HTW Chur
H. Knoll

HS 2011
Musterlösungen

bgMat3: Differentialgleichungen: Lösungen

Definition der DGL und Richtungsfeld

Aufgabe Abschnitt 1/1

Zeigen Sie durch Differenzieren und Einsetzen, dass die Funktion $y = \frac{Cx}{1+x}$ die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung $x(1+x)y' - y = 0$ darstellt ($C \in \mathbb{R}$). Wie lautet die durch den Punkt $P(1;8)$ gehende Lösungskurve?

Lösung:
Man bildet die 1. Ableitung der angegebenen Lösungsfunktion und setzt $y(x)$ sowie $y'(x)$ in die DGL ein.
$y = \frac{Cx}{1+x}$
$y' = \frac{C\cdot(1+x) - Cx\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{C}{(1+x)^2}$

$x(1+x)y' - y = 0$
$x(1+x)\cdot\frac{C}{(1+x)^2} - \frac{Cx}{1+x} = 0$
$\frac{Cx}{1+x} - \frac{Cx}{1+x} = 0$
Unabhängig von der Wahl von x erhält man eine wahre Aussage, d.h. die DGL wird durch die vorgeschlagene Lösung identisch erfüllt.

Aufgabe Abschnitt 2/1

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der jeweiligen Differentialgleichung 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie, eine Lösungskurve einzuzeichnen. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

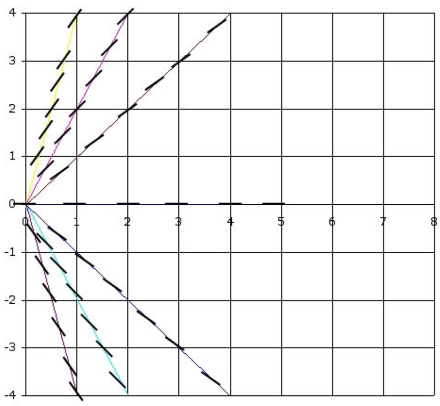
a) $y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$, $x > 0$

b) $y' = y$

Lösung:
Isoklinen verbinden die Punkte, an denen die Lösungskurven dieselbe Steigung haben. Man wählt einen Wert für die Steigung und kann dann die Gleichung der Isokline bestimmen.

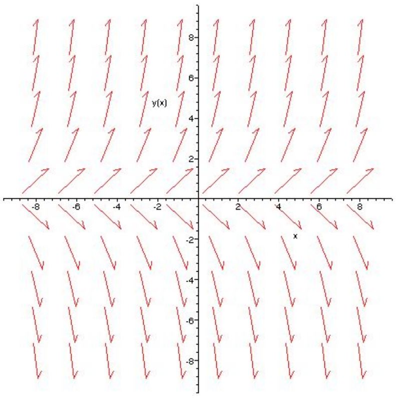
a) $y' = m = \frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}$
$y = 2mx$
Nun werden für m konkrete Werte eingesetzt und die jeweiligen Isoklinen bestimmt.

m	$y = 2mx$
0	$y = 0$
1	$y = 2x$
2	$y = 4x$
-1	$y = -2x$
-2	$y = -4x$
$\frac{1}{2}$	$y = x$
$-\frac{1}{2}$	$y = -x$



b) $y' = m = y$
$y = m$
Nun werden für m konkrete Werte eingesetzt und die jeweiligen Isoklinen bestimmt.

m	$y = m$
0	$y = 0$
1	$y = 1$
2	$y = 2$
-1	$y = -1$
-2	$y = -2$
$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{2}$



Aufgabe Aufgaben zum Richtungsfeld

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der DGL 1. Ordnung mit Hilfe von Isoklinen und versuchen Sie eine Lösungskurve einzuzeichnen:

a) $y' = 1 - y$

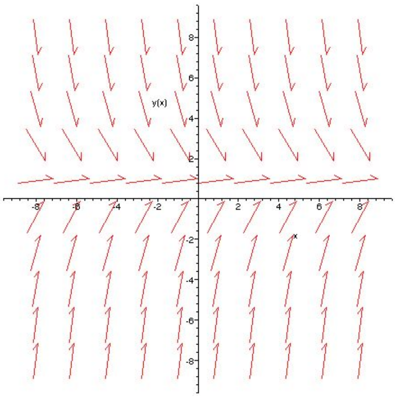
b) $y' = x + y$

c) $y' = xy$

Lösung:

