

ZUM STABILITÄTSPROBLEM DES STARR ODER ELASTISCH GEBETTETEN
KREISRINGES INFOLGE GLEICHMÄSSIGER TEMPERATURERHÖHUNG

Von H. Hain und B. Falter ^{*)}

Übersicht: Das Stabilitätsproblem eines radial elastisch gebetteten Kreisringes unter gleichmäßiger Temperaturerhöhung wird mit der klassischen Stabilitätstheorie, einer geometrisch nichtlinearen Theorie und durch Versuche untersucht. Die Ergebnisse für die kritische Temperatur, das Verhalten im überkritischen Bereich und den Einfluß von Vorverformungen werden in Diagrammen in Abhängigkeit von zwei Steifigkeitsparametern angegeben.

Summary: The stability of circular rings with radial elastic support under a uniform temperature rise is investigated by classical theory of stability, by geometrically nonlinear theory and by tests. The results for the critical temperature, the behavior in the postcritical range and the influence of initial irregularities are presented in graphs as functions of two stiffness parameters.

1. Einleitung

Das Problem eines Kreisringes in starrer oder elastischer Umhüllung, der durch Temperaturerhöhung des Ringes oder durch Vorspannung der Umhüllung einem Kontakt-Außendruck ausgesetzt wird, spielt in verschiedenen Anwendungsgebieten in der Praxis eine Rolle. Hier sind vor allem unterirdische Behälter zur Aufnahme verflüssigter Gase und vorge-spannte Druckbehälter von Kernkraftwerken zu nennen.

Eine erste theoretische Untersuchung zu diesem Problemkreis stammt von BERGMAN [1], der die Temperaturbeulung einer kreiszylindrischen Behälterauskleidung untersucht hat. CHWALLA/STEINER [2] betrachten für Druckrohr- und Druckschachtpanzerungen das starr ummantelte Rohr unter Außendruck und für Temperaturerhöhung. Für den Temperaturlastfall werden dabei die Ergebnisse von BERGMAN bestätigt. 1963 stellte METTLER [3] fest, daß BERGMAN und CHWALLA/STEINER für den Fall des Kontaktdruck-Problems durch unvollständige Anwendung des energetischen Stabilitätskriteriums Stabilitätsgrenzen ermittelt hatten, jedoch bei konsequenter Anwendung unbegrenzte Stabilität des Grundzustandes resultiert. METTLER zog daraus die Folgerung, daß das starr ummantelte Rohr durch Erwärmung oder Verengung der Umhüllung nicht zum Beulen gebracht werden könne. CHAN/McMINN [4] zeigten jedoch 1966, daß der starr ummantelte Ring unter Kontaktdruck zwar nach der klassischen Stabilitätstheorie keine Instabilität aufweist, jedoch durch Störkräfte ausgelöst in einen neuen Gleichgewichtszustand mit größeren Verformungen durchschlagen kann.

BRITVEC [5] untersuchte ebenfalls 1966 die thermische Knickung von starr umhüllten Kreisringen. Bei der Lösung der sich ergebenden nichtlinearen Beziehungen wird er ähnlich wie PFLÜGER [6] bei der Untersuchung des Knickstabes auf elliptische Integrale geführt. Die erhaltenen Temperatur-Verschiebungs-Kurven zeigen keinen Verzweigungspunkt. Sie fallen im Bereich sehr kleiner Beulverformungen stark ab und steigen nach Erreichen des Minimums etwas flacher wieder an.

EL-BAYOUMY [7] untersuchte 1972 das Beulproblem des elastischen Ringes in einer gleichförmig sich zusammenziehenden Umhüllung. Über Energiebetrachtungen zeigt er, daß der Ring im charakteristischen Stauchungs-Verschiebungsdiagramm drei Gleichgewichtszweige aufweist, von denen einer zum ungebeulten Zustand mit konstanter Stauchung und die beiden anderen zu ausgebeulten Zuständen mit kleinen bzw. großen Verformungen gehören. In einer weiteren Arbeit [8] untersuchte EL-BAYOUMY auch das Temperaturbeulproblem (über den Querschnitt konstante und veränderliche Temperatur) und den Fall einer Kopplung der Lastfälle "Temperatur" und "Zusammenziehung der Umhüllung" mit Hilfe einer Variationsmethode.

Ausgehend von dem praktischen Problem eines Doppelmanteltanks zur Lagerung von Flüssiggas, der im Betrieb großen Temperaturschwankungen ausgesetzt ist, beschäftigte sich

^{*)} Prof.Dr.-Ing. H. Hain, Technische Universität Hannover, Callinstr. 32, II, 3000 Hannover 1,

Dr.-Ing. B. Falter, Neudorfer Markt 10, 4100 Duisburg 1

EBNER⁺) mit dem Temperaturbeulproblem und stellte fest, daß die Ergebnisse von BRITVEC [5] und CHAN/MCMINN [4] - die mit Hilfe geometrisch nichtlinearer Theorien gewonnen wurden - mit den für den starr ummantelten Ring unter Außendruck von HAIN [9] angegebenen Werten, die mit Hilfe des Energiekriteriums für das indifferente Gleichgewicht ermittelt wurden, praktisch übereinstimmen. Eine entsprechende Übereinstimmung zeigte sich auch mit den Ergebnissen von EL BAYOUMY [7], die ebenfalls mit der Energiemethode gewonnen wurden. Während die Ähnlichkeit der Beulprobleme des Ringes infolge gleichmäßiger Temperaturänderung und infolge Vorspannung der Umhüllung auf der Hand liegt - beides sind Kontaktdruckprobleme - überraschte zunächst die erwähnte Übereinstimmung der Ergebnisse des Außendruckproblems [9] mit denen des Kontaktdruckproblems [4], [5], [7], da sich erstens beide Probleme im ausgebeulten Zustand wesentlich voneinander unterscheiden (der unabhängige Außendruck bleibt erhalten, der Kontaktdruck verschwindet) und zweitens die Ergebnisse mit Theorien unterschiedlicher Näherungsstufe gewonnen wurden.

Zur Klärung dieser Frage wird in der vorliegenden Arbeit das Temperaturbeulproblem mit einer in [10] hergeleiteten, geometrisch nichtlinearen Theorie untersucht. Die Untersuchungen zeigen, daß die Dehnungs-Verschiebungs-Kurve des Problems sich aus den Lösungen des Beulproblems des beidseitig (nach innen und außen) gebetteten (Abschnitt 2.2.1) und des einseitig gebetteten Ringes (Abschnitt 2.2.2) zusammensetzt. Dabei wird einerseits eine Beschränkung auf den Fall der über den Querschnitt konstanten Temperaturerhöhung vorgenommen, da ein über den Querschnitt veränderlicher Temperaturanteil nur geringen Einfluß auf das Beulen hat (vgl. [8]). Andererseits werden zusätzlich der Einfluß einer elastischen Bettung des Ringes und der Einfluß von Vorverformungen berücksichtigt. Die theoretischen Untersuchungen werden durch Versuche ergänzt und kontrolliert.

2. Geometrisch nichtlineare Theorie des elastisch gebetteten Kreisringes unter Temperatur- und Druckbelastung

2.1 Differentialgleichungen des Problems

Es gelten die folgenden Bezeichnungen:

	$k = I/Fr^2$	Ringparameter
	t	Wandstärke des Ringes
	r	Radius des Ringes
	$k^* = \sqrt{\frac{F}{123}} r$	Verhältnis Dehnsteifigkeit/ Biegesteifigkeit des Ringes
	$(k^* = r/t$	bei Rechteckquerschnitten)
	c	Bettungsmodul
	$\beta = cr^4/EI$	Steifigkeitsparameter
	$\alpha = p_0 r^3/EI$	Lastparameter
	α_T	Temperaturdehnkoeffizient
	ΔT	über die Wandstärke konstante Temperaturänderung
	T_K	klass. krit. Temperatur
	T_m	minimale Temperatur (nicht-lineare Theorie)
	$\xi = \frac{v}{r}$	bezogene Tangentialverschiebung
	$\eta = \frac{w}{r}$	bezogene Radialverschiebung
	ϵ	Stabachsdehnung ($z = 0$)

Abb. 1 Bezeichnungen

ψ	Verdrehung der Ringachse	$q = Q/EF$	bezogene Querkraft
$m = M/EFr$	bezogenes Biegemoment	ϵ_v	im Versuch ermittelte kritische Stauchung
$n = N/EF$	bezogene Normalkraft bzw. Beulwellenzahl	w_v	Vorverformungsamplitude

⁺) Briefwechsel zwischen H. EBNER, Aachen und H. HAIN 1975.

