

Grenzlasten von einseitig elastisch gebetteten kreiszylindrischen Konstruktionen*

Dr.-Ing. B. Falter, Duisburg

1 Einleitung

Neuzeitliche Konstruktionen, die in natürlichem Boden oder anderen Medien gebettet sind, zeichnen sich einerseits durch die Verwendung hochfesten Materials und abnehmende Querschnittsfläche, andererseits durch Einsatz von Werkstoffen mit kleinem Elastizitätsmodul, z.B. Kunststoffe, aus. Bei den ersten Tunnelbauten unter Flußläufen konnte aufgrund ihrer großen Wandstärke noch erfolgreich ein Nachweis gegen Beulen der ungebetteten Konstruktion geführt werden, während heute überwiegend von der mittragenden Wirkung des Bodens Gebrauch gemacht wird. Das hat zur Folge, daß den Stabilitätsproblemen bei Wasserdruck, Erdbelastung oder anderen äußeren und inneren Einwirkungen zunehmende Beachtung geschenkt werden muß.

Das räumliche Problem wird unter Annahme eines in der Längsachse des Zylinders unveränderlichen Belastungsverlaufs auf das ebene Problem des elastisch gebetteten Kreisringes reduziert (Bild 1). Arbeiten zur Berechnung von Tunnelringen nach der Theorie 1. Ordnung erschienen 1964 von Schulze/Duddeck [1], nach einer linearisierten Theorie 2. Ordnung 1966 von Windels [2], 1970 von Hain/Horst [3] sowie 1969 von Durth [4]. Von den für Spannungsberechnungen verwendeten Theorien, der Kontinuumstheorie und der Bettungszahltheorie, ist die letztere zur Lösung des Stabilitätsproblems weiterentwickelt worden. Es wird 1968 von Hain [5] mit Hilfe der klassischen Stabilitätstheorie, 1974 von Hussein [6] mit finiten Stabelementen und 1975 in [7] mit einem auf Differentialgleichungssysteme verallgemeinerten Newton-Verfahren untersucht. Ein weiteres, auf der Energiemethode beruhendes Verfahren zur Berechnung von biegeweichen Rohren unter Erdlasten stammt von Klöppel/Glock [8] aus dem Jahr 1970. Von Kessler [9] wird 1976 für stählerne Tunnelauskleidungen eine gute Übereinstimmung des Fließgelenkmodells mit genaueren Rechnungen festgestellt – für den Parameterbereich des Tunnelbaus werden Ergebnisse in tabellarischer Form vorgelegt.

Inzwischen sind auch verschiedene Modell- und Großversuche veröffentlicht worden: Sonntag [10] und Fleck/Sonntag [11] experimentierten 1966 bzw. 1974 an Ringen aus Araldit und Stahl, die in Stahlwalzen gebettet waren. In der bereits genannten Arbeit von Klöppel/Glock werden zur Absicherung der theoretischen Ergebnisse Versuche an Modellen und an einem überschütteten Durchlaß aus Wellrohren beschrieben. Untersuchungen an ähnlichen Konstruktionen stammen von Sattler [12] 1971 und von Kienberger [13] 1975. Sie führten zur Festlegung einer „Bemessungstabelle für Wellblechrohre“.

* Überarbeitete Fassung eines Beitrags zum Prix Magnel, Biennale 1974–1976, Bureau de Contrôle pour la Sécurité de la Construction, Brüssel.

die in der Praxis zusammen mit einer Einbauanleitung ein wichtiges Hilfsmittel darstellt. Ferner seien die Versuche von Dürkop [14] 1974 an eingebetteten Tanks aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK) erwähnt, die durch angelegtes Vakuum zum Einsturz gebracht wurden, sowie die von Gaube/Müller [15] 1975 an Rohrstücken aus PVC und Polyäthylen durchgeführten Experimente.

Im folgenden sollen nun auf der Grundlage der Arbeit [7] Bemessungsdiagramme aufgestellt werden, die eine Abschätzung der Sicherheit der oben erwähnten Konstruktionen gegen Erreichen der Grenzlast ermöglichen. Da die Herleitung des maßgebenden Differentialgleichungssystems in [7] beschrieben ist, wird im Abschnitt 2 eine gekürzte Darstellung der Grundlagen gewählt, dagegen auf die unterschiedlichen Ergebnisse bei Belastung durch Wasserdruck und durch Erd- druck in den Abschnitten 3 und 4 näher eingegangen.

2 Differentialgleichungen für gebettete Systeme, in denen Belastung und Bettungswirkung voneinander unabhängig sind (z. B. Wasserdruckproblem)

Betrachtet sei der Fall einer kreiszylindrischen Konstruktion nach Bild 1, die an ihrer äußeren Kontur r_a durch radial wirkende Federn, die nur Druckspannungen aufnehmen können, gestützt wird. Im Falle einwärts gerichteter Verschiebungen bleibt die Konstruktion in diesem Bereich ungebettet. Die äußeren Lasten – z. B. Wasserdruck oder Unterdruck im Innenraum – bleiben hierbei in voller Höhe wirksam.

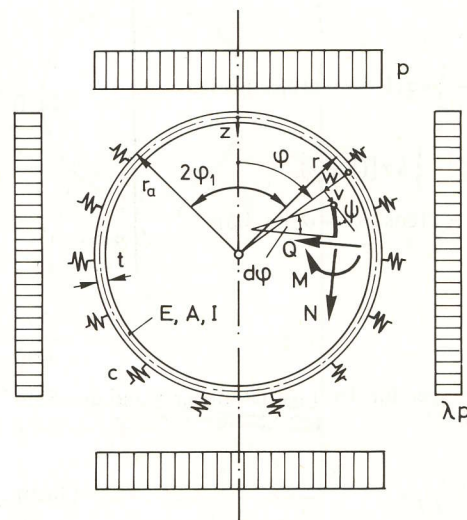


Bild 1. System, Belastung und Schnittgrößen des einseitig elastisch gebetteten Kreisringes

Diesem Belastungs- und Stützungsverhalten entspricht als statisches System der einseitig gebettete Kreisring nach Bild 1. Es wird angenommen, daß sich der Ring bei rotationssymmetrischen Lasten ($\lambda = 1$) in einem Bereich der Größe $2\phi_1$ an beliebiger Stelle, die durch Störungen der Geometrie oder der Lasten bestimmt sein mag, nach innen verformt und dort ungebettet ist. Im Fall $\lambda < 1$ tritt der ungebettete Bereich an der Stelle der maximalen Lastordinate, z.B. im Firstpunkt, auf. Bei Laststeigerung ergibt sich ein nichtlineares Spannungsproblem, das auf die Existenz einer Grenzlast mit stark ansteigenden Verformungen zu untersuchen ist.

Zur Lösung dieses Problems wurden in [7] folgende Annahmen zugrunde gelegt:

1. Die Verzerrungen ε und ψ sind mit den Verschiebungen v und w , sowie mit den Verschiebungsgradienten nichtlinear verknüpft.
2. Die drei Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Kreisbogenelementes sind für den verformten Zustand formuliert.
3. Die Belastungen und Bettungswirkungen sind normalentreu.
4. Die Bettungswirkungen werden mit Ausnahme der Sonderfälle im Abschnitt 3.6 durch den Winklerschen Bettungsansatz $\bar{p} = c w$ beschrieben.¹
5. Entsprechend der Bernoullischen Hypothese gilt Ebenbleiben der Querschnitte; Schubverformungen werden nach einer Überprüfung durch Vergleichsrechnungen vernachlässigt.
6. Die Größe des ungebetteten Bereichs wird bei jeder Laststufe aus der Bedingung $w(\pm\phi_1) = 0$ ermittelt.
7. Aus Symmetriegründen wird das System nach Bild 1 nur im Bereich $0 \leq \phi \leq \pi$ untersucht.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich mit den sechs dimensionslosen Unbekannten

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{v}{r}, & \eta &= \frac{w}{r}, & \psi, \\ m &= \frac{M}{EA r}, & n &= \frac{N}{EA}, & q = \frac{Q}{EA}, \end{aligned} \right\} \quad (1a-f)$$

ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, das aus den Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen (2a, b), den Gleichgewichtsbeziehungen (2d-f) und den konstitutiven Gln. (2c, g) besteht:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta + (1 + \varepsilon) \cos \psi - 1, \\ \dot{\eta} &= -\xi + (1 + \varepsilon) \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= n + \zeta m \\ n \cdot &= q(1 + \psi \cdot) - \frac{1}{2} k \alpha (1 - \lambda) \sin 2(\phi + \psi), \\ q \cdot &= -n(1 + \psi \cdot) - \frac{1}{2} k \alpha [(1 + \lambda) \\ &\quad + (1 - \lambda) \cos 2(\phi + \psi)] + k \beta \eta, \\ m \cdot &= -q(1 + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (2a-f)$$

mit

$$\varepsilon = n + m \quad (2g)$$

und den Abkürzungen für den Lastparameter α und den Steifigkeitsparameter β

$$\alpha = \frac{p r^3}{EI}, \quad \beta = \frac{c r^4}{EI} \quad (3a, b)$$

¹ Zur Ermittlung von c : z. B. [8, 25, 33].

sowie

$$k = \frac{I}{A r^2}, \quad \zeta = \frac{\int_A \frac{dA}{1 + \frac{z}{r}}}{\int_A \frac{dA}{1 + \frac{z}{r}} - A} \quad (3c, d)$$

(Für Rechteckquerschnitte gilt $\zeta = -0,8 + 12 \left(\frac{r}{t}\right)^2$, vgl. [7], Gl. 46b)

Die Randbedingungen am Intervallanfang $\phi = 0$ und am Intervallende $\phi = \pi$ lauten:

$$\xi = \psi = q = 0 \quad (4a-c)$$

Die übrigen Randwerte sowie die Feldgrößen sind unbekannt, es handelt sich also um ein Zweipunkttrandwertproblem eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems.

Die numerische Lösung erfolgt durch ein auf Differentialgleichungssysteme der Form

$$x'_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_6; t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5a)$$

verallgemeinertes Newton-Verfahren, wodurch das nichtlineare Problem zunächst auf eine unter bestimmten Voraussetzungen quadratisch konvergierende Folge linearer Randwertaufgaben transformiert wird. Die $(k+1)$ te lineare Differentialgleichung hat die Form

$$\left. \begin{aligned} x'_{i(k+1)} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{(k)} x_{j(k+1)} \\ &\quad + g_i(x_{i(k)}, t) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{(k)} x_{j(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

in der die Jakobi-Matrix der partiellen Ableitungen von g_i nach x_j an den Stützstellen $t_i = l \Delta t$ aus der k -ten Näherung zu ermitteln ist. Der Algorithmus (6) wird in der englischsprachigen Literatur [16] als „quasilinearization“ bezeichnet. Das im linearen Fall gültige Superpositionsprinzip gestattet es nun, die unbekannt Funktionen $x_i(t)$ aus einem Fundamentalsystem der Lösungen der Anfangswertaufgaben durch Linearkombination zu gewinnen.

Auf diese Weise kann für vorgegebene Lastparameter $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ der Vektor \underline{z} der Zustandsgrößen $\{\xi, \eta, \psi, n, q, m\}$ an den Stützstellen $\phi_i = t_i$ ermittelt werden. Eine Grenzlast α_m des Systems ist erreicht, wenn bei kleinen Zuwächsen des Lastparameters charakteristische Zustandsgrößen wie z.B. die Firstverschiebung $\eta(\phi = 0)$ stark ansteigen. Bei weiterer Annäherung an die Grenzlast wird das numerische Verfahren divergent.

Eine Möglichkeit, auch nach Erreichen der Grenzlast Gleichgewichtszustände des Systems zu berechnen, eröffnet das Parameterschätzverfahren z.B. nach Lee [17]. Anstelle des Lastparameters α wird die Randgröße $\eta_0 = \eta(\phi = 0)$ vorgegeben und der Parameter α als weitere Unbekannte in das Differentialgleichungssystem (2a-f) eingeführt. Da α konstant bezüglich der unabhängigen Variablen ϕ ist, gilt als siebente Differentialgleichung

$$\alpha \cdot = x'_7 = 0. \quad (5b)$$

Damit können die vollständigen Last-Verschiebungskurven des Systems berechnet werden. Insbesondere kann gezeigt werden, daß die vom einseitig gebetteten Ring aufnehmbare Belastung im überkritischen Bereich in der Regel absinkt, es sich also um ein vorverformungsempfindliches Stabilitätsproblem handeln kann.

Eine ausreichende Genauigkeit und schnelle Konvergenz der numerischen Rechnungen konnten mit den folgenden Steuergrößen erzielt werden:

- $\epsilon_\phi = 1\%$ Genauigkeit des Bereichswinkels ϕ_1 , für das verallgemeinerte Newton-Verfahren:
- $\epsilon_x = 1\%$ Differenz aus $x_{i(k)}$ und $x_{i(k+1)}$,
- $\Delta\phi = 5^\circ$ Abstand der Stützstellen im Integrationsgebiet, für die Anfangswertaufgaben nach Wanner [18]:
- $m = 5$ Ordnung der Taylorreihenentwicklung,
- $l = 1$ Ordnung der Störungsrechnung (Lie-Reihen),
- $k = 1$ Zahl der Quadratur-Stützstellen.

3 Ergebnisse für das „Wasserdruckproblem“

3.1 Verhalten bei Laststeigerung

3.1.1 Last-Verschiebungskurven

Zunächst wird das Verhalten der Konstruktion bei Laststeigerung anhand der in Bild 2 dargestellten Last-Verschiebungskurven betrachtet. Für den Steifigkeitsparameter dieser Beispiele ist der verhältnismäßig hohe Wert $\beta = 10^4$ gewählt worden, der in Anwendungsfällen mit geringer Biegesteifigkeit der Wandung und steifem Hinterfüllungsmaterial (z. B. Kunststoffrohre und Behälter aus GFK) auftreten kann.

Abhängig von einem Parameter

$$k^* = \sqrt{\frac{A}{12I}} r \quad \left(= \frac{r}{t} \text{ bei Rechteckquerschnitten} \right), \quad (7)$$

der das Verhältnis zwischen Dehn- und Biegesteifigkeit kennzeichnet, steigen die Kurven bis zur Maximallast α_m mit unterschiedlichen Steigungen an (Phasen A und B) und fallen nach Überschreiten des Maximums mit geringeren Steigungen wieder ab (Phase C). Im überkritischen Bereich ist auch bei größeren Verschiebungen des Scheitels der Konstruktion kein erneutes Ansteigen der Lasten zu beobachten.

Die Maxima der Last-Verschiebungskurven konvergieren für wachsende Parameter k^* gegen die klassischen Beullasten α_{ki} nach Hain [5]. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß

bei Ringen mit relativ zur Biegesteifigkeit zunehmender Dehnsteifigkeit die Axialdehnungen im Grundzustand klein und damit die Unterschiede zwischen den Annahmen der klassischen Stabilitätstheorie und der nichtlinearen Rechnung geringer sind. Dagegen sind z. B. bei Kunststoffrohren mit kleinen Werten $k^* (< 20)$ erhebliche Abweichungen zwischen den Maximal- und den klassischen Beullasten vorhanden.

3.1.2 Last-Verschiebungskurven für Konstruktionen mit Vorverformungen

Bild 2 zeigt die Abminderung der Maximallasten bei Vorhandensein von Vorverformungen, deren Verlauf über den Umfang nach den Gln.

$$\left. \begin{aligned} \eta_v(\phi) &= \omega_v \cos 2\phi, & \omega_v &= \frac{w_v}{r}, \\ \xi_v(\phi) &= 0,5 \omega_v \sin 2\phi, \\ \psi_v(\phi) &= -1,5 \omega_v \sin 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (8a-c)$$

angenommen wurde. w_v ist die Vorverformungsamplitude im Scheitelpunkt. Der durch die Gln. (8a-c) vereinbarte Verlauf der Vorverformungen, wodurch der Kreisring die Gestalt einer liegenden Ellipse erhält, ist z. B. für den Anwendungsbereich eingeschütteter Kunststoffrohre mit größeren Wandstärken sinnvoll, während bei dünnwandigeren Konstruktionen eher eine örtlich begrenzte Vorbeule anzusetzen wäre. Aus Bild 2 ist zu entnehmen, daß bei kleineren k^* -Werten (flachere Last-Verschiebungskurven) der Vorbeuleinfluß auf die Maximallasten abnimmt. Hier kann mit einem ausreichend großen Sicherheitsbeiwert der Einfluß der Rohrelliptizität erfaßt werden, was durch Parameterstudien im Abschnitt 3.2.2 bestätigt wird.