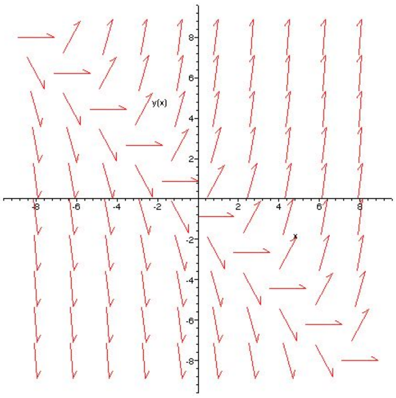
a) $y' = m = 1 - y$
$y = 1 - m$
Nun werden für m konkrete Werte eingesetzt und die jeweiligen Isoklinen bestimmt.

m	$y = 1 - m$
0	$y = 1$
1	$y = 0$
2	$y = -1$
-1	$y = 2$
-2	$y = 3$
$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$y = \frac{3}{2}$



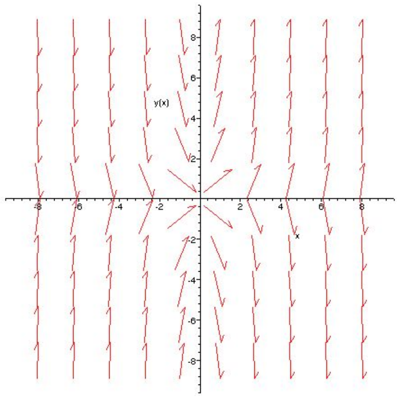
b) $y' = m = x + y$
$y = 1 - m$
Nun werden für m konkrete Werte eingesetzt und die jeweiligen Isoklinen bestimmt.

m	$y = m - x$
0	$y = -x$
1	$y = 1 - x$
2	$y = 2 - x$
-1	$y = -1 - x$
-2	$y = -2 - x$
$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2} - x$
$-\frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{2} - x$



c) $y' = m = xy$
$y = 1 - m$
Nun werden für m konkrete Werte eingesetzt und die jeweiligen Isoklinen bestimmt.

m	$y = \frac{m}{x}$
0	$y = 0$
1	$y = \frac{1}{x}$
2	$y = \frac{2}{x}$
-1	$y = -\frac{1}{x}$
-2	$y = -\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2x}$
$-\frac{1}{2}$	$y = -\frac{1}{2x}$



Trennung der Variablen

Aufgabe Abschnitt 2/4a

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$x^2 y' = y^2$

Lösung:
Umformen auf y': $y' = \frac{y^2}{x^2}$

1. Differential $\quad dy = y'dx = \frac{y^2}{x^2} \cdot dx$
2. Trennen $\quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$
3. Integrieren $\quad \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$

$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + C$
$\frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} + C$
$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - C = \frac{1-Cx}{x}$
$y = \frac{x}{1-Cx}$ mit $C \in \mathbb{R}$

Aufgabe Abschnitt 2/4b

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$y'(1 + x^2) = xy$

Lösung:
Umformen auf y': $y' = \frac{xy}{(1+x^2)}$

1. Differential $\quad dy = y'dx = \frac{xy}{(1+x^2)} \cdot dx$
2. Trennen $\quad \frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2} dx$
3. Integrieren $\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$\ln|y| = \int \frac{x}{z} \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|z| + \ln|C| = \ln\sqrt{1+x^2} + \ln|C|$

$z = 1 + x^2$
$dz = 2xdx$
$dx = \frac{dz}{2x}$

$y = C \cdot \sqrt{1+x^2}$ mit $C \in \mathbb{R}$

Aufgabe Abschnitt 2/4c

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$y' = (1 - y)^2$

Lösung:

1. Differential $dy = y'dx = (1-y)^2 \cdot dx$
2. Trennen $\frac{dy}{(1-y)^2} = dx$
3. Integrieren $\int \frac{dy}{(1-y)^2} = \int dx$

$\frac{1}{1-y} = x + C$
$1 - y = \frac{1}{x+C}$
$y = 1 - \frac{1}{x+C} = \frac{x+C-1}{x+C}$

