mit Plättchen oder rein zeichnerisch dargestellt werden, z.B. Zehnerreihe, Zwanzigerreihe, Hunderterreihe.



Zahlenbänder wie das Zwanziger- und Hunderterband bilden eine Vorstufe des Zahlenstrahls.



Der Zahlenstrahl ist für die Zahlbereichserweiterung von großer Bedeutung. Auf den ersten Blick könnte man erwarten, daß die Darstellung am Zahlenstrahl ähnlich ist der Darstellung durch Längen. Jedoch entsteht der Zahlenstrahl nicht einfach durch Wegnehmen der Maßeinheit. Die Zahlen werden nun nicht als Maßzahlen von Längen, sondern als Punkte auf einem Strahl interpretiert und dargestellt. Das Modell trägt zur Erweiterung des Zahlbegriffs bei, indem hier auch die Zahl Null auftritt und die Unendlichkeit der Menge der natürlichen Zahlen durch den nach einer Seite hin unbegrenzten Strahl angedeutet wird.



Das Verständnis des Zahlenstrahls beruht auf der Anordnung der Zahlen nach der Größer-Kleiner-Relation. Bei den Schülerinnen und Schülern setzt dies eine Kenntnis der Rechts-Links-Orientierung voraus. Eine Drehung des Zahlenstrahls in vertikale Lage wäre nicht nur für diejenigen Kinder hilfreich, die eine Schwäche in der Rechts-Links-Orientierung aufweisen, sondern ganz allgemein für alle Kinder, da die Oben-Unten-Orientierung im allgemeinen früher entwickelt ist.

Der Zahlenstrahl vereinigt verschiedene Aspekte der Zahlverwendung, kardinal, ordinal und Maßzahl, und stellt damit begrifflich höhere Anforderungen als die Darstellung durch Mengen oder Längen. Seine Einführung kann in natürlicher Weise über das Längenmodell erreicht werden, wenn beispielsweise die Cuisenaire-Stäbe (oder auch andere Rechenstäbe oder Zahlenstreifen aus Karton) der Länge nach geordnet als Treppe gelegt werden.

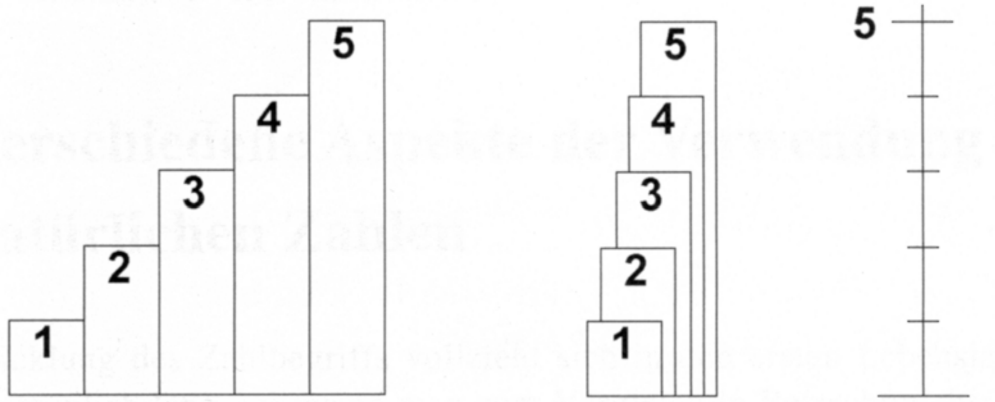


Abb. 15

Die **Hundertertafel** ist zur detaillierten Erarbeitung des Zahlenraums bis 100 hervorragend geeignet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 16

Wie beim Hunderterfeld lassen sich auch an der Hundertertafel zweistellige Zahlen durch Mengen darstellen; bei der Hundertertafel steht allerdings der Ordinalzahlaspekt im Vordergrund.

Die dezimale Schreibweise tritt deutlich hervor; die ungeraden und die geraden Zahlen lassen sich leicht erkennen, die Fünfer- und die Zehnerzahlen ebenso. Analogien sind deutlich sichtbar, z. B. 8 + 7 = 15, 18 + 7 = 25, 78 + 7 = 85 usw. Zur Einführung und zu weiteren Aktivitäten mit der Hundertertafel vgl. Abschnitt 4.4.