Bei dünnwandigeren Rohren (größeres k^*) kann dagegen nicht auf genauere Untersuchungen des Vorbeuleinflusses verzichtet werden. So wird bei $\beta = 10^4$ und $k^* = 100$ die Maximallast durch Vorverformungen von 0,5% des Radius um 5% bei elliptischer Rohrform und um 28% bei örtlich begrenzter Vorbeule nach Rechnungen von Menzel [19] reduziert.

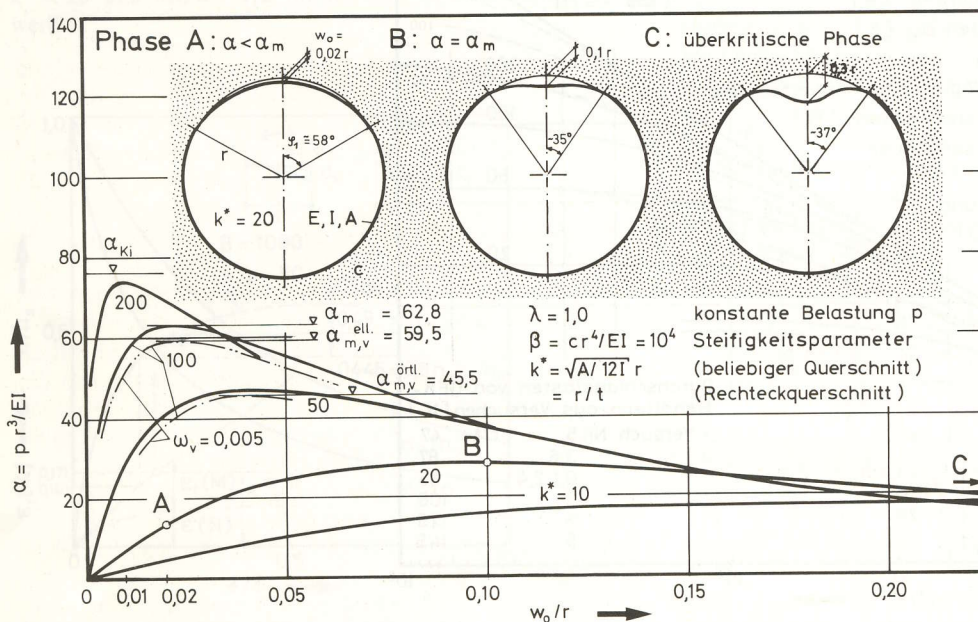


Bild 2. Last-Verschiebungskurven des einseitig elastisch gebetteten Kreisringes

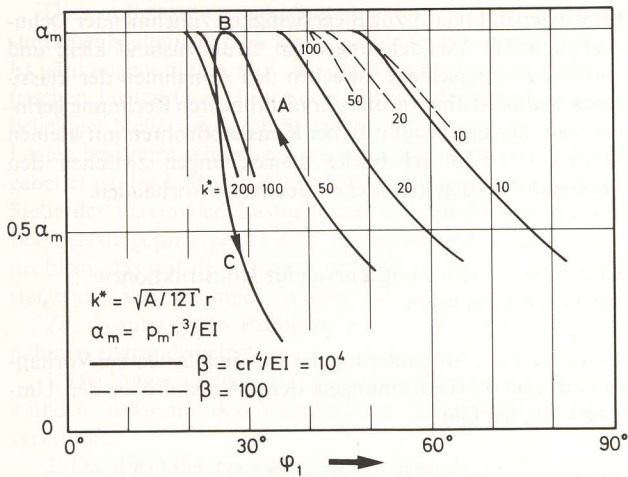


Bild 3. Veränderung des Winkels des ungebetteten Bereichs bei Laststeigerung

3.1.3 Öffnungswinkel des ungebetteten Bereichs

Zur Veranschaulichung der Phasen des Beulvorganges unter einer von der Bettung unabhängigen Belastung ist in Bild 3 der Winkel ϕ_1 des ungebetteten Bereichs in Abhängigkeit von α angegeben. Er wird bei Erhöhung des Lastparameters von $0,5\alpha_m$ auf α_m um rund 50% verringert und steigt im überkritischen Bereich langsam wieder an. Dies entspricht nach Glock [20] dem Verhalten des Ringes mit starrer Ummantelung, der sich zunächst infolge einer Umfangsverkürzung bei unterkritischer Druckbelastung von der Ummantelung löst. Bereits vor und während des Ausbeulens kommt es dann zu einem Anliegen an der Wandung, wobei sich der Kontaktbereich vergrößert (Phasen A und B), und nach Erreichen von α_m wieder zu einem Loslösen von der Wandung, während der Ring nach innen zusammenstürzt (Phase C). Für die Frage der maßgebenden Vorbeulform ist die Größe des Winkels ϕ_1

bei α_m von Bedeutung [19]. Bild 3 zeigt, daß ϕ_1 bei wachsenden Werten von β und k^* abnimmt.

3.2 Parametrische Untersuchungen

3.2.1 Maximallasten

In Bild 4 sind die Ergebnisse von umfangreichen parametrischen Untersuchungen dargestellt. Wichtiger Kurvenparameter ist wieder das Verhältnis der Dehn- zur Biegesteifigkeit der Konstruktion, das besonders für größere Werte β einen erheblichen Einfluß auf die Maximallasten α_m hat. Bei Vernachlässigung der axialen Dehnungen ergibt sich die Kurve $k^* = \infty$, die für dickwandigere Bauten z. T. erheblich über den exakten Grenzlaster liegt.

Im Bild 4 sind die beiden Grenzfälle des freien und des starr ummantelten Kreisringes zu erkennen. Im Fall β gegen Null gehen die Kurven für α_m und α_{ki} ineinander über und konvergieren gegen den bekannten Wert

$$\alpha_{m,0} = \alpha_{ki,0} = 3,0 \tag{9}$$

mit der in [21] näher dargestellten Besonderheit: Bei ungefähr $\beta = 40$ zweigt von der Kurve für die einwellige Versagensform ($n_s = 1$ Symmetrieachse) eine weitere Kurve für zweiwellige Beulformen ($n_s = 2$) ab, die für $\beta < 40$ unter der ersten liegt.

Bei zunehmender Federsteifigkeit der Bettung ist in Bild 4 eine Abflachung der Kurven für α_m und für kleinere Werte k^* ein Einmünden in Parallelen zur β -Achse zu erkennen. Für die Grenzwerte hat Glock [20] auf der Grundlage der Energiemethode die Gl.

$$\alpha_{m,\infty} = 2,62 k^{*5} \tag{10}$$

hergeleitet. Diese Beziehung gilt bei Berücksichtigung der Axialdehnungen ε_0 im Grundzustand. Der Fall $\varepsilon_0 = 0$ wurde von Britvec [22] im Zusammenhang mit dem Temperatur-

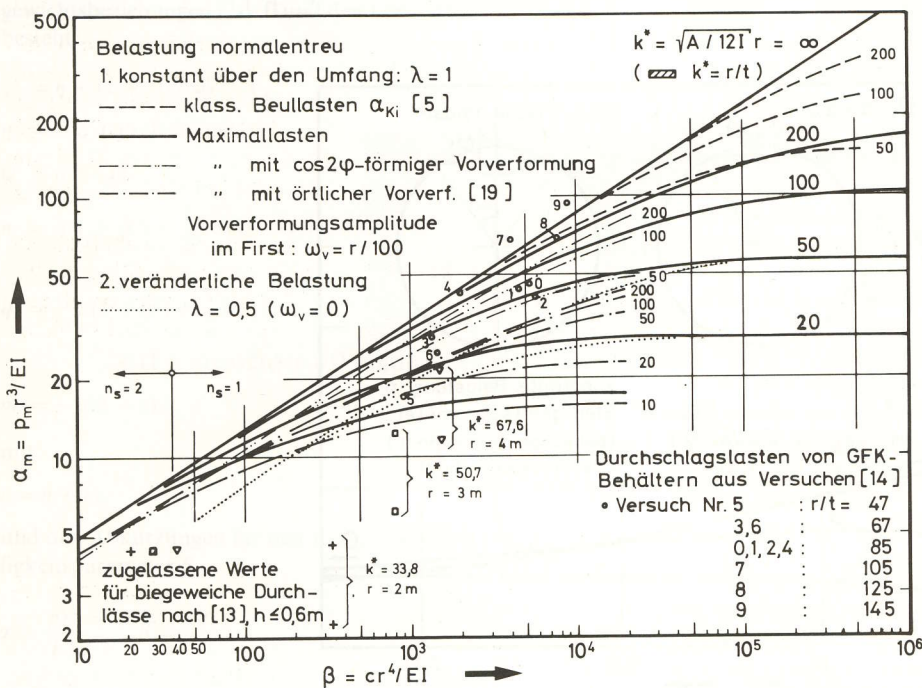


Bild 4. Grenzlaster des einseitig gebetteten Kreisringes und Versuchsergebnisse

beulproblem des starr ummantelten Ringes behandelt. Durch Umrechnungen mit

$$\alpha_T \Delta T_{Ki} = k \alpha_{Ki, \lambda}$$

mit der Wärmedehnzahl α_T und der kritischen Temperaturerhöhung ΔT_{Ki} läßt sich die Gl.

$$\alpha_{Ki, \lambda} = 6,72 k^* \frac{4}{5} \quad (11)$$

für $\epsilon_0 = 0$ ermitteln. Die gestrichelten Kurven in Bild 4 konvergieren für $\beta \rightarrow \infty$ gegen die kritischen Lasten nach Gl. (11).