Nebenrechnung:
$\int \frac{dy}{(1-y)^2} dx = \int \frac{-dz}{z^2} = -\int z^{-2} dz = -\frac{z^{-1}}{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-y}$
$z = 1 - y$
$dz = -dy$
$dy = -dz$

Aufgabe Abschnitt 2/5a

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$y' + (\cos x) \cdot y = 0, \qquad y(\pi/2) = 2\pi$

Lösung:
Umformen auf y': $y' = -\cos(x) \cdot y$

1. Differential $dy = y'dx = -\cos(x) \cdot y \cdot dx$
2. Trennen $\frac{dy}{y} = -\cos(x)dx$
3. Integrieren $\int \frac{dy}{y} = -\int \cos(x)dx$

$\ln|y| = -\sin(x) + ln|C|$
$y = C \cdot e^{-\sin(x)}$

Anfangsbedingung: $y(\pi/2) = 2\pi$
$2\pi = Ce^{-\sin(\pi/2)} = C \cdot e^{-1} = \frac{C}{e}$
$C = 2\pi e$

$y_p = 2\pi e \cdot e^{-\sin(x)} = 2\pi \cdot e^{1-\sin(x)}$

Aufgabe Abschnitt 2/5b

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$x(x+1)y' = y, \qquad y(1) = \frac{1}{2}$

Lösung:
Umformen auf y': $y' = \frac{y}{x(x+1)}$

1. Differential $dy = y'dx = \frac{y}{x(x+1)} \cdot dx$
2. Trennen $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(x+1)}$
3. Integrieren $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x(x+1)}$

$\ln|y| = -\ln|\frac{x+1}{x}| + \ln|C|$
$y = \frac{Cx}{x+1}$

Anfangsbedingung: $y(1) = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} = \frac{C \cdot 1}{1+1} = \frac{C}{2}$
$C = 1$

$y_p = \frac{x}{x+1}$

Nebenrechnung:
$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A \cdot (x+1) + B \cdot x)}{x(x+1)}$
$x^1: \quad 0 = A + B$
$x^0: \quad 1 = B$
$B = 1$
$A = -1$

$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{-1 \cdot dx}{x} + \int \frac{1 \cdot dx}{x+1} = -\ln|x| + \ln|x+1| = \ln|\frac{x+1}{x}|$

Aufgabe Abschnitt2/5c

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Variablen:
$y^2y' + x^2 = 1, \qquad y(2) = 1$

Lösung:
Umformen auf y': $y' = \frac{1-x^2}{y^2}$

1. Differential $\quad dy = y'dx = \frac{1-x^2}{y^2} \cdot dx$
2. Trennen $\quad y^2dy = (1-x^2)dx$
3. Integrieren $\quad \int y^2dy = \int(1-x^2)dx$

$\frac{y^3}{3} = x - \frac{x^3}{3} + C$
$y^3 = 3x - x^3 + C_1$
$y = \sqrt[3]{3x - x^3 + C_1}$

Anfangsbedingung: $y(2) = 1$
$1 = \sqrt[3]{3 \cdot 2 - 2^3 + C_1}$
$1 = \sqrt[3]{6 - 8 + C_1}$
$1 = -2 + C_1$
$C_1 = 3$

$y_p = \sqrt[3]{3x - x^3 + 3}$

Aufgabe Abschnitt 2/6a

Lösen Sie das folgenden Anfangswertproblem:
$yy' = 2 \cdot e^{2x} \qquad$ mit $y(0) = 2$

Lösung:
Umformen auf: $y' = 2\frac{e^{2x}}{y}$

1. Differential $\quad dy = y'dx = 2\frac{e^{2x}}{y} \cdot dx$
2. Trennen $\quad ydy = 2e^{2x}dx$
3. Integrieren $\quad \int ydy = 2\int e^{2x}dx$

$\frac{y^2}{2} = 2 \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{2} + C$
$y^2 = 2 \cdot e^{2x} + C_1$
$y = \pm\sqrt{2e^{2x} + C_1}$

Anfangsbedingung:
$y(0) = 2$
$2 = \pm\sqrt{2 + C_1}$
$4 = 2 + C_1$
$C_1 = 2$

$y_p = \sqrt{2e^{2x} + 2}$

Aufgabe Abschnitt 2/8

Durch die Differentialgleichung 1. Ordnung $m\frac{dv}{dt} + kv = mg$ wird die Sinkgeschwindigkeit v eines Teilchens der Masse m in einer Flüssigkeit beschrieben (k: Reibungsfaktor; g: Erdbeschleunigung).

a) Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung $v = v(t)$ dieser Differentialgleichung durch *Trennung der Variablen*.

b) Wie lautet die *partikuläre* Lösung für den *Anfangswert* $v(0) = v_0$?

c) Welche Geschwindigkeit v_{max} kann das Teilchen *maximal* erreichen?

