
ÜBUNG

MASCHINENELEMENTE

Achsen und Wellen:
Verformung durch Biege- und Torsionsbeanspruchung

Stephan Voigt, M.Eng.

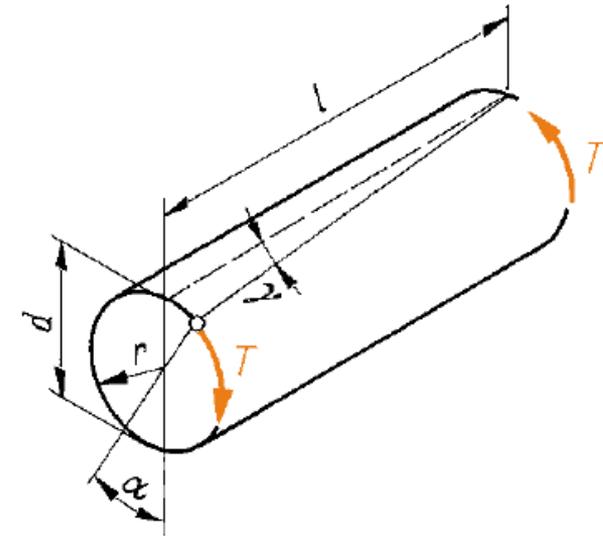
Agenda

1. Verformung durch Torsionsbeanspruchung
2. Verformung durch Biegebeanspruchung
 - 2.1 Differentialgleichung der Biegelinie
 - 2.2 Satz von Castigliano
 - 2.3 Verfahren von Mohr
3. Beispiel

1. Verformung durch Torsionsbeanspruchung

- Die Verdrehung einer Welle infolge einer Torsionsbeanspruchung ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{T \cdot L_T}{G \cdot I_p} \quad [\varphi] = \text{rad}$$



- Dabei ist

- L_T die verdrehte Länge (Abstand von Torsionsein- bis -ausleitung)
→ Mittenabstand der Maschinenteile, die das Torsionsmoment übertragen
- G Schubmodul, $G \approx 8 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ für Stahl
- I_p polares Flächenträgheitsmoment

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$$

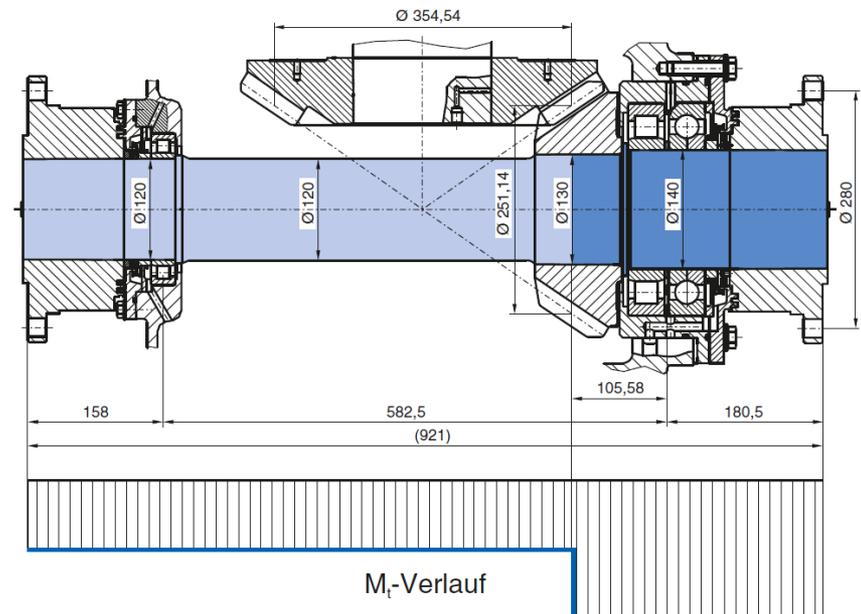
- In der Regel liegen abgesetzte Wellen vor, so dass der Verdrehwinkel entsprechend abschnittsweise berechnet und aufaddiert werden kann:

$$\varphi_{\text{ges}} = \varphi_1 + \dots + \varphi_n = \frac{T_1 \cdot L_{T1}}{G_1 \cdot I_{p1}} + \dots + \frac{T_n \cdot L_{Tn}}{G_n \cdot I_{pn}}$$