3.2.2 Variation des Verlaufs der Vorverformungen

Der Einfluß der Vorverformungsfigur auf die Größe der Maximallast ist aus Bild 4 zu entnehmen. Die Amplitude ist konstant und beträgt $\omega_v = 0,01r$. Bei zweiwelliger Beulform ($\beta < 40$) ist eine Vorverformung nach Gl. (8a-c), bei einwelliger Beulform ($\beta > 40$) dagegen die örtliche, einwellige Vorverformung nach [19] maßgebend. Es sind also entsprechend der Forderung in [23], Abschnitt 1.5.1, wonach als Vorverformungsfigur eine der maßgebenden Eigenform ähnliche Funktion zu wählen ist, abhängig vom Steifigkeitsparameter β zwei verschiedene Vorverformungsverläufe zu betrachten.

Zum Vergleich ist in Bild 4 auch der Fall nicht konstanten Außendrucks, gekennzeichnet durch $\lambda = 0,5$, für $k^* = 20$ und 50 eingetragen. Für kleinere β -Werte werden ungünstigere Werte für α_m erhalten, während die Kurve $\lambda = 0,5$ für große β gegen die Kurve für $\lambda = 1,0$ konvergiert. Für die Frage der anzusetzenden Imperfektionen folgt hieraus, daß Belastungsimperfektionen ($\lambda \neq 1$) und geometrische Imperfektionen ($\omega_v \neq 0$) am vorliegenden System völlig verschiedene Auswirkungen haben. Eine Rechnung mit $\lambda < 1$ kann also bei Vorliegen von Vorbeulen eine Analyse des Vorbeuleneinflusses nicht ersetzen.

3.3 Gültigkeitsgrenzen

Zum Einfluß von Schubverformungen auf die Maximallasten gilt nach hier nicht wiedergegebenen Rechnungen: Schubverformungen sollten bei Schubverteilungszahlen $\lambda > 5$ für $k^* < 20$ und bei $\lambda > 1,2$ für $k^* < 10$ in Betracht gezogen werden.

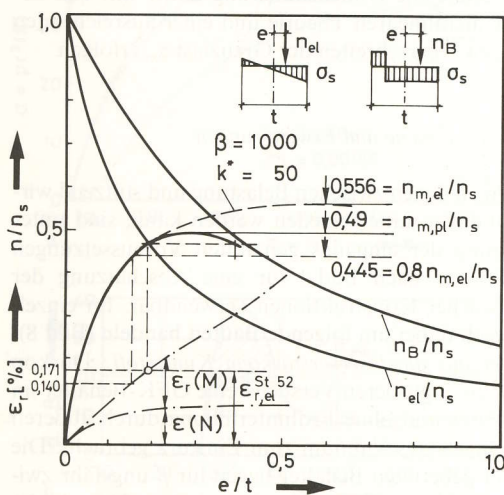


Bild 5. Last-Verschiebungskurve bei Überschreiten der Streckgrenze

Die in Bild 4 angegebenen Maximallasten gelten unter der Voraussetzung linear elastischen Materialverhaltens. Wird bei Laststeigerung im unterkritischen Bereich $\alpha < \alpha_m$ in einer Randfaser die Streckgrenze des Ausbaumaterials überschritten, müssen die elastischen Maximallasten $\alpha_{m, el}$ auf die plastischen $\alpha_{m, pl}$ abgemindert werden.

Ein Näherungsverfahren hierzu wird von Dulácska [24] beschrieben und in Bild 5 auf ein glattwandiges eingebettetes Rohr aus St 52 mit den Parametern $\beta = 1000$ und $k^* = r/t = 50$ angewandt. Voraussetzung ist, daß im maßgebenden Belastungsbereich nur ein Fließgelenk im Firstpunkt auftritt. Auf der Abszisse ist die Exzentrizität e der Normalkraft im Firstpunkt bezogen auf die Wandstärke t aufgetragen, an der Ordinate die auf die Streckgrenze n_s bezogene Normalkraft $n = N/EA$. In diesem Diagramm sind die Kurven

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_{el}}{n_s} &= \frac{1}{1 + 6 \frac{e}{t}} \\ \text{und} \\ \frac{n_B}{n_s} &= -2 \frac{e}{t} + \sqrt{4 \left(\frac{e}{t}\right)^2 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (12a, b)$$

die von e/t abhängigen Grenzlinien für das Erreichen der Streckgrenze in einer Randfaser bzw. der Bruchgrenze mit voll plastiziertem Querschnitt. Trägt man in das Diagramm die auf n_s bezogenen dimensionslosen Normalkräfte n des Systems im am stärksten beanspruchten Punkt, dem Firstpunkt, in Abhängigkeit von

$$\frac{e}{t} = \frac{m}{n} k^* \quad (13)$$

ein, dann erhält man einen Schnittpunkt mit der Grenzkurve n_{el}/n_s , bei deren Überschreiten im Querschnitt Fließen auftritt. Die maximale Dehnung in der Randfaser

$$\epsilon_r = n \pm m \cdot 6 k^* \quad (14)$$

hat hierbei den Wert

$$\epsilon_{r, el}^{St 52} = \frac{\sigma_s^{St 52}}{E} = \frac{360}{2,1 \cdot 10^5} = 1,71 \cdot 10^{-3}$$

Zwischen den Kurven n_{el}/n_s und n_B/n_s erfolgt nun eine Abminderung der elastischen Normalkraftkurve (gestrichelt) entsprechend dem verringerten Tragvermögen des teilplastizierten Querschnitts (vgl. [24], Bild 11). Die ausgezogene Kurve n/n_s verläuft unterhalb der Linie n_B/n_s mit einem Maximum $n_{m, pl}/n_s = 0,49$, woraus die gesuchte plastische Maximallast $\alpha_{m, pl}$ ermittelt werden kann.

Ein Näherungsverfahren für $\alpha_{m, pl}$ ergibt sich auf bekannte Weise mit dem Vergleichsschlankheitskonzept: Mit den klassischen Beullasten $\alpha_{Ki} = p_{Ki} r^3 / EI$ nach [5] oder bei Ringen mit Gelenken nach [21] erhält man die Vergleichsschlankheit

$$\lambda_v = \frac{r \pi}{\sqrt{\alpha_{Ki} t}} = \frac{10,87}{\sqrt{\alpha_{Ki}}} \cdot \frac{r}{t} \quad (15a)$$

und mit zugehörigem ω

$$\text{zul} \alpha_\omega = \frac{\text{zul} \sigma}{\omega E} \cdot 12 \left(\frac{r}{t}\right)^2 \quad (15b)$$

Für das Beispiel nach Bild 5 liefert das ω -Verfahren mit $\alpha_{Ki} = 33$ bei St 52 den zulässigen Lastparameter 13,2, das Verfahren nach [24] dagegen mit $\alpha_m = 27,5$ den Wert $\text{zul} \alpha_{pl} = 14,7$. Weitere hier nicht wiedergegebene Vergleiche für glattwandige Rohre zeigen, daß für steigende Werte β die Werte von $\text{zul} \alpha_{pl}$ z.T. weit unter $\text{zul} \alpha_\omega$ liegen, da hier die

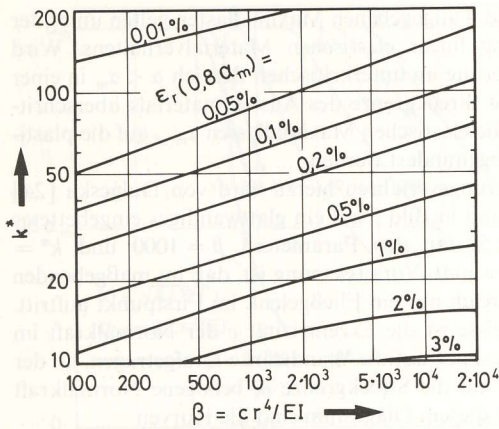


Bild 6. Maximale Randdehnungen von glattwandigen Kreis- zylinderschalen bei Erreichen von $0,8\alpha_m$

Reduktion von α_m gegenüber α_{Ki} durchschlägt (Bild 4). Bei kleineren Werten β ist eine umgekehrte Tendenz zu beobachten.

