## Physikalische Beispiele zur Integralrechnung

In diesem Kapitel wollen wir uns zwei physikalischen Anwendungen der Integralrechnung zuwenden. Das erste nimmt sowohl auf die graphische, als auch auf die mathematische Integralrechnung Bezug und stellt die Analogie beider Vorgehensweisen nochmal dar, das zweite bleibt der mathematischen vorbehalten, hat dafür aber recht praktische Konsequenzen.

### Feder

Das Beispiel einer Feder hat in vielen Begleittexten bereits Erwähnung gefunden. Auch diesmal wollen wir dem in nichts nachstehen und die Feder im Lichte der Integralrechung näher betrachten. Versucht man eine (entspannte) Metallfeder zusammenzudrücken, so wird man feststellen, dass man sich dafür annstrengen bzw. (physikalisch ausgedrückt) Arbeit leisten muss, denn die Feder ist bestrebt, sich immer im entspannten Zustand zu befinden. Drücken wir die Feder zusammen, so wird die Feder dazu gezwungen, diese bevorzugte Lage zu verlassen. Sie wird ihrerseits versuchen, diesen entspannten Zustand wieder anzunehmen und wirkt mit einer Kraft $F$ der äußeren Störung entgegen. $F$ wollen wir deswegen *Federkraft* nennen. Man stellt fest, dass die Kraft proportional zur zusammengestauchten Stecke $x$ ist und findet folgende Formel (das *Hooke'sche Gesetz*):

$$F = D \cdot x$$

und ihre Veranschaulichung in Abbildung 7625.

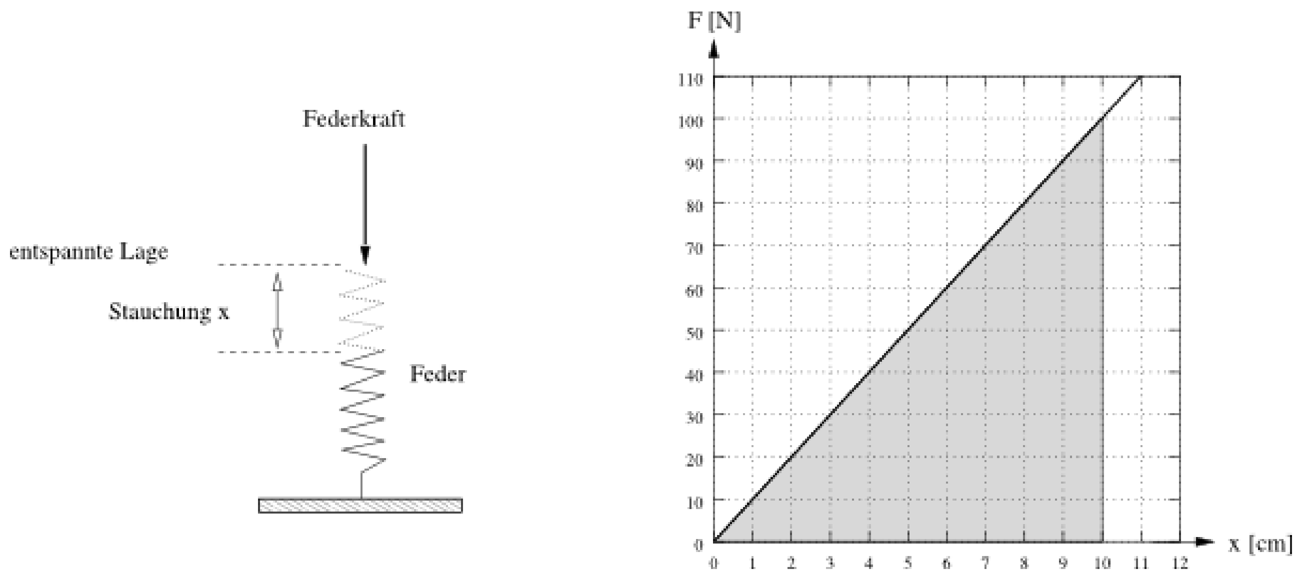


**Abb. 7625** Zur Zusammenstauchung einer Feder (SVG)

Das $D$ (die *Federkonstante*) ist hier so gewählt, dass man die Feder pro zusammengestauchtem Zentimeter mit 10 N belasten muss.