Die dem Problem zugrunde liegenden Differentialgleichungen sind in [10] unter den folgenden Voraussetzungen hergeleitet worden (siehe auch Abb.1):

1. Es gilt entsprechend der BERNOULLI'schen Hypothese Ebenbleiben der Querschnitte, wobei die in [10] berücksichtigten Schubverformungen hier vernachlässigt werden.
2. Die Ringdehnung ε und die Stabachsenverdrehung ψ sind mit den Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung $\eta = w/r$ und $\xi = v/r$ sowie deren Ableitungen nicht-linear verknüpft (1a,b), wobei die Dehnung ε_z , wie bei praktischen Ingenieurproblemen üblich, als Längenänderung $(d\ell_z - d\ell_{0z})/d\ell_{0z}$ der Stabfaser eines Ringelementes definiert ist.
3. Die Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Kreiselementes sind für den verformten Zustand formuliert, wobei äußere Belastung (p_o) und Kontaktdruck (p_B) der Bettung normalentreu angenommen werden.
4. Der Kontaktdruck des Bettungsmediums genügt dem WINKLER'schen Gesetz: $p_B = cw$.

In der vorliegenden Arbeit wird zusätzlich vorausgesetzt, daß der E-Modul des Ringwerkstoffes unabhängig von der Temperatur ist. Entsprechend [10] Gleichungen (78a,b,d-f) ergeben sich die folgenden Verschiebungs-Verzerrungs- und Gleichgewichtsbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \eta + (1+\varepsilon) \cos \psi - 1, & n' &= q(1+\psi') \\ \eta' &= -\xi + (1+\varepsilon) \sin \psi, & q' &= -n(1+\psi') - k\alpha + k\beta\eta \\ \psi' &= n + \xi m, & m' &= -q(1+\varepsilon) \end{aligned} \right\} (1a-f)$$

Die Dehnung muß um den aus Temperaturänderung resultierenden Anteil ergänzt werden. Bei gleichmäßiger Erwärmung $+\Delta T$ gilt

$$\varepsilon = n + m + \alpha_T \Delta T \quad (2)$$

Die Gleichungen (1a-f) und (2) sind im folgenden Grundlage sowohl für Untersuchungen entsprechend der klassischen Beultheorie als auch des nichtlinearen überkritischen Verhaltens.

2.2 Lösungen des Temperatur- und Außendruckbeulproblems

2.2.1 Lösungen nach der klassischen Stabilitätstheorie für den beidseitig gebetteten Ring

Im Grundzustand (Index 0) ist das System durch gleichmäßig verteilten Außendruck p_o und Temperaturwirkung ΔT belastet, was zu einem rotationssymmetrischen Verformungszustand und infolgedessen zu einem Verschwinden der antisymmetrischen Größen führt:

$$\xi_0 = \psi_0 = q_0 = 0$$

Die von Null verschiedenen, rotationssymmetrischen Größen ergeben sich aus den Differentialgleichungen (1) mit (2) und den Abkürzungen

$$\tilde{\alpha} = \alpha_T \Delta T, \quad f = \frac{\xi}{\xi - 1}, \quad \xi = \frac{1}{1 - \frac{F}{F^*}}, \quad F^* = \int \frac{1}{1 + \frac{z}{r}} dF \quad (3a-d)$$

zu

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \frac{k\alpha - f\tilde{\alpha}}{f + k\beta}, & m_0 &= -\frac{1}{\xi} (k\beta\eta_0 - k\alpha) \\ n_0 &= k\beta\eta_0 - k\alpha, & \varepsilon_0 &= -\eta_0 \end{aligned} \right\} (4a-d)$$

Die statischen Größen des Nachbarzustandes erhält man aus der Addition der quergerichteten Zusatzgrößen

$$\xi = \xi_0 + \bar{\xi}, \quad \eta = \eta_0 + \bar{\eta}, \quad \dots$$

Nach Einsetzen in das Differentialgleichungssystem (1a-f) ergeben sich die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (\bar{\xi} + \xi_0)' &= \bar{\xi}' = \eta_0 + \bar{\eta} + (1 + \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}) \cos \bar{\psi} - 1, & \bar{m}' &= -\bar{q} (1 + \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}), \\ \bar{\eta}' &= -\bar{\xi} + (1 + \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}) \sin \bar{\psi}, & \bar{\psi}' &= \bar{n} + \bar{\xi} \bar{m}, \\ \bar{n}' &= \bar{q} (1 + \bar{\psi}), & \bar{\varepsilon} &= \bar{n} + \bar{m}, \\ \bar{q}' &= -(\bar{n}_0 + \bar{n}) (1 + \bar{\psi}) - k\alpha + k\beta (\eta_0 + \bar{\eta}), \end{aligned} \right\} 5a-g$$

die in üblicher Weise in den quergestrichenen Ausdrücken linearisiert werden.

Im folgenden wird durch Elimination eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung von nur einer Unbekannten, hier die Verschiebung $\bar{\eta}$, hergeleitet.

Mit (5a) und (5b) folgt nach Linearisierung

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}' &= \eta_0 + \bar{\eta} + \varepsilon_0 + \bar{\varepsilon} \quad , \quad \text{und hieraus mit (4d)} \\ \bar{\eta}' &= -\bar{\xi} + (1 + \varepsilon_0) \bar{\psi} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{\xi}' - \bar{\eta} \\ \bar{\psi} &= \frac{\bar{\eta}' + \bar{\xi}}{1 - \eta_0} \end{aligned} \quad (6a,b)$$

\bar{n} , \bar{m} und \bar{q} ergeben sich mit (5c,f,g) zu

$$\left. \begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{\xi-1} (\bar{\psi}' - \bar{\varepsilon}) \\ \bar{n} &= \frac{1}{\xi-1} (\xi \bar{\varepsilon} - \bar{\psi}') \\ \bar{q} &= \bar{n}' = \frac{1}{\xi-1} (\xi \bar{\varepsilon}' - \bar{\psi}''') \end{aligned} \right\} (7a-c)$$

Nach Einsetzen in (5e) und mit (6a,b) folgt

$$\bar{\xi}'' \left[\frac{\eta_0}{1-\eta_0} - 1 + \xi(1-\eta_0) \right] + \bar{\eta}''' \frac{\eta_0}{1-\eta_0} + \bar{\eta}' [1 - \xi(1-\eta_0)] = 0 \quad (8)$$

Die zweite Differentialgleichung für $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ ergibt sich entsprechend durch Einsetzen in (5d) und Umordnung

$$\begin{aligned} \bar{\xi}''' \left(\xi - \frac{1}{1-\eta_0} \right) + \bar{\xi}' \left[\xi - \frac{1}{1-\eta_0} - (\xi-1)kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} \cdot \frac{1}{1-\eta_0} \right] \\ - \bar{\eta}''' \frac{1}{1-\eta_0} - \bar{\eta}'' \left[\xi + \frac{1}{1-\eta_0} + (\xi-1)kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} \cdot \frac{1}{1-\eta_0} \right] \\ - \bar{\eta}' [\xi + (\xi-1)k\beta] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt schließlich die gesuchte Differentialgleichung für $\bar{\eta}$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}'''' + \bar{\eta}''' \left\{ 2 + kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} (\xi-1-\xi\eta_0) \right\} \\ + \bar{\eta}' \left\{ 1 + k\beta\eta_0 + (\xi-1-\xi\eta_0) \left[kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} + k\beta(1-\eta_0) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Unter Voraussetzung einer über den Ringumfang mit n Wellen^{+) verlaufenden Eigenfunktion führt mit Gleichung (10) der Ansatz}

$$\bar{\eta} = \eta^* \cos n\varphi \quad (11)$$

zu der folgenden Bestimmungsgleichung für $\bar{\alpha}(n)$ bzw. $a(n)$

$$\begin{aligned} n^4 - n^2 \left\{ 2 + kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} (\xi-1-\xi \frac{k\alpha-f\bar{\alpha}}{f+k\beta}) \right\} \\ + 1 + k\beta \frac{k\alpha-f\bar{\alpha}}{f+k\beta} + (\xi-1-\xi \frac{k\alpha-f\bar{\alpha}}{f+k\beta}) \left\{ kf \frac{\beta \bar{\alpha} + \alpha}{f+k\beta} + k\beta \left(1 - \frac{k\alpha-f\bar{\alpha}}{f+k\beta} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Im folgenden werden die Lösungen für das Außendruck- und das Temperaturbeulproblem einzeln angegeben.