- Da Drehmoment und Schubmodul (in der Regel) konstant sind, folgt:

$$\varphi_{\text{ges}} = \frac{T}{G} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{L_{Tk}}{I_{pk}} \right)$$

- Beispiel eines nicht konstanten Drehmomentenverlaufs (Schlecht)



- Zulässige Werte hinsichtlich der Verdrehung von Wellen werden bezogen auf die Wellenlänge, was der Verdrillung entspricht:

$$\delta = \frac{\varphi}{L_T}$$

- Üblich sind

$$\delta_{zul} = (4 \dots 9) \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{m}} \approx (0,25 \dots 0,5)^\circ \cdot \frac{1}{\text{m}}$$

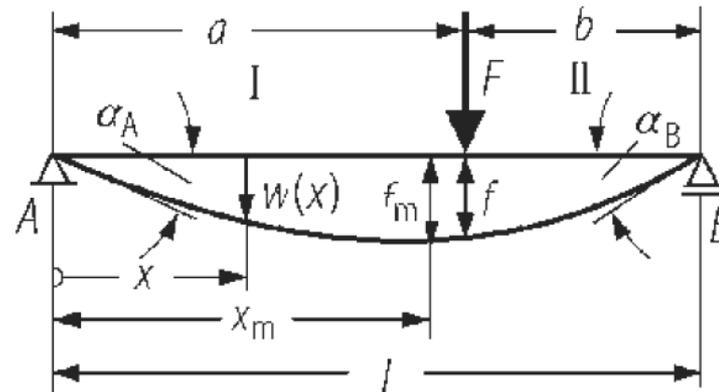
- Kleinere Werte für Transmissionswellen,
größere für Getriebe, Fahrwerks- und sonstige Wellen.



2. Verformung durch Biegebeanspruchung

2.1 Differentialgleichung der Biegelinie

- Beispiel: Durchbiegung eines zweifach gelagerten Balkens unter Einzellast

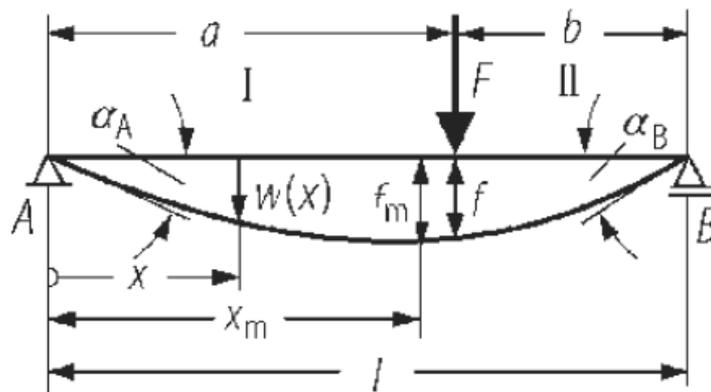


- Ansatz ist die Differentialgleichung der Biegelinie 2. Ordnung (Herleitung: siehe z.B. Dankert)

$$EI \cdot f'' = -M_b$$

▪ Vorgehensweise zur Berechnung der größten Durchbiegung:

- Bestimmung der Lagerkräfte und des Biegemomentes
- Integration von $EI \cdot f'' = -M_b$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen zur Ermittlung der Integrationskonstanten
- *Ergebnis*



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a: \\ w_{\text{I}}(x) = \frac{Fab^2}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{b}\right) \frac{x}{l} - \frac{x^3}{abl} \right] \\ a \leq x \leq l: \\ w_{\text{II}}(x) = \frac{Fa^2b}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right) \frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{abl} \right] \end{array} \right.$$

I_y ist ebenfalls eine Funktion von x !!