$$D = 10\,\frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Wieviel Arbeit müsste man leisten, wenn man die Feder um 10 cm zusammendrücken wollte? Die Arbeit ist allgemein definiert als:

$$\Delta W = \int F dx$$

Nun können wir für $F$ Formel das *Hooke'sche Gesetz* einsetzen und von $x_A = 0\,\text{cm}$ bis $x_E = 10\,\text{cm}$ integrieren:

$$\Delta W = \int_{0\,\text{cm}}^{10\,\text{cm}} D \cdot x dx$$

---

**Aufgabe**

Berechnen Sie das Integral in obiger Gleichung:

$$\Delta W = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wie lautet die allgemeine Formel für beliebige Stauchungen $x$?

$$\Delta W = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**Lösung.**

Das Integral liefert den Wert

$$\Delta W = 500\,\text{Ncm} = 5\,\text{Nm}.$$

Die allgemeine Funktion (die Stammfunktion) lautet:

$$\Delta W = \tfrac{1}{2} D \cdot x^2$$

Lösung verstecken

Man hätte sich die mathematische Mühe auch sparen können. Wie wir ja wissen, bedeutet das Integral nichts anderes als den Flächeninhalt. In diesem Falle den von den Grenzen $x_A = 0\,\text{cm}$ und

$x_E = 10\,\mathrm{cm}$ eingeschlossenen Flächeninhalt im Graphen des Diagramms in Abbildung 7625. Die Fläche ist ein Dreieck, die sich über

$$\Delta F_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\,\text{Grundstrecke} \cdot \text{Höhe}$$

berechnet. Die Grundstrecke sind gerade unsere $10$ cm, die Höhe $100$ N. Somit erhält man für die Fläche bzw. für die zu leistende Arbeit:

$$\Delta W = \Delta F = 500\,\mathrm{Ncm} = 5\,\mathrm{J}$$

Wenn Sie dieses Ergebnis mit dem Ihrigen aus der Übung vergleichen, sollten Sie feststellen, dass sie identisch sind. Die Wahl des Lösungsweges ist von der jeweiligen Situation und von der Frage abhängig, ob wir den funktionalen Zusammenhang der Kraft (also das *Hooke'sche Gesetz*) kennen.

**Bewegungsgleichungen**

Die Bewegungslehre ist ein Teilgebiet der Mechanik. Sie beschäftigt sich mit der Fragestellung: An welchem Ort $s$ befindet sich ein Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt? Welche Geschwindigkeit $v$ und welche Beschleunigung $a$ hat er zu diesem Zeitpunkt? Die Größe Ort $s$, Geschwindigkeit $v$ und Beschleunigung $a$ heißen Bewegungsgrößen. Der Bewegungszustand eines Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt wird durch die Angabe dieser drei Bewegungsgrößen beschrieben. Es wäre natürlich besonders schön, wenn man die Bewegungszustände gleich für alle Zeitpunkte angeben könnte. Dazu muss man wissen, wie sich diese Größe in Abhängigkeit von der Zeit benehmen, d.h. man muss für jede der Bewegungsgröße eine Funktionsgleichung finden, die ihre Abhängigkeit von der Zeit $t$ beschreibt. (Ersatzweise tut's auch der Graph.) Eine solche Funktionsgleichung heißt auch*Bewegungsgesetz*. Da es drei Bewegungsgrößen gibt, gibt es auch drei Arten von Bewegungsgesetzen: das *Weg-Zeit-Gesetz*, das *Geschwindig-keits-Zeit-Gesetz* und schließlich das *Beschleunigungs-Zeit-Gesetz*. Wir wollen diese Gesetze anhand der gleichförmig beschleunigten Bewegung entdecken. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung definiert sich darüber, dass wir einen Körper haben, der einer konstanten Beschleunigung $a$ ausgesetzt ist. Der freie Fall ist ein solcher Bewegungsvorgang. Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz lautet:

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

mit dem dazugehörigen Graphen in Abbildung 7607.