a) Lösungen für das Außendruckbeulproblem ($\bar{\alpha} = 0$)

Nach Umordnung ergibt sich aus (12) eine biquadratische Gleichung für $ka/(f+k\beta)$, deren Lösungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{k\alpha}{f+k\beta} \right)_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{\xi-1}{\xi} \cdot \frac{f(n^2-1) + 2k\beta}{f(n^2-1) + k\beta} \cdot \left\{ 1 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{1 - \frac{(n^2-1)^2 + (\xi-1)k\beta}{\frac{1+k}{k} \{ (1+k)(n^2-1) + k\beta \}} \cdot \frac{4\xi^2}{(\xi-1)^2} \cdot \left\{ \frac{f(n^2-1) + k\beta}{f(n^2-1) + 2k\beta} \right\}^2} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

lauten.

^{+) Im folgenden wird n in der Bedeutung der Beulwellenzahl verwendet.}

Zur Vereinfachung dieses Ausdrucks werden einige Näherungen eingeführt:

1. $\xi \approx 1 + (1/k)$, d.h. es wird von der Näherung des schwach gekrümmten Stabes Gebrauch gemacht (vgl. [10], S.38). Für $f = \xi/(\xi - 1)$ folgt dann: $f = 1 + k$.
2. k wird gegenüber 1 vernachlässigt; bei Stäben mit Rechteckquerschnitt beträgt der Fehler für $r/t \geq 10$ weniger als 1%.

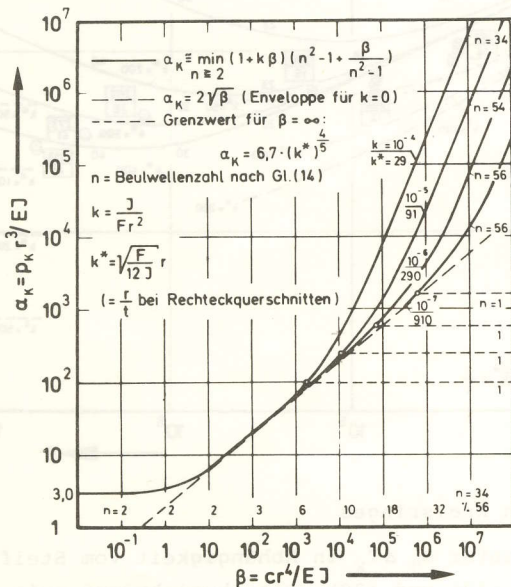
Damit ergibt sich aus (13) unter Verwendung des negativen Vorzeichens vor der Wurzel

$$\alpha(n) = \frac{1}{2k} (1+k\beta) \frac{n^2-1+2k\beta}{n^2-1+k\beta} \left\{ 1 - \sqrt{1-4k \left\{ (n^2-1)^2 + \beta \right\} \frac{n^2-1+k\beta}{(n^2-1+2k\beta)^2}} \right\} \quad (14)$$

3. Mit der Annahme $(n^2-1) \gg k\beta$, die im Bereich $\beta \rightarrow 0$ direkt und im Bereich großer β unter Voraussetzung großer Werte für n und mit $k \ll 1$ erfüllt ist, ergibt sich schließlich nach Reihenentwicklung des Wurzelausdrucks als Gleichung für den kritischen Lastparameter

$$\alpha_K(n) = \min_{n \geq 2} \left\{ (1+k\beta) \left(n^2-1 + \frac{\beta}{n^2-1} \right) \right\} \quad (15)$$

Sie stimmt mit der von SLITER/BORESI [11] nach der Energiemethode hergeleiteten Beziehung für $\alpha_K(n)$ überein. Graphisch ergibt



sich eine Girlandenkurve, deren Enveloppe die Gleichung

$$\alpha_K = (1+k\beta) 2\sqrt{\beta} \quad (16)$$

hat (vgl. Abb.2). Die Wellenzahl n wächst mit zunehmendem Steifigkeitsparameter β nach der Beziehung

$$n = \sqrt{1 + \sqrt{\beta}} \quad (17)$$

was für die im Abschnitt 3.2 dargestellten Versuchsergebnisse des elastisch gebetteten Ringes mit gleichmäßigem Kontaktdruck von Bedeutung ist.

Die numerische Auswertung des genaueren Ausdrucks (14) zeigt für α_K eine gute Übereinstimmung mit der Näherung (15), während im Bereich sehr hoher Steifigkeitsparameter und kleiner k^* -Werte die Anzahl n der Beulwellen nach Gl. (14) im Vergleich zu (17) geringer ist. Allerdings werden hier bereits die kritischen Werte des starr ummantelten Ringes maßgebend, die in Abb.2 als horizontale Linien von der Kurvenschar (15) abzweigen.

Abb.2 Druckbeulen des beidseitig elastisch gebetteten Kreisringes

b) Lösungen für das Temperaturbeulproblem ($\alpha = 0$)

Aus (12) erhält man für $f\tilde{\alpha}/(f+k\beta)$ wiederum eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen

$$\left(\frac{f\tilde{\alpha}}{f+k\beta} \right)_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\xi-1}{\xi} \frac{n^2-3}{2-n^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1-4 \frac{\xi}{(\xi-1)^2} \cdot \frac{1}{k\beta} \left[(n^2-1)^2 + k\beta(\xi-1) \right] \frac{2-n^2}{(n^2-3)^2}} \right\} \quad (18)$$

Mit den Vereinfachungen 1) und 2) ($\xi \approx 1 + \frac{1}{k}$, $k \ll 1$) gilt dann

$$\tilde{\alpha} = \alpha_T \Delta T = \frac{1}{2} (1+k\beta) \left(-\frac{n^2-3}{n^2-2} + \frac{n^2-1}{n^2-2} \sqrt{1+4 \frac{n^2-2}{\beta}} \right) \quad (19)$$

und mit 3) $4 \cdot \frac{n^2-2}{\beta} \ll 1$

$$\alpha_T \Delta T_K(n) = \min_{n \geq 2} \left\{ (1+k\beta) \left(\frac{1}{n^2-2} + \frac{n^2-1}{\beta} \right) \right\} \quad (20)$$

Die Enveloppe von (20) ermittelt sich zu

$$\alpha_T \Delta T_K = (1 + k\beta) \left(\frac{2}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\beta} \right) \quad (21)$$