Lösung:

a) Die DGL wird zunächst auf $\dot{v}$ gelöst, um zu verifiziren, dass sie durch Separation lösbar ist.
$\dot{v} = \frac{mg-kv}{m}$

1. Differential $\quad dv = \dot{v}dt = \frac{mg-kv}{m} \cdot dt$
2. Trennen $\quad \frac{dv}{mg-kv} = \frac{1}{m}dt$
3. Integrieren $\quad \int \frac{dv}{mg-kv} = \int \frac{1}{m}dt$

$-\frac{1}{k}\ln|mg-kv| = \frac{1}{m} \cdot t + \ln|C|$
$\ln|mg-kv| = -\frac{k}{m} \cdot t + \ln|C_1|$
$mg - kv = C_1 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$
$kv = mg - C_1 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$
$v(t) = \frac{mg}{k} + C_2 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

Nebenrechnung:
$\int \frac{dv}{mg-kv} = \int \frac{-du}{ku} = -\frac{1}{k}\ln|u| = -\frac{1}{k}\ln|mg-kv|$
$u = mg - kv$
$du = -k \cdot dv$
$dv = -\frac{du}{k}$

b) Partikuläre Lösung für $v(0) = v_0$:
$v_0 = \frac{mg}{k} + C_2 \cdot e^0$
$C_2 = v_0 - \frac{mg}{k}$
$v_p(t) = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k}) \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

c) Maximale Geschwindigkeit:
Für relativ kleines v_0, für welches $v_0 < \frac{mg}{k}$ ist, ist C_2 negativ und das Geschwindigkeitsmaxiumum erhält man mit dem Grenzwert mit $t \to \infty$.
$v_{max} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k}) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{mg}{k}$

Wenn v_0 gross ist, sodass der Wert für C_2 positiv wird, ist die Maximalgeschwindigkeit natürlich v_0

Aufgabe Abschnitt 2/10

Ein Körper besitze zur Zeit $t = 0$ die Temperatur T_0 und werde in der Folgezeit durch vorbeiströmende Luft der konstanten Temperatur T_L *gekühlt* ($T_L < T_0$). Der *Abkühlungsprozess* wird dabei nach Newton durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L) \qquad (a > 0)$$

beschrieben (a: Konstante). Bestimmen Sie den *zeitlichen Verlauf* der Körpertemperatur T durch *Trennung der Variablen*. Welchen *Endwert* erreicht die Körpertemperatur?

Lösung:

1. Differential $\quad dT = \dot{T}dt = -a(T - T_L) \cdot dt$
2. Trennen $\quad \frac{dT}{T-T_L} = -a \cdot dt$
3. Integrieren $\quad \int \frac{dT}{T-T_L} = -\int a \cdot dt$

$\ln|T - T_L| = -at + \ln|C|$
$T - T_L = C \cdot e^{-at}$
$T = T_L + C \cdot e^{-at}$

Anfangsbedingung: $T(0) = T_0$
$T_0 = T_L + C \cdot e^0$
$C = T_0 - T_L$
$T_p = T_L + (T_0 - T_L) \cdot e^{-at}$

Endwert der Körpertemperatur:
Mit dem Grenzwert mit $t \to \infty$ erhält man den Endwert.
$T_\infty = \lim\limits_{t\to\infty}(T_L + (T_0 - T_L) \cdot e^{-at}) = T_L$

Aufgabe Abschnitt 2/7

Wir betrachten die folgende *chemische Reaktion*: Ein Atom vom Typ A vereinige sich mit einem Atom vom Typ B zu einem *Molekül* vom Typ AB:
A + B → AB. Die Anzahl der Atome vom Typ A bzw. B betrage zu Beginn der Reaktion (d. h. zur Zeit

$t = 0$) a bzw. b. Nach der Zeit t seien $x = x(t)$ Moleküle AB entstanden. Dann lässt sich die chemische Reaktion durch die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

beschreiben ($k > 0$: Konstante, vom Chemiker als *Geschwindigkeitskonstante* bezeichnet).

a) Lösen Sie diese Differentialgleichung für $a \neq b$ und den Anfangswert $x(0) = 0$.

b) Wann kommt die Reaktion zum Stillstand (unter der Annahme: $a > b$)?