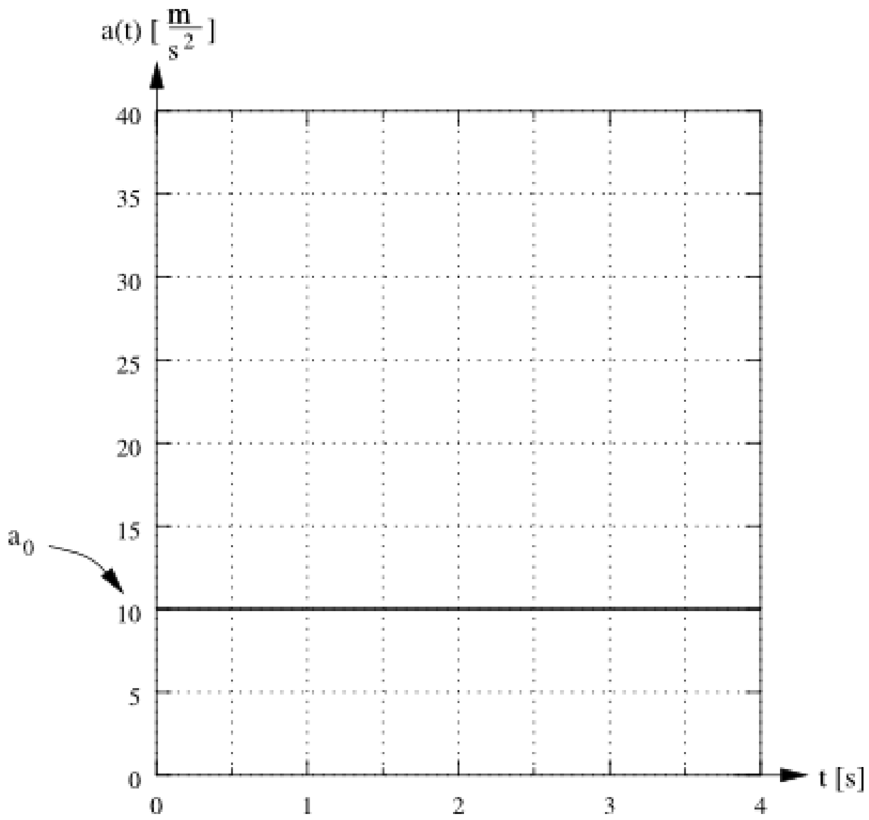


**Abb. 7607** Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz für eine konstante Beschleunigung (SVG)

Angemommen wir wollten diese konstante Funktion integrieren. Welche Einheit hättee der Flächeninhalt? Schlagen Sie die Übung im Abschnitt "Flächen und ihre Einheiten" nach. Dort wurde nach genau diesem Fall gefragt. Hat die $x$-Achse die Einheit s (Sekunden) und die $y$-Achse die Einheit $\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$, dann hat die Fläche bzw. das Integral die Einheit $\mathrm{m}/\mathrm{s}$, also die Einheit einer Geschwindigkeit! Das können wir verallgemeinern:

**Die Fläche $\Delta F(t_\mathrm{A}, t_\mathrm{E})$ unter einer Kurve in einem $a$-$t$-Diagramm gibt die Geschwindigkeitsänderung $\Delta v$ zwischen $t_\mathrm{A}$ und $t_\mathrm{E}$ an!**