mit der zugehörigen Beulwellenzahl

$$n = \sqrt{2 + \sqrt{\beta}} \quad (22)$$

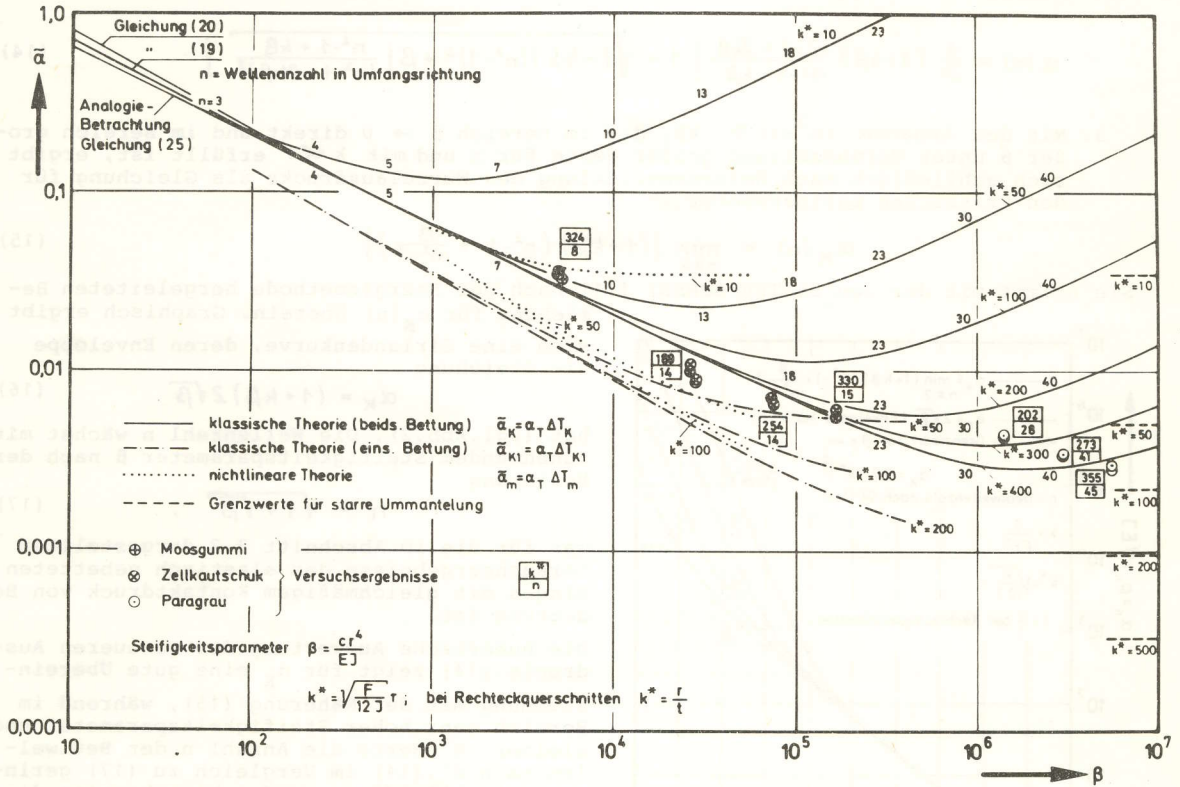


Abb.3 Temperaturbeulen des elastisch gebetteten Kreisringes

Abb.3 zeigt u.a. den kritischen Temperaturparameter $\alpha_T \Delta T_K$ in Abhängigkeit vom Steifigkeitsparameter $\beta = cr^4/EI$ nach den Beziehungen (19) und (20). Die Abweichungen zwischen der Näherung 2.Stufe und der Näherung 3.Stufe sind nur in Bereichen $\beta < 100$ nennenswert, so daß Gleichung (20) als brauchbare Näherung für das mehrwellige Temperaturbeulproblem betrachtet werden kann.

c) Analogie zwischen Außendruck- und Temperaturbeulen

Bei Vernachlässigung kleiner Glieder ($\epsilon_0 \ll 1, k \ll 1$), ergibt sich eine Übereinstimmung in den Differentialgleichungen beider Probleme, wenn man

$$\alpha_T \Delta T = \left(k + \frac{1}{\beta} \right) \alpha \quad (23)$$

setzt. Dies entspricht auch der rein anschaulichen Überlegung, bei diesen beiden Kontaktdruckproblemen die im Grundzustand wirkende Normalkraft (bzw. Dehnung) aus Außendruck bzw. Temperaturzwängung gleichzusetzen:

$$N_o(\tau) = - \frac{\alpha_T \Delta T EF}{1 + \frac{EF}{cr^2}} \cong N_o(p_0) = -p_0 r \quad (24)$$

Man erhält dann aus dem Außendruckbeulproblem durch Einsetzen in (15) die Beziehung

$$\alpha_T \Delta T_K(n) = \min_{n \geq 2} \left\{ (1 + k\beta) \left(\frac{1}{n^2 - 1} + \frac{n^2 - 1}{\beta} \right) \right\} \quad (25)$$

Nur bei kleinen Werten β zeigen sich geringfügige Abweichungen gegenüber den genaueren Werten nach (20) (vgl. Abb.3).

Mit den Ergebnissen dieses Abschnittes (ausgezogene Kurven Abb.3) können jedoch zwei beim Temperaturbeulen ummantelter Schalen auftretende Phänomene nicht erklärt werden:

1. Für steifer werdende Bettungsmedien steigt die kritische Temperatur keineswegs gegen ∞ , wie die vom Parameter k^* abhängigen Kurven vermuten lassen.
2. Aus Versuchen und theoretischen Arbeiten, z.B. von BRITVEC [5], ergibt sich bei starrer Ummantelung ein plötzliches Durchschlagen einer einzigen Beule.

Aus diesen Gründen ist eine Untersuchung des Verhaltens im überkritischen Bereich erforderlich, zumal in dem in der Praxis häufig vorkommenden Bereich $10^3 < \beta \leq \infty$ die beiden Phänomene eine stärkere Bedeutung haben als bei Bettungen mit $\beta < 10^3$.

2.2.2 Nichtlineare Lösungen

Zur Ermittlung von Gleichgewichtszuständen $\tilde{\alpha}(\eta) = \alpha_T \Delta T(\eta)$ im überkritischen Bereich ist von dem nichtlinearen Differentialgleichungssystem (1a-f) und den zugehörigen sechs Randbedingungen bei $\varphi = 0$ und π

$$\xi_R = \psi_R = q_R = 0, \quad (26)$$

also einem nichtlinearen Zweipunkt-Randwertproblem auszugehen. Beim Beulproblem des starr ummantelten Ringes (z.B. BRITVEC [5]) haben die über die Verschiebung $\eta(\varphi=0)$ aufgetragenen Temperaturdehnungen $\tilde{\alpha}$ einen parabelähnlichen Verlauf mit einem Minimum $\tilde{\alpha}_m$ und einer bei $\eta = 0$ liegenden Asymptote $\tilde{\alpha}(\eta \rightarrow 0) = \infty$. Ähnliches ist auch für den elastisch gebetteten Ring zu erwarten, woraus sich für die numerische Behandlung zwei Probleme ergeben:

1. Es können nicht die üblichen Laststeigerungsmethoden verwendet werden, da sie bei allen Beulproblemen mit abfallendem überkritischen Verlauf aufgrund der Mehrdeutigkeit der Lösung versagen.
2. Zu der oben beschriebenen Dehnungs-Verschiebungskurve gehört eine gegenüber dem klassischen Beulproblem (Abschnitt 2.2.1) völlig veränderte Biegelinie mit nur einer Symmetrieachse, für die bei numerischen Verfahren eine Ausgangslösung "geschätzt" werden muß.

Hierfür hat sich folgendes Vorgehen bewährt:

1. Zu 1. Es wird nicht die äußere Last (hier die Temperatur) schrittweise vorgegeben, sondern die Verschiebungsgröße $\eta(\varphi = 0)$ - die zugehörige Temperaturdehnung ist dann eine weitere Unbekannte des Differentialgleichungssystems, für die

$$\tilde{\alpha}(\varphi) = \text{const.} \quad \text{und damit} \quad \frac{d\tilde{\alpha}}{d\varphi} = \tilde{\alpha}' = 0 \quad (27a)$$

gilt. Zusätzliche Randbedingung des Systems von sieben Differentialgleichungen ist

$$\eta(\varphi=0) = \eta_1, \eta_2, \text{ usw.} \quad (27b)$$

Das System aus sieben meist nichtlinearen Differentialgleichungen (1a-f) und (27a) wird, wie in [10] beschrieben, mit einem verallgemeinerten NEWTON-Verfahren linearisiert und iterativ unter Einschluß der Randbedingungen gelöst.

2. Zum Start des NEWTON-Verfahrens wird eine Ausgangslösung ($\eta_{(0)}, \xi_{(0)}, \psi_{(0)}, m_{(0)}, n_{(0)}$ und $q_{(0)}$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$) dadurch gewonnen, daß das System für äußeren Druck bis in den überkritischen Bereich hinein berechnet wird und dann im Rechenprogramm auf das Temperaturbeulproblem übergangen wird. In Abb.4 ist dieser Rechenablauf für das Beispiel $\beta = 10^4$ und $k^* = 50$ dargestellt.

2.3 Temperatur-Verschiebungskurven

Mit Hilfe der in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erzielten Ergebnisse für das klassische und das nichtlineare Temperaturbeulproblem des elastisch gebetteten Ringes lassen sich nun die vollständigen Temperatur-Verschiebungskurven angeben. Das gesamte Verformungsverhalten läßt sich theoretisch und wie auch die im Abschnitt 3 beschriebenen Versuche zeigen, in drei Phasen A, B und C aufgliedern:

Phase A: Der rotationssymmetrische Grundzustand mit linear von $\tilde{\alpha}$ abhängigen Radialverschiebungen η_0 nach Gl. (4a).