- Da in der Regel (insbesondere bei Wellen) mehr als nur eine Kraft angreifen, müssen die für jede äußere Last (Kraft oder Moment) bestimmten Verformungen überlagert werden.

→ Superpositionsprinzip

- Hilfreich sind dann entsprechende Tabellenwerke, z.B. Dubbel.

- Alternativ dazu können auch numerische Methoden (z.B. Mathematica) zum Einsatz kommen.
→ vgl. Beispiel

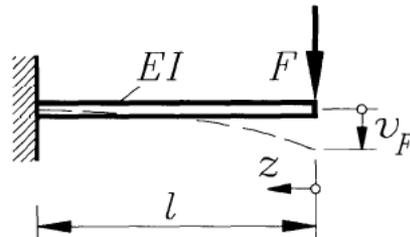
Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie	Durchbiegung	Neigungswinkel
	$0 \leq x \leq l/2:$ $w(x) = \frac{Fl^3}{48EI_y} \left[3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f_m = \frac{Fl^3}{48EI_y}$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{F \cdot l^2}{16EI_y}$
	$0 \leq x \leq a:$ $w_1(x) = \frac{Fab^2}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{b}\right)\frac{x}{l} - \frac{x^3}{abl} \right]$ $a \leq x \leq l:$ $w_{II}(x) = \frac{Fa^2b}{6EI_y} \left[\left(1 + \frac{l}{a}\right)\frac{l-x}{l} - \frac{(l-x)^3}{abl} \right]$	$f = \frac{Fa^2b^2}{3EI_y l}$ $a > b: f_m = \frac{Fb\sqrt{(l^2 - b^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_y l}$ $\text{in } x_m = \sqrt{(l^2 - b^2)/3}$ $a < b: f_m = \frac{Fa\sqrt{(l^2 - a^2)^3}}{9\sqrt{3}EI_y l}$ $\text{in } x_m = l - \sqrt{(l^2 - a^2)/3}$	$\alpha_A = \frac{Fb(l+b)}{6EI_y l}$ $\alpha_B = \frac{Fa(l+a)}{6EI_y l}$
	$w(x) = \frac{Ml^2}{6EI_y} \left[2\frac{x}{l} - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f = \frac{Ml^2}{16EI_y} \text{ in } x = \frac{l}{2}$ $f_m = \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI_y} \text{ in } x_m = l - \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha_A = \frac{Ml}{3EI_y}$ $\alpha_B = \frac{Ml}{6EI_y}$
	$0 \leq x \leq l/2:$ $w_I = \frac{Ml^2}{24EI_y} \left[-\frac{x}{l} + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$ $l/2 \leq x \leq l:$ $w_{II} = \frac{Ml^2}{24EI_y} \left[-3 + 11\frac{x}{l} - 12\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$	$f_m = f_{mII} = \frac{Ml^2}{72\sqrt{3}EI_y}$ $\text{in } x_{mI} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \text{ bzw.}$ $\text{in } x_{mII} = l \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$	$\alpha_A = \alpha_B = \frac{Ml}{24EI_y}$

2.2 Satz von Castigliano

- Die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der äußeren Kraft liefert die Verschiebung des Kraftangriffspunktes (vgl. z.B. Dankert)

$$f = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \sum_k \left[\int_{l_k} \frac{F_{N,k}}{EA} \cdot \frac{\partial F_{N,k}}{\partial F} dz + \int_{l_k} \frac{M_{b,k}}{EI} \cdot \frac{\partial M_{b,k}}{\partial F} dz + \dots \right]$$