Um den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsänderung $\Delta v$ und der Beschleunigung $a$ herszustellen, müssen wir die Stammfunktion finden. Sie lautet:

$$F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$$

Setzt man die entsprechenden Grenzen ein, dann folgt:

$$\Delta v = a_0 \cdot (t_\mathrm{E} - t_\mathrm{A}) = a_0 \cdot \Delta t$$

Diese Gleichung wird Ihnen unter Umständen umgeformt bekannter vorkommen:

$$\Longrightarrow \quad a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sie drück aus: Die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit ($\Delta v$) in einer bestimmten Zeit ($\Delta t$)! Wenn Sie die Geschwindigkeit Ihres Autos von 0 auf 40 m/s in 4 Sekunden erhöht, beschleunigen Sie es um $a = 10\mathrm{m/s}^2$. Zurück zu dem konkreten Beispiel: Wir haben den freien Fall betrachtet und festgestellt, dass die Geschwindigkeit linear mit der Zeit wächst. Wir sind stillschweigend davon ausgegangen, dass wir den Körper einfach fallengelassen haben, sprich: er hatte zu Beginn des Falls keine Geschwindigkeit. Nehmen wir an, wir werfen den Körper nach unten. Dann hat der Körper eine *Anfangsgeschwindigkeit* $v_0$ und wir müssen Gleichung $F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$ modifizieren.

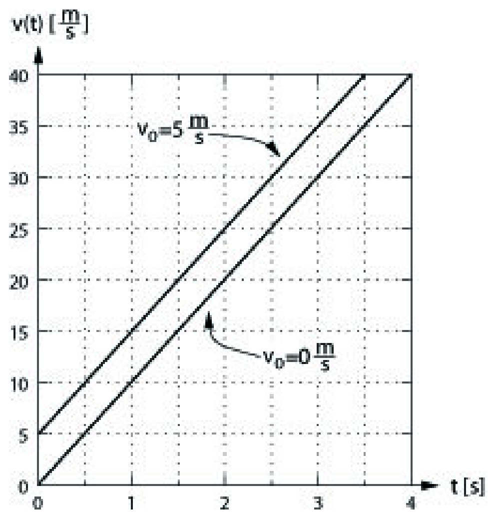


**Abb. 4645** Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten

Erinnern Sie sich an die Notiz im Abschnitt "Hauptsatz der Integralrechnung"? Dort war die Rede davon, dass es eine unendliche Anzahl von Stammfunktionen gibt, da alle gleichen Funktionen mit verschiedenen zusätzlichen Konstanten dieselbe Ableitung besitzen. Auch $F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$ist nicht die einzige Stammfunktion. Alle Funktionen der Form

$$v(t) = a_0 \cdot t + c$$

mit beliebigen Konstanten $c$ sind zugleich Stammfunktionen zu $a(t) = a_0$. Physikalisch hat die Konstante $c$ die Bedeutung einer *Anfangsbedingung*, hier also der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$, die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0\mathrm{s}$. In Gleichung $F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$ ist $c$ bzw. $v_0 = 0$. Die physikalisch allgemeinste Stammfunktion lautet demnach:

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

Diese Gleichung ermöglicht es uns, die jeweilige Geschwindigkeit des Körpers für alle Zeiten $t$ zu berechnen und wir finden eine lineare Beziehung zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit: das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz (Abbildung 4645). Darauf aufbauend können wir uns jetzt fragen, welche Strecke ein Körper in einer ganz bestimmten Zeit zurücklegt, wenn seine Geschwindigkeit dem Gesetz in Gleichung $F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$ folgt. Aus Abschnitt "Fläche und ihre Einheiten" wissen wir bereits, dass das Integral über die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve die in den

Integrationsgrenzen zurückgelegte Strecke liefert. Wir benötigen also wieder die Stammfunktion, diesmal die Stammfunktion von Formel $F(t) = v(t) = a_0 \cdot t$. Sie lautet:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