Phase B: Nach Erreichen des 1. Indifferenzpunktes $\tilde{\alpha}_k$ nach Gl. (21) beult der Ring mehrwellig aus. Für den unmittelbar benachbarten überkritischen Bereich läßt sich nach EL NASCHIE [13] die Beziehung

$$\tilde{\alpha}(\eta) = \tilde{\alpha}_k \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\beta} \cdot \eta^2 \right) \quad (28)$$

angeben, d.h. das System besitzt noch eine überkritische Tragreserve bei wachsenden Beulamplituden.

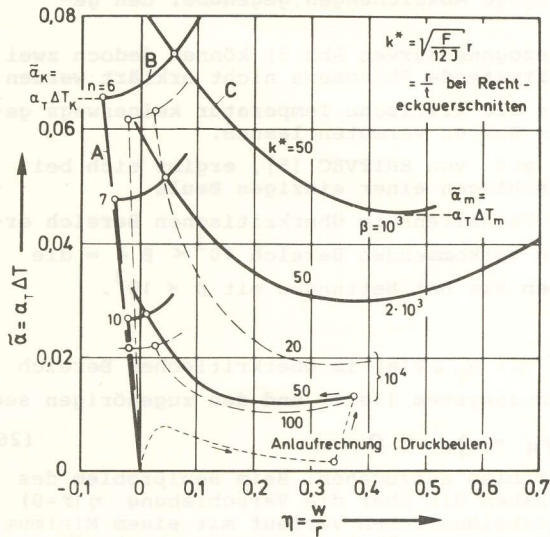


Abb.4 Temperaturdehnungs-Verschiebungskurve

Aus einer größeren Zahl von numerischen Rechnungen wurden die Minimaldehnungen $\tilde{\alpha}_m$ in Abhängigkeit von β und k^* ermittelt und in Abb.3 eingetragen. Ein wichtiges Ergebnis ist ihre Konvergenz gegen die Werte

$$\tilde{\alpha}_m (\beta = \infty) = 0,56 (k^*)^{-\frac{6}{5}}, \quad (29)$$

die EBNER durch Umrechnung der Ergebnisse von BRITVEC [5] herleitete und die mit entsprechenden Ergebnissen von CHAN/McMINN [4] und HAIN [9] übereinstimmen.

Eine recht gute Übereinstimmung der Ergebnisse der nichtlinearen Rechnungen ist auch mit den klassischen Beullasten nach HAIN [9] α_{k1} für einseitiges Beulen des einseitig gebetteten Ringes festzustellen. Dies ergibt sich trotz der Unterschiede zwischen Außendruck- und Kontaktdruckproblem daraus, daß bei der Untersuchung des Außendruckbeulens bereits die Annahmen getroffen worden sind, die sich beim hier untersuchten Kontaktdruckproblem im überkritischen Bereich ungünstigstenfalles einstellen können: Einseitige Bettung (d.h. im Bereich der Beule Abheben) und einwellige Beulform.

3. Versuche

3.1 Starre Ummantelung

3.1.1 Versuchseinrichtung

Zur Kontrolle der theoretischen Ergebnisse für das Temperaturproblem wurden Versuche an Ringen aus Hostaphan durchgeführt. Die Versuchseinrichtung (vgl. Abb.7) besteht aus der innenliegenden Folie ($h=1$ cm) und einem 4mm starken und rd. 4,5 cm hohen, innen geschliffenen Stahlmantel und einer äußeren Blechmanschette, die durch eine Schraube kontinuierlich angespannt werden kann. Der über seine Höhe geschlitzte Stahlmantel (Spaltbreite $s=5$ mm) läßt sich so bis zur Schließung des Spaltes zusammenziehen.

Die Darstellung des Temperaturbeulproblems erfolgt also in der Versuchseinrichtung durch Erzeugen von Kontaktdruck. Dadurch wurden die Versuche wesentlich erleichtert und konnten mit der dargestellten einfachen Versuchseinrichtung und geringem Materialaufwand durchgeführt werden. Bei einer direkten Untersuchung des Temperaturbeulproblems würden einerseits hohe, auf den Innenring zu konzentrierende Temperaturen und andererseits ein anderes Versuchsmaterial erforderlich, da die Elastizitätseigenschaften von Kunststoffen zu stark temperaturabhängig sind.

3.1.2 Durchführung der Versuche

Die Versuche mit starrer Ummantelung wurden mit verschiedenen Ringen aus einer Hostaphan-Folie der Dicke $t = 0,2$ mm und verschiedener Höhe durchgeführt. Die Stoßstelle wurde möglichst weit vom Spalt entfernt angeordnet, um eine Beeinflussung des Beulvorganges zu vermeiden. Der Stoß wurde durch eine in die Konstruktion eingreifende Arretierung unverschieblich festgehalten.

Das Einlegen des Ringes erfolgte mit großer Sorgfalt bei geöffneter Manschette, da besonders beim 4cm hohen Ring die Art der Einbringung bereits einen wesentlichen Einfluß auf den Beulbeginn hatte. Ungleichmäßiges Anliegen der Folie an den Stahlmantel bewirkte ein wesentlich früheres Ausbeulen.

Um den Reibungseinfluß zu eliminieren, der eine Abnahme der Vorspannung im Ring mit

Phase C: Bei einer bestimmten Beultiefe η schneidet die Kurve (28) die nach Abschnitt 2.2 ermittelte nichtlineare Lösung, die auf einen Wert $\tilde{\alpha}_m$ abfällt und danach allmählich wieder ansteigt. Dieser Ast der Temperaturdehnungs-Verschiebungskurve kennzeichnet das Durchschlagverhalten des gebetteten Ringes in einer einzigen Beule.

Aus diesem Verlauf der Dehnungs-Verschiebungskurve ist eine Klärung des Temperaturbeulproblems gebetteter Ringe möglich. So ist nach Abb.4 eine starke Abhängigkeit von den Parametern β und k^* des Systems zu beobachten: Weichere Bettungen (kleinere Werte des Steifigkeitsparameters β) ergeben ein langsames und weniger tiefes Abfallen der Kurve C im überkritischen Bereich, ferner haben sie eine höhere überkritische Reserve nach Erreichen der kritischen Dehnung $\tilde{\alpha}_k$. Bei harten Bettungen erfolgt das Durchschlagen plötzlich, was sich aus der größeren Nähe der beiden Kurven der Phasen A und C erkennen läßt. Sinngemäß gilt dies auch für zunehmende k^* -Werte, also dünnwandigere Ringe.

zunehmender Entfernung vom Spalt zur Folge hat, wurden in Vorversuchen Kontrollmessungen mit Dehnmeßstreifen durchgeführt. In unmittelbarer Spaltnähe ergab sich gegenüber dem aus der Spaltverkleinerung Δs berechneten Mittelwert ein um rd. 30% vergrößerter Wert, also

$$\epsilon \approx 1,3 \frac{\Delta s}{2r\pi} \quad (30)$$

Um den aus den theoretischen Untersuchungen bereits ersichtlichen, mit β wachsenden Einfluß von Vorverformungen experimentell nachzuweisen, wurden Vorbeulen unterschiedlicher Höhe mit sinus-Form (vgl. Abb.5) zwischen Versuchsring und Stahlmantel gelegt. Die Länge der Vorbeule betrug $b = 6,3 \text{ cm}$, ihre Amplitude das Ein- bis Fünffache der Ringstärke t .

3.1.3 Versuchsergebnisse

Die nach Gl. (30) aus Δs berechneten Versuchsergebnisse sind für vorverformungsfreie Ringe ($h=1$ und 4 cm) und für Ringe ($h=1 \text{ cm}$) mit sinusförmigen Vorverformungen in Abb.5 eingezeichnet, wobei jede Eintragung dem Mittelwert aus 3 bis 5 Versuchen entspricht.