In Bild 6 sind die Randdehnungen ϵ_r von Rechteckquer- schnitten bei Erreichen von $0,8$ fachen Maximallasten aufge- tragen. Bei vorgegebener Grenzdehnung $\epsilon_{r,el}$ des Werkstoffes kann damit beurteilt werden, ob eine plastische Untersuchung erforderlich wird. Der Grenzwert $0,8\alpha_m$ wurde gewählt, da kurz vor Erreichen von $\alpha_{m,el}$ das Biegemoment M und damit die Randdehnungen $\epsilon_r(M)$ steil anwachsen (Bild 5, unterer Teil). So wird bei Anwendung von Bild 6 u. U. auf eine volle Ausnutzung von α_m verzichtet, es bleiben aber die linear elastischen Ergebnisse in einem größeren Parameterbereich gültig.

3.4 Vergleiche mit Ergebnissen der linearisierten Theorie 2. Ordnung

Eine erste Arbeit, nach der Tunnelausbauten aus Tübbings nach Theorie 2. Ordnung tabellarisch berechnet werden können, stammt von Windels [2]. Hierin wird ein konstanter Öffnungswinkel des ungebetteten Bereichs mit $2\phi_1 = 90^\circ$ vorausgesetzt. Zur besseren Vergleichbarkeit wird das von Hain/Horst [3] angegebene Verfahren verwendet, in dem wie in der vorliegenden Arbeit der Winkel ϕ_1 auf jeder Iterations- stufe neu ermittelt wird. In Bild 7 sind die Abweichungen für

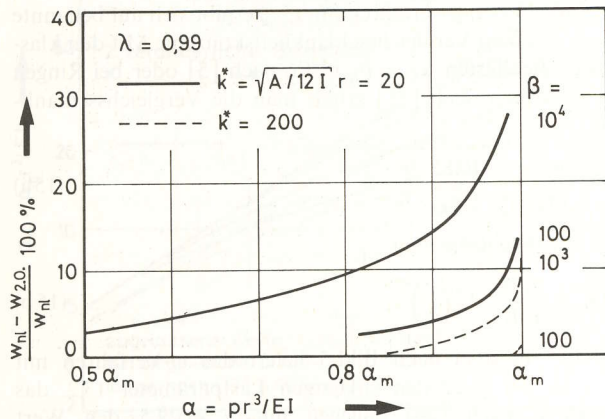


Bild 7. Vergleich der Firstverschiebungen aus Rechnungen nach der linearisierten Theorie 2. Ordnung und der vorgelegten Theorie

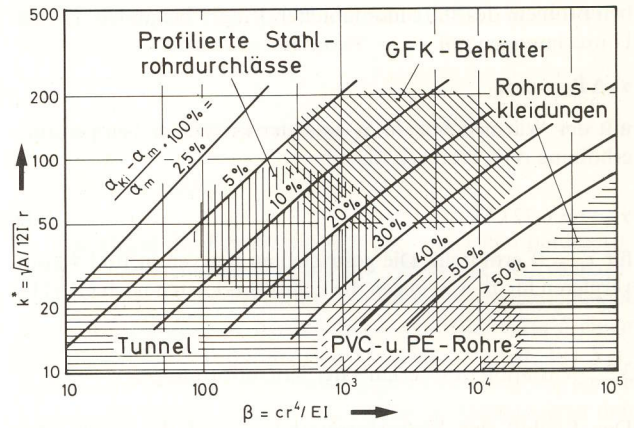


Bild 8. Abweichungen der Maximallasten α_m von den klassischen Beullasten α_{Ki} und Anwendungsgebiete

die Verschiebungen im First zwischen linearisierter Theorie 2. Ordnung und der vorliegenden nichtlinearen Theorie angegeben. Da für $\lambda = 1$ mit dem erstgenannten Verfahren keine Konvergenz erzielt werden konnte, wurde λ für die Vergleiche auf $0,99$ reduziert. Es zeigt sich, daß für die untersuchten Parameter die linearisierte Theorie 2. Ordnung bis zu 80% der Maximallast brauchbare Ergebnisse für die radialen Firstverschiebungen liefert (max. Fehler bei $\beta = 10^4$: 10%). Die nach der linearisierten Theorie 2. Ordnung berechneten Verschiebungen sind kleiner, die Maximallasten α_m größer als die nach der nichtlinearen Theorie ermittelten Werte. Ähnliche Ergebnisse wurden für den hier nicht dargestellten Fall $\lambda = 0,5$ gefunden.

3.5 Vergleich mit den klassischen Beullasten α_{Ki}

In Bild 8 sind die Abweichungen der klassischen Beullasten α_{Ki} von den Maximallasten α_m in Prozent angegeben. Die Abweichungen haben eine steigende Tendenz bei wachsenden β - und bei fallenden k^* -Werten (Bild 4). Außerdem ist der ungefähre Bereich für mehrere praktische Anwendungsfälle angegeben: Tunnelkonstruktionen, Behälter aus glasfaserverstärktem Kunststoff, dickwandige Rohre aus PVC und Polyäthylen und Rohrauskleidungen. Bei Kunststoffrohren sind die Abweichungen besonders groß ($> 40\%$), bei Vorhandensein von Wasserdruck sollte die Dimensionierung daher mit den Ergebnissen der nichtlinearen Theorie und einer ausreichenden Sicherheit gegen Überschreiten der Grenzlast α_m erfolgen.

3.6 Anwendungsbereiche und Erweiterungen

In allen Fällen, in denen zwischen Belastung und stützend wirkenden Spannungen unterschieden werden kann, sind unter Berücksichtigung der eingangs genannten Voraussetzungen die Maximallasten nach Bild 4 für eine Abschätzung der Grenzlasten solcher Konstruktionen verwendbar. Im einzelnen kann es sich dabei um folgende Bauten handeln (Bild 8):

a) Behälter aus glasfaserverstärktem Kunststoff: Dürkop hat in [14] in einer größeren Versuchsreihe GFK-Behälter im Maßstab 1:1 mit und ohne Erdhinterfüllung durch äußeren Druck oder angelegtes Vakuum zum Einsturz gebracht. Die Parameter der gebetteten Behälter liegen für β ungefähr zwischen 10^3 und 10^4 und für k^* ($= r/t$) zwischen 50 und 150 . Die in Bild 4 eingezeichneten Versuchsergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Maximallasten α_m .

b) *Schildvorgetriebene Tunnel* werden in der Regel unter der Annahme eines im Firstbereich reibungsfrei nachrutschenden Erdkeils („Silotheorie“) dimensioniert [25]. Diese auf der sicheren Seite liegende Annahme ist vor allem bei geringeren Überdeckungen ($h < 4r$) zu treffen, wo eine Berechnung des Bodens als elastisches Kontinuum mit kreisförmigem Ausschnitt über dem First Querspannungen aufweist, die vom Erdmaterial i. a. nicht aufgenommen werden können.