- Beispiel: Kragträger

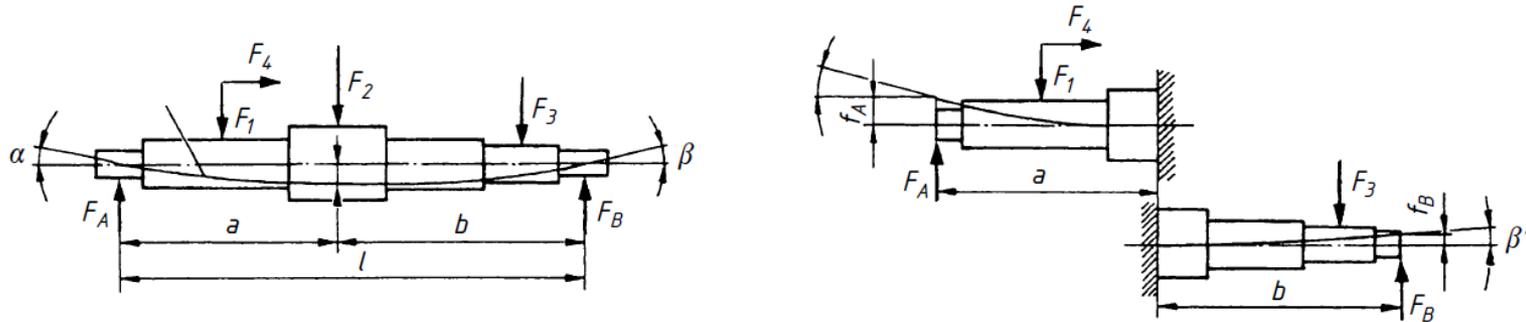


$$M_b(z) = -F \cdot z$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial F} = -z$$

$$v_F = \frac{\partial W_i}{\partial F} = \int_0^l \frac{M_b}{EI} \cdot \frac{\partial M_b}{\partial F} dz = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^l F z^2 dz = \frac{F l^3}{3 EI}$$

- Zur Nutzbarmachung für die Berechnung einer Welle wird diese gedanklich in zwei eingespannte Freiträger geteilt:



- Bereits integrierte Ansätze für typische Belastungsfälle liefern dann die entsprechenden Einzelverformungen und Neigungswinkel, die dann wiederum überlagert werden müssen (siehe Vorlesung Prof. Gruss, Decker).

1		$\beta_{AA} = \frac{F_A}{2E} \left(\frac{l_1^2}{I_{b1}} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_{b2}} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_{b3}} \right)$	(15.27)
		$f_{AA} = \frac{F_A}{3E} \left(\frac{l_1^3}{I_{b1}} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_{b2}} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_{b3}} \right)$	(15.28)
2		$\beta_{A1} = \frac{F_1}{2E} \left(\frac{l_2^2}{I_{b2}} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_{b3}} \right)$	(15.29)
		$f_{A1} = \frac{F_1}{3E} \left(\frac{l_2^3}{I_{b2}} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_{b3}} \right) + \beta_{A1} \cdot l_i$	(15.30)
3		$\beta_{A1} = \frac{F_1}{2E} \left(\frac{l_1^2 - l_i^2}{I_{b1}} + \frac{l_2^2 - l_1^2}{I_{b2}} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{I_{b3}} \right)$	(15.31)
		$f_{A1} = \frac{F_1}{3E} \left(\frac{l_1^3 - l_i^3}{I_{b1}} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{I_{b2}} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{I_{b3}} \right) - \beta_{A1} \cdot l_i$	(15.32)

2.3 Verfahren von Mohr

- Das Verfahren von Mohr beruht auf folgender Analogie:

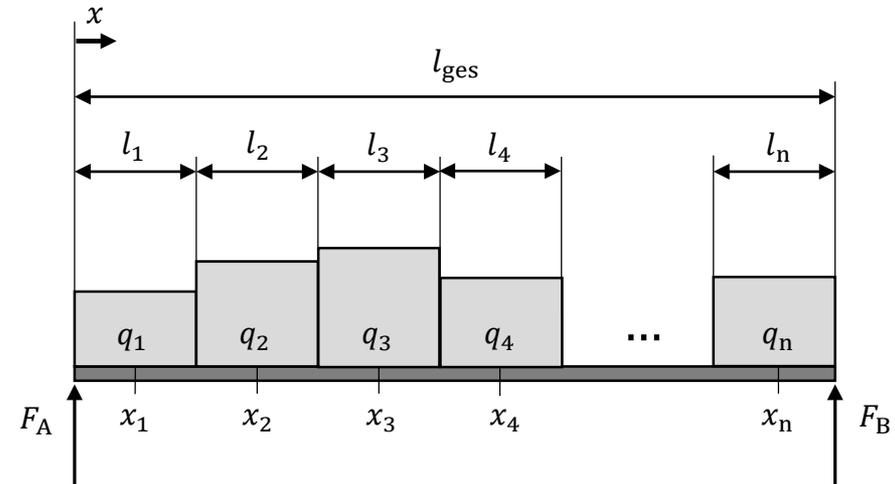
Streckenlast	$q = q(x)$	$f'' = -\frac{M_b(x)}{EI_y(x)}$	Krümmung
Querkraft	$F_Q(x) = -\int q(x) dx + C_1$	$f' = -\int \frac{M_b(x)}{EI_y(x)} dx + C_3$	Neigung
Biegemoment	$M_b(x) = \int F_Q(x) dx + C_2$	$f = -\iint \frac{M_b(x)}{EI_y(x)} dx dx + C_3x + C_4$	Durchbiegung
	Schnittgrößen	Verformungsgrößen	

Anstatt zu integrieren erfolgt jedoch die Anwendung des Schnittprinzips!

▪ Vorgehensweise bei den Schnittgrößen

- Ermittlung der Lagerkraft F_A

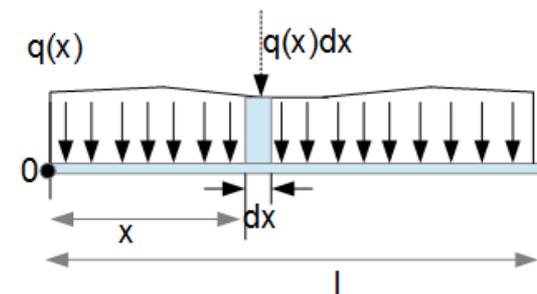
$$0 = F_A \cdot l_{\text{ges}} - q_1 \cdot l_1 \cdot (l_{\text{ges}} - x_1) - q_2 \cdot l_2 \cdot (l_{\text{ges}} - x_2) - \dots - q_n \cdot l_n \cdot (l_{\text{ges}} - x_n)$$



$$F_A = \frac{1}{l_{\text{ges}}} \cdot [q_1 \cdot l_1 \cdot (l_{\text{ges}} - x_1) + q_2 \cdot l_2 \cdot (l_{\text{ges}} - x_2) + \dots + q_n \cdot l_n \cdot (l_{\text{ges}} - x_n)]$$

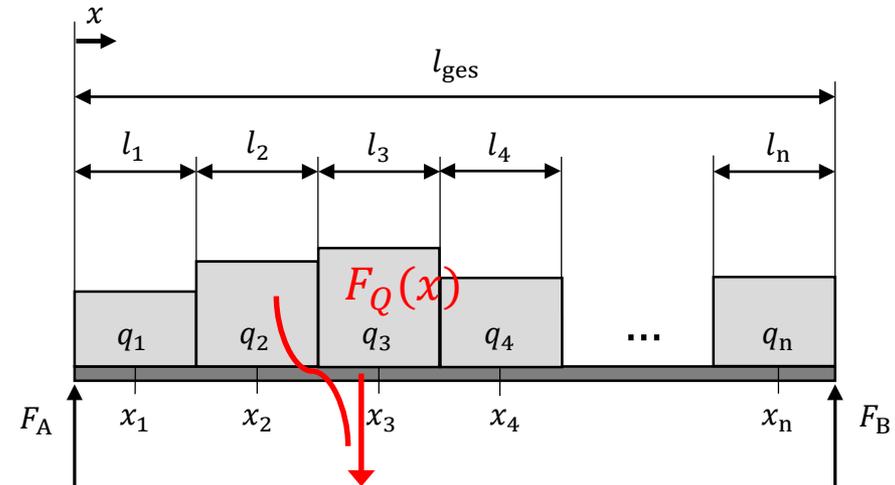
- Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ und $l_k \rightarrow dx$ liefert für beliebige Streckenlast $q(x)$:

$$F_A = \frac{1}{l_{\text{ges}}} \cdot \int_0^{l_{\text{ges}}} q(x) (l_{\text{ges}} - x) dx$$