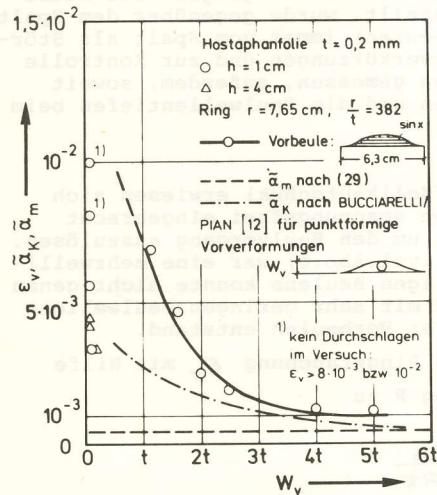


Abb.5 Versuchsergebnisse des starr ummantelten Kreisringes ohne und mit Vorverformungen

Ohne planmäßige Vorverformung ($w_v = 0$) zeigt sich ein starker Unterschied zwischen Ringen geringer und größerer Höhe: Bei letzteren konnten Versuchswerte für die kritische Stauchung von $\epsilon_v = 3,4 \cdot 10^{-3}$ bis $4,4 \cdot 10^{-3}$ erzielt werden, während der schmalere Ring ($h=1 \text{ cm}$) in einigen Versuchen auch bei $\max \epsilon_v = 10^{-2}$ (=Grenzwert der Versuchsanordnung) noch nicht durchschlag. Eine Erklärung findet sich in unplanmäßigen Vorverformungen des höheren Ringes.

Bei planmäßig eingebrachten Vorverformungen fallen die kritischen Dehnungen stark ab; bereits bei einer Vorbeule mit $w_v = 2t = 0,4 \text{ mm}$ wird ϵ_v auf rd. 30% reduziert! Für größere Werte (etwa $w_v > 5t$) konvergieren die kritischen Dehnungen gegen das Minimum der Dehnungs-Verschiebungskurve $\tilde{\alpha}_m$ nach Gl. (29).

Zum Vergleich sind die von BUCCIARELLI/PIAN [12] angegebenen, ungünstigeren Werte für punktförmige Vorverformungen in Abb.5 eingezeichnet; sie zeigen für zunehmende Werte von w_v eine ähnliche Tendenz wie die Versuche mit sinusförmigen Vorbeulen.

Als Resultat der Versuche mit starrer Ummantelung kann demnach $\tilde{\alpha}_m = 0,56 \left(\frac{r}{t}\right)^{-\frac{6}{5}}$ als untere Grenze der Beulwerte angegeben werden, die auch bei größeren Vorverformungen nicht unterschritten wird.

3.2 Elastische Bettung

3.2.1 Vorbemerkungen

Die Versuche wurden mit dem gleichen Versuchsaufbau wie in 3.1 durchgeführt. Wie dort wurde der Lastfall der gleichmäßigen Temperaturerhöhung durch eine Zusammenziehung der äußeren Ummüllung ersetzt.

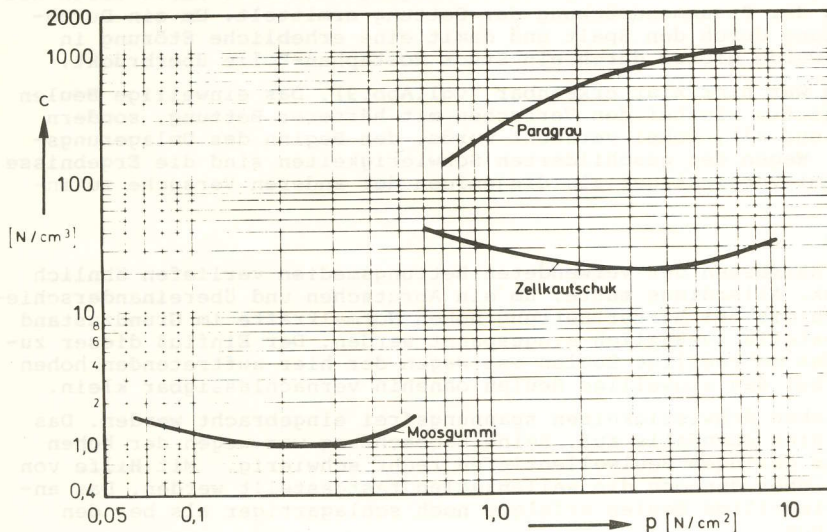


Abb.6 Lastabhängigkeit des Bettungsmoduls

3.2.2 Modellringe

Als Modellmaterial diente wiederum Hostaphanfolie, die zu Ringen der erforderlichen Größe zusammengeklebt wurde. Die Modellringe wiesen Wanddicken von $0,020$, $0,026$ und $0,035 \text{ cm}$ und Höhen von 4 cm auf.

3.2.3 Bettungsmedien

Um einen möglichst großen Bereich des Steifigkeitsparameters β abzudecken, wurden drei verschiedene Bettungsmaterialien sehr unterschiedlicher Härte herangezogen. Der Bettungsmodul wurde in Vorversuchen mit quadratischen Stempeln verschiedener Größe gemessen. In Abb.6 ist die - sich erwartungsgemäß ergebende -

Lastabhängigkeit des Bettungsmoduls dargestellt. Der Bettungsmodul liegt für Moosgummi im Bereich $0,9$ bis $1,5 \text{ N/cm}^3$, für Zellkautschuk bei 20 bis 35 N/cm^3 und für Paragrau im Bereich 140 bis 1000 N/cm^3 , also in Bereichen, die sich um Zehnerpotenzen unterscheiden.

3.2.4 Versuchseinrichtung

Die Versuche wurden - wie bei der starren Umhüllung - in einem im Vergleich zum Versuchsring sehr steifen Stahlzylinder mit einem Spalt von 5 mm durchgeführt (vgl. Abb. 7). In diesen Stahlring wurden die aus Platten herausgeschnittenen Bettungsschichten zwangungsfrei eingelegt. Eine beim Versuch sich aufbauende Reibungswirkung zwischen Versuchsring und Bettungsschicht konnte durch Talkum weitgehend verhindert werden. Versuche mit flüssiger Schmierung (Öl) erbrachten höhere kritische Dehnungen, was auf die infolge von Oberflächenspannungen auftretende "Klebewirkung" zurückzuführen ist.

3.2.5 Versuchsdurchführung

Die Versuchsringe wurden in der Regel zwangungsfrei in den Stahlzylinder mit der elastischen Schicht eingebracht. Anschließend erfolgte durch Anziehen der Manschette die Zusammenziehung der äußeren Umhüllung bis zum Auslösen des Beulvorganges. Die Klebestelle, die eine örtliche Versteifung des Ringes darstellt, wurde gegenüber dem Spalt angeordnet, da die einspringende Beule (einwelliges Beulen) immer vom Spalt als Störstelle ausging. Mit einer Meßuhr wurden die Ringspaltverkürzungen und zur Kontrolle mit Dehnmeßstreifen die Stauchungen des Versuchsringes gemessen, außerdem, soweit möglich, die Beulwellenlängen beim mehrwelligen Beulen und die Beulwellentiefen beim einwelligem Beulen.

a. Versuche mit Zellkautschuk

Die Versuche mit dem Bettungsmedium mittlerer Härte (Zellkautschuk) erwiesen sich als vergleichsweise einfach. Die Versuchsringe konnten spannungsfrei eingebracht werden (vgl. Abb. 7), da die Spaltverkürzung ausreichte, um den Beulvorgang auszulösen. Schon vor dem eigentlichen Durchschlagen einer Beule (vgl. Abb. 8) war eine mehrwellige Beulform zu beobachten. Der Beginn dieses mehrwelligen Beulens konnte nicht genau festgestellt werden, da diese Beulform allmählich und mit sehr geringen Beulwellentiefen durch Umlagerung und Vergrößerung unvermeidbarer Vorbeulen entstand.