Als ein Beispiel für die Größenordnung der im Tunnelbau auftretenden Parameter sei der Hamburger Elbtunnel mit $k^* = 16,7$ und $\beta = 446$ genannt. Aufgrund der niedrigen Werte für k^* ist eine Berücksichtigung der Längsdehnungen sowohl für Spannungs- als auch für Stabilitätsnachweise erforderlich.

c) *Durchlässe unter Straßen und Eisenbahnstrecken aus kaltgewellten und kaltgebogenen Stahlblechen* [8, 12, 13]: Wie bei Tunnelbauten ist auch hier bei geringen Überschüttungen eine Abtragung der Erdlast und der Verkehrslasten durch Gewölbebildung im Boden in nur beschränktem Umfang möglich. Die vertikalen Bodenspannungen über dem First bleiben bei nach innen ausweichender Konstruktion nahezu unverändert erhalten. Im Fall sehr geringer Überschüttungen ($h = 40$ bis 60 cm) hat Kienberger [13] durch Messung der Bodenspannungen bei wachsender Auflast sogar eine abnehmende rechnerische Bettungszahl nachgewiesen, was durch Grundbrucherscheinungen in den Ulmenbereichen bedingt sein dürfte. In bestimmten Anwendungen müssen also die Bettungsspannungen $\bar{p} = c w$ (oder dimensionslos $\bar{\alpha} = \beta \eta$) im Ulmenbereich begrenzt werden, da sonst unzulässig hohe Spannungsspitzen im Bettungsmedium entstehen (Bild 9b). Dies kann durch Einführen eines nichtlinearen Bettungsgesetzes

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\max} \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\beta}{\bar{\alpha}_{\max}} \frac{\pi}{2} \eta \quad (16)$$

in das Dgl.system erfolgen. Das Bettungsgesetz sowie die resultierende Last-Verschiebungskurve sind in Bild 9a strichpunkt-

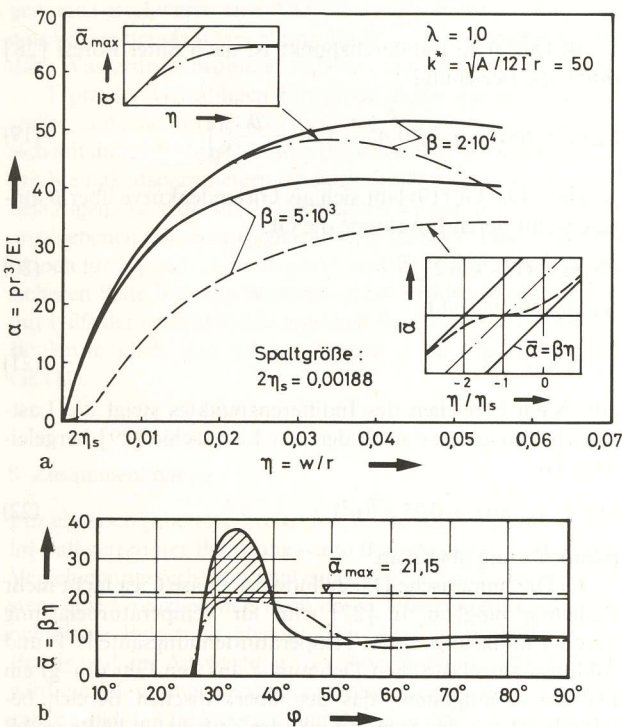


Bild 9 a u. b. Last-Verschiebungskurven und Bettungsspannungen bei nichtlinearen Bettungsgesetzen

tiert dargestellt. In dem frei gewählten Beispiel wird die Maximallast um 7% und die Spannungsspitze in den Ulmen um 50% reduziert.

Die in [12] angegebenen Mindestwandstärken können näherungsweise in zulässige Lastparameter umgerechnet werden. Sie sind für $h = 0,4$ und 1 m in Bild 4 eingetragen. Da bei den hier überwiegenden Verkehrslasten (Raddruck des SLW 60) der Seitendruck vermindert ist, sind die Kurven mit $\lambda = 0,5$ für Vergleiche eher geeignet.

d) *Rohrauskleidungen*: Zu diesem Anwendungsbereich gehören z. B. zweiwandige Schalen mit einer wärmeisolierenden, elastischen Zwischenschicht oder sogenannte Inliner, die als Korrosionsschutz nachträglich in Rohre größeren Durchmessers eingezogen werden. Bei solchen Konstruktionen stellt sich häufig die Frage nach den Auswirkungen eines freien Spaltes zwischen Innen- und Außenrohr auf die Höhe der Maximallasten. Zur Lösung wird das folgende Bettungsgesetz vorgeschlagen

$$\bar{\alpha} = \beta \eta_s \left[\frac{\eta}{\eta_s} + 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\pi}{2} \left(\frac{\eta}{\eta_s} + 1 \right) \right], \quad (17)$$

worin η_s die bezogene Spaltgröße w_s/r bedeutet. Für $\beta = 5000$ und $k^* = 50$ sind in Bild 9a die Auswirkungen eines verhältnismäßig kleinen Spaltes ($\sim r/1000$) auf die Last-Verschiebungskurve dargestellt (gestrichelte Kurve): Die Reduktion von α_m beträgt 17,5%! Das Problem der Spaltbildung bei starrer Ummantelung ist von McGhie/Brush [26] behandelt worden.

4 Überlegungen und Ergebnisse zum Erddruckproblem

4.1 Modellversuche und rechnerische Ansätze

Das Stabilitätsproblem einer durch Erdlasten beanspruchten, eingebetteten Konstruktion unterscheidet sich vom Beulen unter den im Abschnitt 3 behandelten Lasten, die bei Verformungen der Konstruktion in ihrer Größe unverändert bleiben. Bei Erddruck ändert sich die Größe der auf der Konstruktionsoberfläche angreifenden Spannungen bereits bei Verformungen des Systems im Grundzustand: Das Bauwerk kann sich durch örtliches Ausweichen Spannungsspitzen entziehen. Sonntag [10] und Sonntag/Fleck [11] haben dieses Tragverhalten in Modellversuchen, in denen Araldit- und Stahlringe über dicht aneinanderliegende Stahlwalzen erddruckähnlich belastet wurden, untersucht. Bei den biegeweicheren Ringen zeigten die spannungsoptischen Versuche, daß die Zahl der Biegelinienwendepunkte zunimmt, also ein mehrwelliger Verformungszustand vorliegt. Bei Laststeigerung erfolgte das Durchschlagen der Ringe jedoch in einer einzigen Beule.

Zur Behandlung des Temperaturbeulproblems des elastisch gebetteten Ringes wurden in [27] Modellversuche mit Ringen aus 0,2 mm dicker Hostaphan-Folie und einem Radius von 76,5 mm durchgeführt (Bild 10a-c). Die Dehnungen aus linearer Temperaturänderung wurden durch ein gleichmäßiges Zusammenziehen des den Ring und eine Bettungsschicht (8 mm Moosgummi, Bettungsmodul 0,9 bis 1,5 N/cm³) umfassenden Stahlringes mittels einer Manschette simuliert. Diese Versuchsanordnung ist unter idealisierenden Annahmen auch für das Erddruckproblem gültig.

Analog zu [10] und [11] verläuft der Beulvorgang des über die Gummischicht radial belasteten Ringes in mehreren Phasen ab:

A) Im Grundzustand wird der Ring gleichmäßig axial gestaucht, alle statischen Größen sind rotationssymmetrisch (Bild 10a):

B) Nach Überschreiten eines Grenzdruckes (darstellbar durch die Spaltverkürzung an der äußeren Ummantelung)

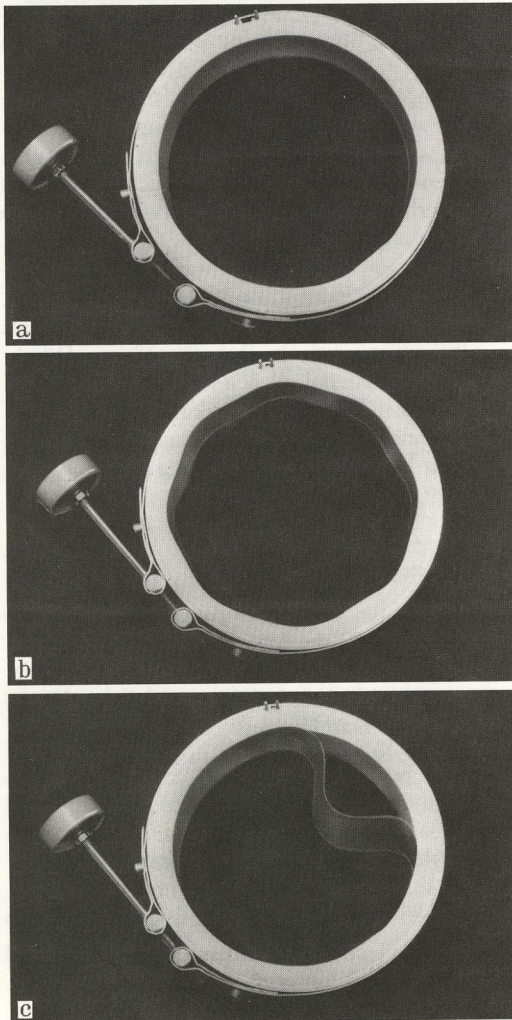


Bild 10 a-c. Beulversuch an einem kurzen Zylinder aus Hostaphanfolie ($t = 0,2 \text{ mm}$) mit Moosgummizwischenlage. **a** Grundzustand, Phase A; **b** Mehrwelliges Beulen, Phase B; **c** Einwelliges Durchschlagen, Phase C

kommt es zur Ausbildung einer mehrwelligen Beulfigur. Im Versuch (Bild 10b) handelt es sich um 8 über den Umfang verteilte Beulen. Dieser Zustand ist auch bei weiterer Laststeigerung anfangs noch stabil, was auf ein zunächst gutartiges Verhalten der Konstruktion im überkritischen Bereich schließen läßt.