- Ermittlung der Querkraft $F_Q(x)$

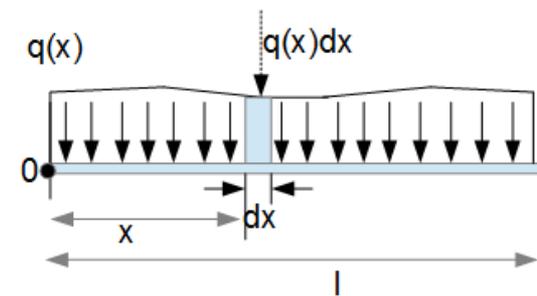
$$0 = F_Q(x) - F_A + q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot l_2 - \dots$$



$$F_Q(x) = F_A - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot l_2 - \dots = F_A - \sum_{k \leq x} q_k \cdot l_k$$

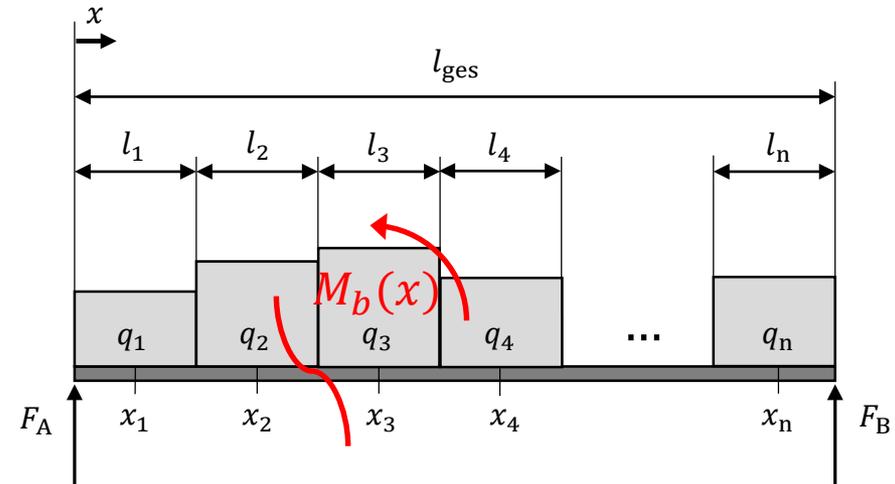
- Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ und $l_k \rightarrow ds$ liefert für beliebige Streckenlast $q(x)$:

$$F_Q(x) = F_A - \int_0^x q(s) ds$$



- Ermittlung des Biegemomentes $M_b(x)$

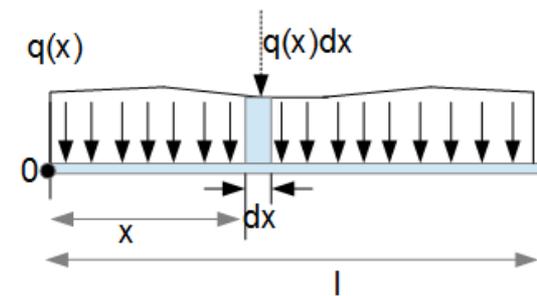
$$0 = M_b(x) - F_A \cdot x + q_1 \cdot l_1 \cdot (x - x_1) - q_2 \cdot l_2 \cdot (x - x_2) - \dots$$



$$M_b(x) = F_A \cdot x - q_1 \cdot l_1 \cdot (x - x_1) - \dots = F_A \cdot x - \sum_{k \leq x} q_k \cdot l_k \cdot (x - x_k)$$

- Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ und $l_k \rightarrow ds$ liefert für beliebige Streckenlast $q(x)$:

$$M_b(x) = F_A \cdot x - \int_0^x q(s) (x - s) ds$$



▪ Vorgehensweise bei Verformungsgrößen

- Infolge der bereits aufgezeigten Analogie zwischen Schnitt- und Verformungsgrößen, lassen sich Neigung und Biegung exakt wie Querkraft und Biegemoment berechnen.
- Dazu wird im Folgenden die Streckenlast $q(x)$ durch den Term

$$\frac{M_b(x)}{I_y(x)} = q_{\text{ers}}(x) \quad \text{„Ersatzstreckenlast“}$$

ersetzt.

- Analog zu den Schnittgrößen wird damit zunächst eine „Ersatzkraft“ F_{Aers} und anschließend eine „Ersatz-Querkraft“ sowie ein „Ersatz-Biegemoment“ ermittelt. Dabei gilt:

„Ersatz-Querkraft“ = Neigung

„Ersatz-Biegemoment“ = Durchbiegung

- Überblick der Berechnungsgrößen

Verformungsgrößen

Ersatzlagerkraft

$$F_{A_{\text{ers}}} = \frac{1}{l_{\text{ges}}} \cdot \int_0^{l_{\text{ges}}} \frac{M_b(x)}{I_y(x)} (l_{\text{ges}} - x) dx$$

Ableitung der Biegelinie (Neigung)

$$f'(x) = \frac{1}{E} \cdot \left(F_{A_{\text{ers}}} - \int_0^x \frac{M_b(s)}{I_y(s)} ds \right)$$

Biegelinie

$$f(x) = \frac{1}{E} \cdot \left(F_{A_{\text{ers}}} \cdot x - \int_0^x \frac{M_b(s)}{I_y(s)} (x - s) ds \right)$$

Schnittgrößen

Lagerkraft

$$F_A = \frac{1}{l_{\text{ges}}} \cdot \int_0^{l_{\text{ges}}} q(x) (l_{\text{ges}} - x) dx$$