Aus der gemessenen Spaltverkürzung Δs ergibt sich die Ringstauchung ϵ_v mit Hilfe des Bettungsmoduls c und des Innenradius der Umhüllung R zu

$$\epsilon_v = \frac{rR}{\frac{Et}{c} + r^2} \epsilon_s \quad \text{mit} \quad \epsilon_s = \frac{\Delta s}{2R\pi}$$

Zur Kontrolle der Dehnungswerte dienten einige Versuche mit beidseitig aufgeklebten Dehnmeßstreifen, wodurch die Ringstauchungen direkt gemessen werden konnten. Sie bestätigten im Rahmen der üblichen Versuchsgenauigkeiten die über die Spaltverkürzung errechneten Werte.

b) Versuche mit Moosgummi

Die Versuche mit diesem Bettungsmedium, das den kleinsten Bettungsmodul hat, waren dadurch gekennzeichnet, daß die Spaltbreite nicht ausreichte, um bei spannungsfrei eingelegtem Ring ein Ausbeulen zu erzeugen. Daher mußte der Versuchsring mit einer bestimmten Vorspannung eingebracht werden, die durch eine Vergrößerung des Ringumfanges und anschließendes Einlegen bei zusammengedrückter Bettung erzielt wurde.

Die Größe der Vorspannung bzw. Vorstauchung dieses Ausgangszustandes wurde durch Messen des Ringumfanges und der Zusammendrückung der Bettung ermittelt. Um ein Durchdrücken der weichen Bettung durch den Spalt und damit eine erhebliche Störung in Spaltnähe zu vermeiden, wurde dieser durch ein Stück Hostaphan-Folie überbrückt.

Die mehrwellige Beulform war hier klar erkennbar (vgl. Abb. 9). Das einwellige Beulen erfolgte nicht so schlagartig wie bei den Versuchen mit härterer Bettung, sondern allmählich (vgl. Abb. 10 und 11), wobei versucht wurde, den Beginn des Umlagerungsvorganges festzustellen. Wegen der geschilderten Schwierigkeiten sind die Ergebnisse der Versuche mit Moosgummi vorsichtiger als diejenigen der anderen Versuche zu interpretieren.

c) Versuche mit Paragrau

Die Versuche mit diesem härtesten der verwendeten Bettungsmedien verliefen ähnlich wie die mit Zellkautschuk. Allerdings mußte, um ein Abrutschen und Übereinanderschieben der Folienenden durch die bei harter Bettung hohen Normalkräfte im Grundzustand zu verhindern, die Klebestelle zusätzlich eingespannt werden. Der Einfluß dieser zusätzlichen Störung auf das mehrwellige Beulen ist wegen der hier auftretenden hohen Beulenzahlen gering und auf das einwellige Beulen ohnehin vernachlässigbar klein.

Die Modellringe konnten ohne Schwierigkeiten spannungsfrei eingebracht werden. Das mehrwellige Beulen trat hier ebenfalls auf. Seine Beobachtung war wegen der hohen Wellenzahlen und der sehr geringen Beulwellentiefen recht schwierig. Mit Hilfe von Lichtreflexionen konnten aber dennoch die Wellenzahlen festgestellt werden. Das anschließend auftretende einwellige Beulen erfolgte noch schlagartiger als bei den Versuchen mit Zellkautschuk.

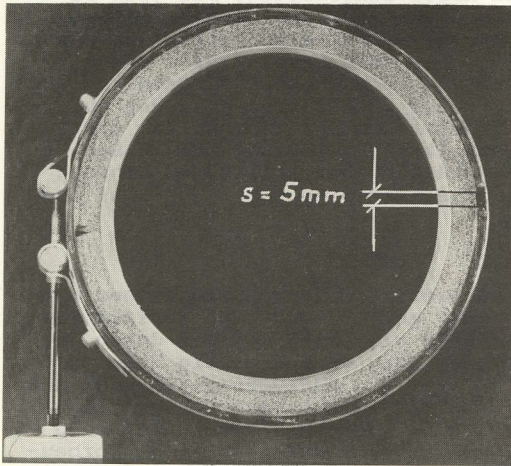


Abb.7 Versuchseinrichtung mit elastisch gebettetem Ring im Grundzustand

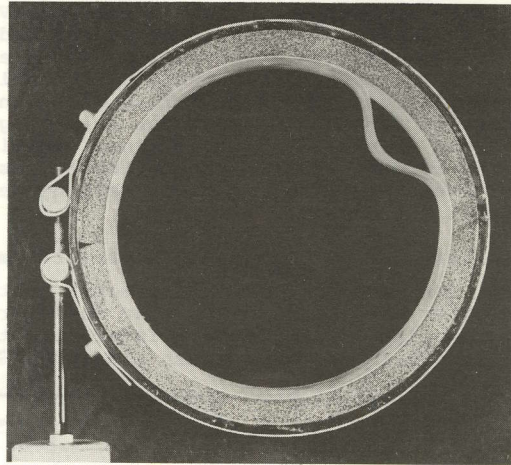


Abb.8 Einwellige Beulform (Bettungsschicht: Zellkautschuk)

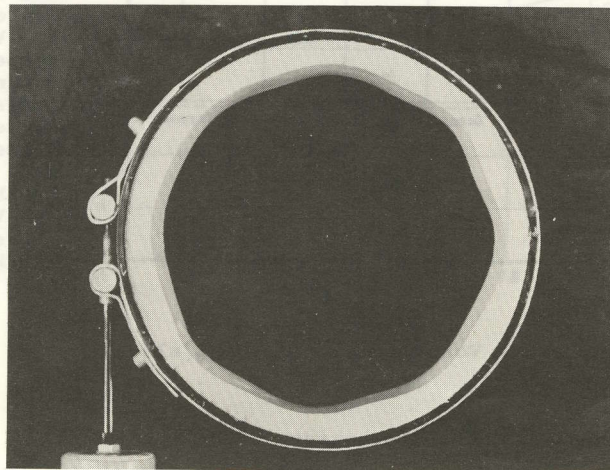


Abb.9 Mehrwellige Beulform (Bettungsschicht: Moosgummi)

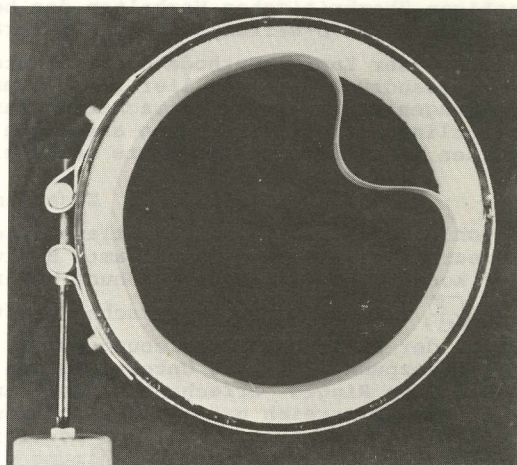
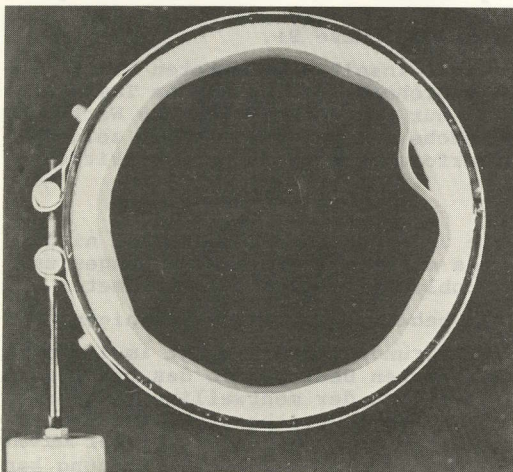
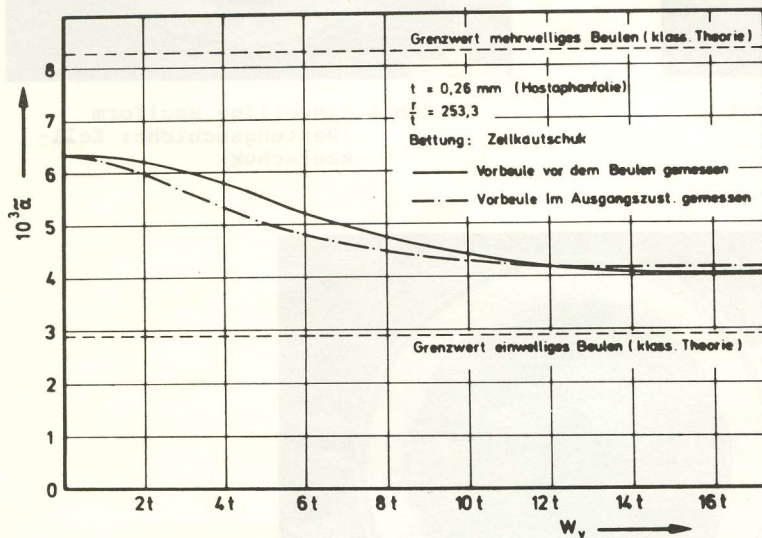