C) Bei Erreichen einer weiteren Lastgrenze schlägt der Ring schließlich einwellig durch, wobei sich die Beule in einem gewissen Bereich vollständig vom Bettungsmedium löst (Bild 10c).

Die Zahl der Beulwellen in der Phase B hängt von der Härte des Bettungsmediums ab: Bei einer Bettung durch eine 5 mm starke Schicht aus Paragrau-Gummi (Bettungsmodul 140 bis 1000 N/cm³) waren erheblich geringere Abstände der Wendepunkte zu beobachten (vgl. [27]).

Die oben beschriebenen Phasen lassen sich rechnerisch wie folgt darstellen:

A) Im Grundzustand gilt für die gleichmäßige Kontraktion des Ringes

$$\eta_0 = \frac{w_0}{r} = \frac{1}{1 + k\beta} k\alpha, \tag{18}$$

wobei der Faktor $1/(1 + k\beta)$ die Reduktion der Ringbelastung durch Lastaufnahme des Bettungsmediums kennzeichnet.

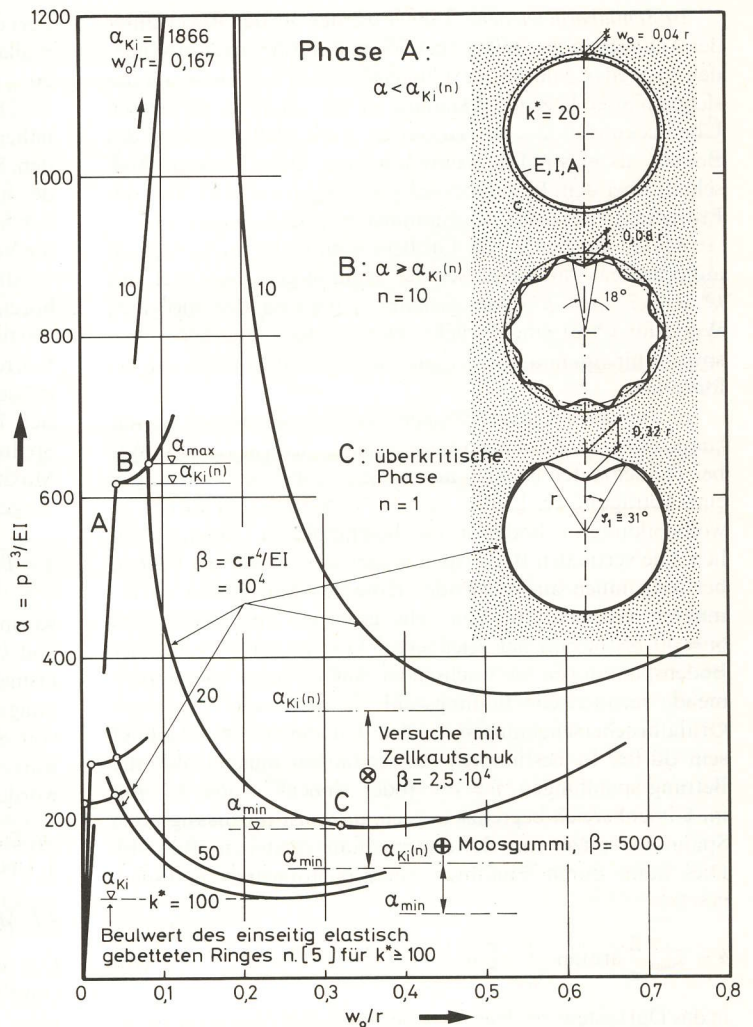


Bild 11. Last-Verschiebungskurven beim Erddruckproblem

B) Der erste Indifferenzpunkt ist nach Sliter/Boresi [28] durch die Beziehung

$$\alpha_{ki}(n) = \min_{n \geq 2} (1 + k\beta) \left(n^2 - 1 + \frac{\beta}{n^2 - 1} \right) \tag{19}$$

gegeben. Die Gl. (19) läßt sich als Girlandenkurve über β auftragen, für deren Enveloppe die Gl.

$$\alpha_{ki}(n) = (1 + k\beta) 2\sqrt{\beta} \tag{20}$$

mit der Wellenzahl

$$n = \sqrt{1 + \sqrt{\beta}} \tag{21}$$

gilt. Nach Erreichen des Indifferenzpunktes steigt die Last-Verschiebungskurve nach der von El-Naschie [29] hergeleiteten Gl.

$$\alpha(\eta) = \alpha_{ki}(n)(1 + 0,25\sqrt{\beta}\eta^2) \tag{22}$$

parabelförmig über η an.

C) Die numerische Darstellung der Phase C ist nicht mehr elementar möglich. In [27] wird für Temperaturbelastung durch Einführung eines Temperaturdehnungsanteils $\tilde{\epsilon}$ aus den Gln. (2a-g) ein Dgl.system aufgestellt, das den überkritischen Bereich beschreibt. Durch den Schnittpunkt der Kurven für die Phasen B und C wird eine theoretische Maximallast für das einwellige Durchschlagen festgelegt.

Für den Steifigkeitsparameter $\beta = 10^4$ und $k^* = 10, 20, 50$ und 100 sind die vollständigen Last-Verschiebungskurven (Phasen A, B und C) im Bild 11 eingetragen. Die Versuche mit Moosgummibettung nach Bild 10 sind durch $\beta \cong 5000$, $k^* \cong 300$ und mit Zellkautschuk durch $\beta \cong 2,5 \cdot 10^4$ und $k^* \cong 200$ gekennzeichnet. Die Versuchsergebnisse liegen in der Nähe der Beullast $\alpha_{Ki}(n)$ für mehrwelliges Beulen und bei zunehmender Bettungssteifigkeit deutlich darunter (vgl. [27], Bild 3). Bei Versuchen mit planmäßigen Vorverformungen fiel die kritische Dehnung noch etwas ab, jedoch nicht unter das Minimum α_{min} der Phase C ([27], Bild 12). α_{min} stimmt für größere k^* -Werte näherungsweise mit den klassischen Beullasten α_{Ki} nach Hain [5] überein.

4.2 Das Erddruckproblem

Für den Stabilitätsfall unter Erdlasten ohne äußeren Wasserdruck müssen die den Versuchen und dem Rechenmodell nach Abschnitt 4.1 zugrunde liegenden Annahmen kritisch betrachtet werden. Im einzelnen sind die folgenden Einschränkungen zu nennen:

1. Das Winklersche Bettungsmodell mit nebeneinanderliegenden, voneinander unabhängigen Einzelfedern ist für natürliche Bodenverhältnisse nur angenähert zutreffend, vielmehr bewirken die Reibungskräfte zwischen Bodenteilen mit unterschiedlichen Verschiebungen eine Koppelung der Federn. Die Beulwellenzahl n würde gegenüber Gl. (21) geringer.

2. Bei Versuchen mit natürlichem Bodenmaterial ist der in den Modellen angenommene rotationssymmetrische Spannungszustand vor Erreichen des 1. Indifferenzpunktes nicht beobachtet worden (vgl. [15], [30]). Vielmehr neigten die in [15] verwendeten Versuchszylinder aus PVC mit $r/t = 50$ zu einer elliptischen Verformungsfigur.

3. Das generell nichtlineare Verhalten des Bodenmaterials, für das ein Coulombsches Stoffgesetz gilt, seine 3-Phasen-Eigenschaften und die große Zahl geometrischer Größen (wie z. B. Überdeckung, Schichtstärken, räumliche Lastverteilungen, etc.) erschweren eine Analyse des Problems und machen eine parametrische Darstellung ähnlich der im Abschnitt 3 für das „Wasserdruckproblem“ nahezu unmöglich.