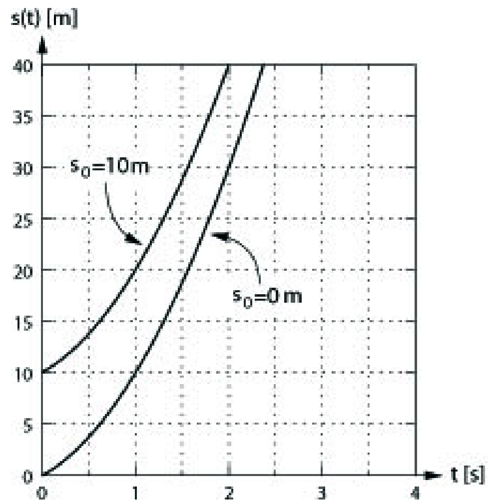


**Abb. 4646** Das Weg-Zeit-Gesetz für verschiedene Anfangsorte

Auch diesmal müssen wir berücksichtigen, dass dies nur eine Stammfunktion von vielen ist. Wieder müssen wir eine Anfangsbedingung angeben. Allgemein folgt analog zum Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz das Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Eine Auftragung für verschiedene $s_0$ ergibt Abbildung 4646. Zur Erinnerung: diese Gleichungen gelten für **alle** Bewegungen mit konstanter Beschleunigung (das werden die meisten sein, die Sie kennenlernen werden). Aus Formel $s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$ folgt unmittelbar das "normale" Weg-Zeit-Gesetz, das Sie garantiert kennen. Wenn wir keine Beschleunigung ($a_0 = 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$) und $s_0 = 0\mathrm{m}$ haben, folgt:

$$s(t) = v_0 \cdot t,$$

oder, wenn wir die Grenzen $t_\mathrm{A}$ und $t_\mathrm{E}$ einsetzen und integrieren:

$$\Delta s = v_0 \cdot (t_\mathrm{E} - t_\mathrm{A}) = v_0 \cdot \Delta t.$$

Umgeformt ergibt das

$$\Longrightarrow \quad v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

und somit die Geschwindigkeitsdefinition, wie Sie sie ja bereits kennen: Die Geschwindigkeit ist die Änderung des Ortes ($\Delta s$) in einer bestimmten Zeit ($\Delta t$)!

**Nachtrag**

Wir haben herausgefunden, dass das Integral über eine Beschleunigungs-Zeit-Kurve ein Geschwindigkeits-Zeit- und das über die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve ein Weg-Zeit-Gesetz liefert. Außerdem wissen wir, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist. Somit sollte man über die Ableitung des Geschwindigkeits-Zeit-Gesetzes das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz und über die Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz erhalten. Prüfen Sie das einfach mal nach! Man erhält für den Zusammenhang der drei Größen Beschleunigung $a(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Weg $s(t)$ folgendes Schema (die Zeichenfolge $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ steht für die Ableitung):

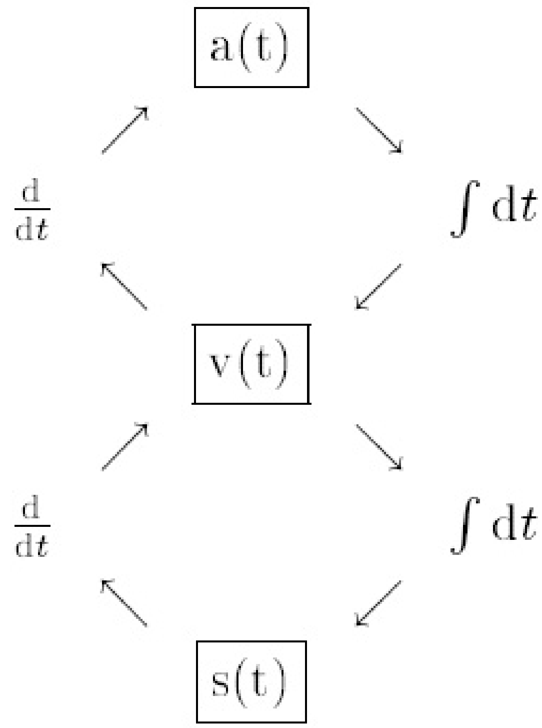


**Abb. 4647**

Wir wollen es hiermit bewenden lassen und das Thema "**Integralrechnung**" abschließen. Versuchen Sie im Anschluß die Testaufgaben zu lösen.