Abb.10 u. 11 Übergang zur einwelligen Beulform (Bettungsschicht: Moosgummi)

Die Ergebnisse aller vorstehenden Versuche sind in Abb.3 eingetragen. Für jede Parameterkombination sind mindestens 5 Versuche durchgeführt worden. In Abb.3 sind durch Kreise Mittelwert und untere und obere Grenzwerte jeder Versuchsreihe markiert. Im dargestellten Streubereich sind die unterschiedlichen Reibungseinflüsse enthalten. Deren genauere Untersuchung bleibt weiteren Versuchsreihen vorbehalten. Dabei müssen die Einflüsse der beim Aufbau des Grundzustandes und der beim Übergang in den ausgebeulten Zustand auftretenden Reibung getrennt untersucht werden. Während der erstgenannte Reibungseinfluß zu einer ungleichmäßigen Normalkraftverteilung und in Spaltweite zu vergrößerten Werten führt, was einer Unterschätzung der kritischen Dehnung gleichkommt, wird durch die Reibung beim Ausbeulen die kritische Dehnung erhöht und damit überschätzt.

d) Versuche mit planmäßigen Vorverformungen

Bei den Versuchen mit elastischer Bettung war es schwieriger als bei denjenigen mit starrer Umhüllung, eine genau definierte Vorverformung anzubringen. Schließlich wurde durch eine an dem Stahlzylinder befestigte Spindel über ein Gestänge, das durch zwei Bohrlöcher mit einem innen liegenden Stempel verbunden war, eine über die Höhe des



Versuchsrings konstante Störverformung erzeugt. Eine Spindelumdrehung entsprach einer Vorbeulentiefe von 0,5mm. Die Vorbeulen wurden bei einer ersten Versuchsreihe im Grundzustand (verformter Zustand vor dem Ausbeulen) eingefahren und auf diesen bezogen, während in einer weiteren Versuchsreihe die Vorbeulen bereits im (spannungslosen) Ausgangszustand erzeugt wurden. Die Ergebnisse dieser Versuche zum Einfluß der Vorbeulen sind in Abb.12 in Abhängigkeit vom Verhältnis der Vorbeulentiefe zur Wandstärke aufgetragen.

Abb.12 Versuchsergebnisse zum Vorbeuleneinfluß beim elastisch gebetteten Ring

3.2.6 Vergleich mit theoretischen Ergebnissen

Die durch Versuche ermittelten kritischen Dehnungen ϵ_v liegen im allgemeinen zwischen den theoretischen Werten der klassischen Theorie mit beidseitiger Bettung (obere Grenzwerte $\bar{\alpha}_K$) und den Werten aus der nichtlinearen Theorie (untere Grenzwerte $\bar{\alpha}_m$). Dabei ist ihr Abstand vom oberen Grenzwert geringer als vom unteren. Bei den Versuchen mit Moosgummi, also bei kleinen Werten des Steifigkeitsparameters β , wird der obere Grenzwert noch überschritten (vgl. Abb.3). Eine Erklärung hierfür kann in dem zunächst gutartigen überkritischen Verhalten des beidseitig gebetteten Ringes gesehen werden, das bei kleineren β -Werten stärker ausgeprägt ist (vgl. Abb.4, Phase B).

Die mit der Energiemethode hergeleiteten Beulwerte des einseitig gebetteten Ringes unter Außendruck nach [9] liefern bei Umrechnung mit Gleichung (24) kritische Temperaturdehnungen $\bar{\alpha}_{K1}$, die im betrachteten Parameterbereich nur geringfügig von den Werten $\bar{\alpha}_m$ der nichtlinearen Untersuchungen abweichen. Wie die Versuche mit Vorverformungen zeigen, werden diese unteren Beulwerte auch bei großen Vorverformungen nicht unterschritten.

Zusammenfassung

Durch Untersuchungen mit der klassischen Beultheorie und mit einer geometrisch nichtlinearen Theorie wird das gesamte Beulverhalten eines elastisch gebetteten Ringes unter konstanter Temperaturerhöhung untersucht. Das Problem wird durch die Parameter $k^* = \sqrt{\frac{F}{12J}} r$ (beim Rechteckquerschnitt r/t) und $\beta = \frac{cr^4}{EI}$ beherrscht. Vom geradlinigen Teilstück der Dehnungs-Verschiebungskurve (unausgebeulter Grundzustand) zweigt im 1. Indifferenzpunkt, der aus Untersuchungen nach der klassischen Beultheorie des beidseitig gebetteten Ringes errechnet werden kann, eine Kurve ab, zu der mehrwellige Beulformen gehören. Im Bereich größerer Verschiebungen wird eine andere Gleichgewichtskurve maßgeblich, zu der eine einwellige Beulform mit ungebettetem Bereich gehört. Dieser Kurvenast steigt nach Erreichen eines Minimums wieder an. Das Minimum der kritischen Dehnung kann als maßgebender Wert für die Bemessung angesehen werden. Die Größe der Differenz zwischen Abzweigpunkt und Minimum und die Entfernung des Minimums vom Grundzustand stellen

ein Maß für die Vorbeulenempfindlichkeit der Konstruktion dar. Der Abzweigpunkt liegt umso höher, je steifer die Bettung des Ringes ist. Beim starr ummantelten Ring existiert kein Abzweigpunkt für endliche Dehnungen. Die theoretischen Ergebnisse werden durch die Versuche ⁺⁾ bestätigt.

Literaturverzeichnis

- [1] St.G.A. BERGMAN Temperaturknäckning hos circularcylindriska skal med tvangsstyrd yttre mantelyta. Tekniska Skrifter No.127 Stockholm 1946.
- [2] E. CHWALLA/H. STEINER Über das Einbeulen von Druckschachtpanzerungen. Österr. Bauzeitschr. 12 (1957).
- [3] E. METTLER Eine Bemerkung zur Frage des Beulens ummantelter Schalen. Der Bauing.38 (1963) S.309.
- [4] H.C. CHAN/S.J. McMINN The Stability of a Uniformly Compressed Ring Surrounded by a Rigid Circular Surface. Int.J.Mech.Sci. Vol.8 (1966) S.433.
- [5] S.J. BRITVEC Sur le flambage thermique des anneaux et des coques cylindriques précontraints. Journal de Mécanique, Vol.5 (1966), No.4.
- [6] A. PFLÜGER Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag 1975, 3.Aufl.
- [7] L. EL-BAYOUMY Buckling of a Circular Elastic Ring Confined to a Uniformly Contracting Circular Boundary. Transactions of the ASME 1972, S.758.
- [8] L. EL-BAYOUMY Thermal Buckling of a Constrained Elastic Ring. Non-Linear Mechanics, Vol.9 (1974).
- [9] H. HAIN Zur Stabilität elastisch gebetteter Kreisringe und Kreis-zylinderschalen. Mitt.d.Inst.f.Statik der Techn.Universität Hannover, Mitt.No. 12, 1968.
- [10] B. FALTER Berechnung freier und einseitig elastisch gebetteter Kreisbögen und -ringe unter Außendruck mit großen Verschiebungen und Verdrehungen. Diss. TU Hannover, 1975.
- [11] G.E. SLITER/
A.P. BORESI Buckling of Uniformly Compressed Ring with Radial Elastic Support. Developments in Mech., Vol.3 (1967), p.443.
- [12] L.L. BUCCIARELLI/
T.H.H. PIAN Effect of Initial Imperfections on the Instability of a Ring Confined in an Imperfect Rigid Boundary. J.of Appl. Mechanics (1967), p.979.
- [13] M.S. EL NASCHIE Asymptotic Post Buckling Solution of the Ring in an Elastic Foundation. AIAA Journal, Vol.13 (1975), p.113.

^{+) Wir danken Herrn Prof.Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. A. Pflüger dafür, daß die Versuche am Institut für Statik durchgeführt werden konnten. Ebenso danken wir für die Mithilfe bei der Durchführung der Versuche Herrn K.-H. Dühring und Herrn cand.ing. A. Menzel.}