Trotz der vielzähligen Einwände gegen die in 4.1 dargestellte, einfache Formel (20) für den 1. Indifferenzpunkt lassen sich mit ihr nach Horst [31] die Beullasten der Versuche in [15] mit Steifigkeitsparametern β zwischen 300 und 10^4 rechnerisch bestätigen. Auch die in [32], Abschnitt 5.2 und in [33], Gl. (16) angegebenen Bemessungsgleichungen beruhen auf Gl. (20), die jedoch für β gegen ∞ nicht mehr anwendbar ist. Eine auf der sicheren Seite liegende Bemessung bei Erddruckbelastung ist mit Hilfe der niedrigeren klassischen Beullasten für einwelliges Beulen möglich. Hier gilt bei β gegen ∞ der Grenzwert nach Gl. (11).

5 Zusammenfassung

Für elastisch gebettete, kreiszylindrische Konstruktionen wird im Fall getrennter Belastungs- und Bettungswirkung das Last-Verschiebungsverhalten analysiert. Es zeigt sich, daß das System eine Grenzlast hat, nach deren Überschreitung die aufnehmbare Belastung absinkt. Für Anwendungsfälle in der Praxis und zur Auswertung von Modell- und Großversuchen wird ein Diagramm für die Ermittlung der Grenzlasten angegeben (Bild 4). Die untersuchten Bereiche des Steifigkeitsparameters β und des Konstruktionsparameters k^* umfassen Anwendungen wie Tunnelwandungen, Rohre und Rohrausklei-

dungen aus PVC und Polyäthylen sowie Durchlässe aus kaltgewellten und kaltgebogenen Stahlblechen. Es wird die Gültigkeit des gewählten, linear elastischen Stoffgesetzes der Konstruktion abgegrenzt.

Für das Erddruckproblem, in dem Lasten und Bettungswirkungen nicht mehr voneinander getrennt werden können, werden Versuche und rechnerische Ansätze dargestellt, die einen Einblick in das Verhalten der Konstruktion bei Laststeigerung ermöglichen. Unter idealisierten Voraussetzungen existiert im überkritischen Bereich des zunächst mehrwelligigen Beulproblems ein weiterer Indifferenzpunkt und eine einwellige Beulform.

Für die Forschungsmöglichkeiten am Lehrstuhl für Statik der Universität Hannover danke ich Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Pflüger. Viele Anregungen, insbesondere von Prof. Dr.-Ing. Hain und Prof. Dr.-Ing. Horst halfen bei der Bearbeitung des Problems. Dipl.-Ing. Menzel und Techniker Dühring gilt mein Dank für die Hilfe bei der Versuchsdurchführung.

Literatur

- Schulze, H., Duddeck, H.: Spannungen in schildvorgetriebenen Tunneln. Beton- und Stahlbetonbau 59(1964) 169–175
- Windels, R.: Spannungstheorie zweiter Ordnung für den teilweise gebetteten Kreisring. Bautechnik 43(1966) 265–274
- Hain, H., Horst, H.: Spannungstheorie 1. und 2. Ordnung für beliebige Tunnelquerschnitte unter Berücksichtigung der einseitigen Bettungswirkung des Bodens. Straße Brücke Tunnel 22(1970) 85–94
- Durth, R.: Berechnung von schildvorgetriebenen Tunneln mit Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität in den Gleichgewichtsbedingungen. Diss. TU Braunschweig 1969
- Hain, H.: Stabilität von im Boden eingebetteten Tunnelrohren mit kreisförmigem Querschnitt. Straße Brücke Tunnel 22(1970) 154–159, 206–209
- Hussein, A.: Berechnung elastisch gebetteter Tragwerke mit großen Verformungen mittels finiter Elemente. Diss. TU Hannover 1974
- Falter, B.: Berechnung freier und einseitig elastically gebetteter Kreisbögen und -ringe unter Außendruck mit großen Verschiebungen und Verdrehungen. Diss. TU Hannover 1975
- Klöppel, K., Glock, D.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu den Traglastproblemen biegeweicher, in die Erde eingebetteter Rohre. Veröff. d. Inst. f. Statik u. Stahlbau der TH Darmstadt H. 10 (1970)
- Kessler, H.: Die Bemessung und Traglastberechnung stählerner Tunnelauskleidungen. Inst. f. Statik der TU Braunschweig, Ber. Nr. 76–15 (1976)
- Sonntag, G.: Die Stabilität dünnwandiger Rohre im kohäsionslosen Kontinuum. Felsmech. u. Ingenieurgeologie, Vol. IV/3 (1966) 242–267
- Fleck, H., Sonntag, G.: Vergleich von Modellversuchen für Tunnelauskleidungen im kohäsionslosen Kontinuum mit Berechnungsverfahren. Straße Brücke Tunnel 26(1974) 91–98, 118–122
- Sattler, K.: Untersuchungen über die Tragfähigkeit von gewellten VÖEST-Durchlässen. Linz: Hrsg. VÖEST 1970
- Kienberger, H.: Über das Verformungsverhalten von biegeweichen, im Boden eingebetteten Wellrohren mit geringer Überschüttung. Graz: Hrsg. Bundesministerium f. Bauten u. Technik, Straßenforschung, H. 7 (1975)
- Dürkop, J.: Beitrag zur Stabilität gebetteter Zylinderschalen aus glasfaserverstärkten ungesättigten Polyesterharzen. Diss. TH Aachen 1974
- Gaube, E., Müller, W.: Beulversuche mit erdgebetteten PVC- und PE-Rohren. Hoechst AG, Ffm 1975 (unveröff.)
- Distéfano, N.: Quasilinearization and the Solution of Nonlinear Design Problems in Structures Undergoing Creep Deformations. Int. J. Solids Struct. 8(1972) 215–225

17. Lee, E.S.: Quasilinearization and Invariant Imbedding. New York, London: Acad. Press 1973
18. Wanner, G.: Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Mannheim, Zürich: B.I.-Hochschultaschenb. 831/831 a (1969)
19. Menzel, A.: Der Einfluß von Vorverformungen auf die Grenzlasten von einseitig elastisch gebetteten kreiszylindrischen Konstruktionen. Dipl. Arbeit TU Hannover, Inst. f. Statik 1978
20. Glock, D.: Überkritisches Verhalten eines starr ummantelten Kreisrohres bei Wasserdruck von außen und Temperaturerhöhung. *Stahlbau* 46 (1977) 212–217
21. Hain, H., Falter, B.: Zur Stabilität von biegesteifen oder durch Momentenfedergelenke geschwächten und auf der Außenseite elastisch gebetteten Kreisringen unter konstantem Außendruck. *Straße Brücke Tunnel* 27 (1975) 98–105
22. Britvec, S.J.: Sur le flambage thermique des anneaux et des coque cylindriques précontraints. *Journal de Mécanique* 5 (1966) 409–418
23. DIN 4114, Teil 1, Neufassung Entwurf Okt. 1978
24. Dulácska, E.: Näherungsverfahren für die Stabilitätsuntersuchung von Schalen im plastischen Bereich. *Stahlbau* 46 (1977) 217–224
25. Empfehlungen zur Berechnung von schildvorgetriebenen Tunneln. *Bautechnik* 50 (1973) 253–257
26. McGhie, R.D., Brush, D.O.: Deformation of an Inertia-Loaded Thin Ring in a Rigid Cavity with Initial Clearance. *Int. J. Solids Struct.* 7 (1971) 1539–1553
27. Hain, H., Falter, B.: Zum Stabilitätsproblem des starr oder elastisch gebetteten Kreisringes infolge gleichmäßiger Temperaturerhöhung. *Pflüger-Festschrift* S. 79–91. TU Hannover, Inst. f. Statik 1977
28. Sliter, G.E., Boresi, A.P.: Buckling of Uniformly Compressed Ring with Radial Elastic Support. *Developments in Mech.* 3 (1967) 443–450
29. El Naschie, M.S.: Asymptotic Post Buckling Solution of the Ring in an Elastic Foundation. *AIAA Journal* 13 (1975) 113–114
30. Gaube, E., Hofer, H., Müller, W.: Kanalrohre aus Polyäthylen hart, Meßergebnisse über die Zeitabhängigkeit des Erddrucks und der Verformung. *Kunststoffe* 61 (1971) 765–769
31. Horst, H.: Zum Stabilitätsproblem sandgebetteter Kunststoffrohre. Vortrag anlässlich des Niedersächs. Mechanik-Kolloquiums in Hannover, 15.5.1976
32. Draft I.S.O. Standard: Method of Calculation for Flexible Pipes, Installed Underground. ISO/TC 138, Aug. 1974
33. Lauer, H.J.: Statische Berechnung von erdverlegten Entwässerungskanälen aus PVC hart und PE hart. *3R International* 17 (1978) 120–132