Lösung:
Trennung der Variablen: $\dot{x} = k(a-x)(b-x)$

1. Differential $dx = \dot{x}dt = k(a-x)(b-x) \cdot dt$
2. Trennen $\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k \cdot dt$
3. Integrieren $\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k \cdot dt$

$\frac{1}{a-b} \ln|\frac{a-x}{b-x}| = kt + \ln|C|$
$\ln|\frac{a-x}{b-x}| = (a-b) \cdot kt + \ln|C_1|$
$\frac{a-x}{b-x} = C_1 \cdot e^{(a-b)kt}$
$a - x = (b-x) \cdot C_1 \cdot e^{(a-b)kt}$
$x \cdot (C_1 \cdot e^{(a-b)kt} - 1) = b \cdot C_1 \cdot e^{(a-b)kt} - a$
$x = \frac{b \cdot C_1 \cdot e^{(a-b)kt} - a}{C_1 \cdot e^{(a-b)kt} - 1}$

Nebenrechnung: Partialbruchzerlegung
$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{A(b-x)+B(a-x)}{(a-x)(b-x)} = \frac{Ab-Ax+Ba-Bx}{(a-x)(b-x)}$
Koeffizientenvergleich:
x^1: $0 = -A - B$
x^0: $1 = Ab + Ba$
$B = -A \quad \Rightarrow \quad 1 = Ab - Aa$
$1 = A(b-a)$
$A = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{a-b}$
$B = -A = \frac{1}{a-b}$
$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = -\frac{1}{a-b} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{a-b} \int \frac{dx}{b-x} =$
$= \frac{1}{a-b} \ln|a-x| - \frac{1}{a-b} \ln|b-x| = \frac{1}{a-b} \ln|\frac{a-x}{b-x}|$

Lineare DGL 1. Ordnung

Aufgabe Muster Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + 2y = 2\sin x$

Lösung:
1. homogene DGL:
$y' + 2y = 0$

Trennung der Variablen:
$y' = -2y$

1. Differential $dy = y'dx = -2ydx$
2. Trennen $\frac{dy}{y} = -2dx$
3. Integrieren $\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$

$\ln|y| = -2x + \ln|C|$
$y = C \cdot e^{-2x}$

Alternative Lösung: Exponentialansatz
$y = e^{\lambda x}$
$y' = \lambda e^{\lambda x}$
Einsetzen: $\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$
$\lambda + 2 = 0$
$\lambda = -2$
$y_h = C \cdot e^{-2x}$

2. Partikuläre Lösung:
$y' + 2y = 2\sin x$
Aufsuchen einer partikulären Lösung entsprechend der Störfunktion:
Ansatz: $y_p = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$
$y_p' = A\cos x - B\sin x$
Einsetzen:
$A\cos x - B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x$
Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{ll} \sin x: & -B + 2A = 2 \\ \cos x: & A + 2B = 0 \end{array}$$

$B = 2 - 2A \qquad \Rightarrow A + 2(2 - 2A) = 2$
$-3A + 4 = 2$
$A = \frac{2}{3}$
$B = 2 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$
$y_p = \frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$
Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p = C \cdot e^{-2x} + \frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{3} \cos x$

Biegelinie

Ein elastischer Stab liegt an den Enden auf und wird in der Mitte punktförmig belastet. Welche Form nimmt der Stab unter dieser Belastung an?

Lösung
Auf dem Blatt Biegelinie ist die Lösung für die linke Seite dargestellt. Für die rechte Seite soll die Lösung nun gefunden werden.

Es gilt: $y'' = -\frac{M(x)}{EJ}$
Nun gilt es $M_R(x)$ zu bestimmen. Der Punkt B wird nun als Drehpunkt verwendet.
$M_R(x) = -F(x - \frac{a}{2}) + F_A \cdot x = -Fx + F\frac{a}{2} + \frac{F}{2}x = \frac{F}{2}(a - x)$