Querkraftverlauf

$$F_Q(x) = F_A - \int_0^x q(s) ds$$

Biegemomentenverlauf

$$M_b(x) = F_A \cdot x - \int_0^x q(s) (x - s) ds$$

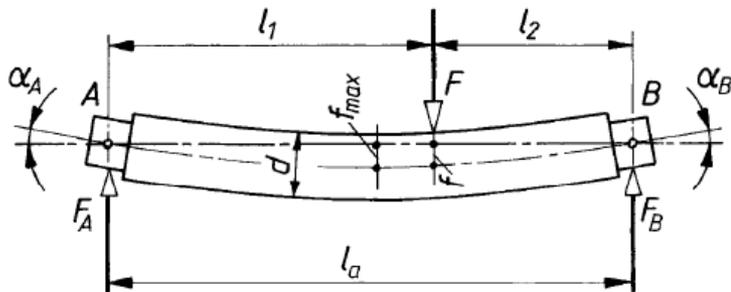
• Relevante Ergebnisse und zul. Werte

- Größte Durchbiegung

$$f_{\max} = f(x_0) \quad \text{mit} \quad f'(x_0) = 0$$

- Neigung an den Lagerstellen

$$\alpha_A = f'(x_A) \quad \text{und} \quad \alpha_B = f'(x_B)$$



Wellen und Achsen allgemein, Maximalwert bezogen auf Stützlänge (Biegung)	$f_{\max} \approx 0,33 \text{ mm/m}$
Wellen allgemein, Maximalwert bezogen auf Verdrilllänge (Verdrehung)	$\delta_{\max} \approx 0,25^\circ/\text{m}$
Wellen und Achsen im allgemeinen Maschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,3 \text{ mm/m}$
Wellen und Achsen im Werkzeugmaschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,2 \text{ mm/m}$
Wellen und Achsen im Landmaschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,5 \text{ mm/m}$
Lagerabstand bei gegebenem Wellendurchmesser d (z.B. bei Fahrantrieben für Laufkrane bzw. vergleichbaren Antrieben)	$l = (300 \dots 400) \cdot \sqrt{d}$
Wellen von Elektromotoren (x_L – Luftspalt)	$f_{\max} \approx 0,2 \dots 0,3 \cdot x_L$
Gleitlager, einstellbar	$\tan \beta_{\max} \approx 10 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 3')$
Gleitlager, nicht einstellbar	$\tan \beta_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 1')$
Wälzlager, (Radial-) Rillenkugellager	$\tan \beta_{\max} \approx 10 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 3')$
Wälzlager, (Radial-) Zylinderrollenlager	$\tan \beta_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,6')$
Wälzlager, (Radial-) Pendelrollenlager	$\beta_{\max} \approx 2^\circ$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle (m_n – Normalmodul)	$f_{\max} \approx 0,005 \cdot m_n$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle, ungehärtete Zahnräder	$\tan \beta_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,6')$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle, gehärtete Zahnräder	$\tan \beta_{\max} \approx 1 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,3')$
Industriegetriebe für schwere Anwendungen, Modul $m = 5$ oder Zahnbreite $b = 50 \text{ mm}$, DIN-Qualität = 7	$\tan \beta_{\max} \approx 4 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 1,2')$
Industriegetriebe für schwere Anwendungen, Modul $m > 5$ oder Zahnbreite $b > 50 \text{ mm}$, DIN-Qualität > 7	$\tan \beta_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \approx (\beta_{\max} \approx 5')$
Schneckenwelle, Maximalwert an Eingriffsstelle (d_m – Mittenkreisdurchmesser der Schnecke)	$f_{\max} \approx 0,001 \cdot d_m$

- Bei einer Biegung in zwei Ebenen – wie sie üblicherweise bei Getriebewellen vorliegt – sind die dargelegten Berechnungen für beide Ebenen durchzuführen. Die resultierenden Werte für Durchbiegung und Neigung ergeben sich dann aus der vektoriellen Addition der Einzelwerte (je Ebene).
 - Resultierende Durchbiegung

$$f_{\text{res}} = \sqrt{f_{\text{xz}}^2 + f_{\text{yz}}^2}$$

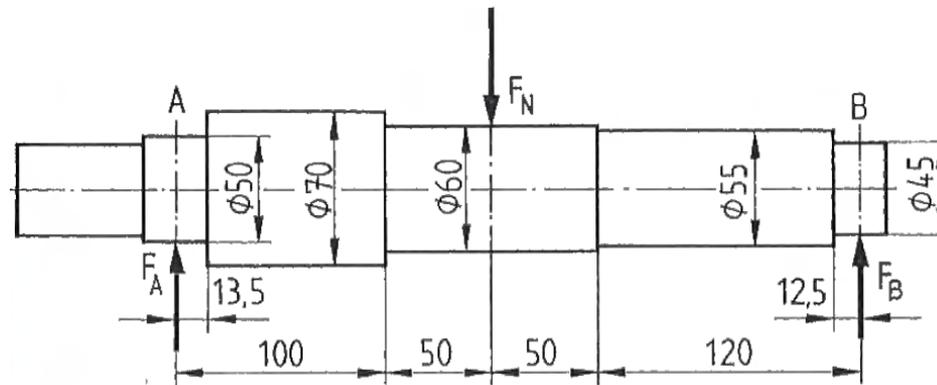
- Resultierender Neigungswinkel

$$\alpha_{\text{res}} = \sqrt{\alpha_{\text{xz}}^2 + \alpha_{\text{yz}}^2}$$

3. Beispiel

3.1 Anwendung des Mohrschen Verfahrens mittels *MathCAD*

- Für die dargestellte Getriebewelle sind die größte Durchbiegung und die Neigungswinkel der Lagerstellen zu bestimmen. Dabei ist $F_N = 10$ kN.

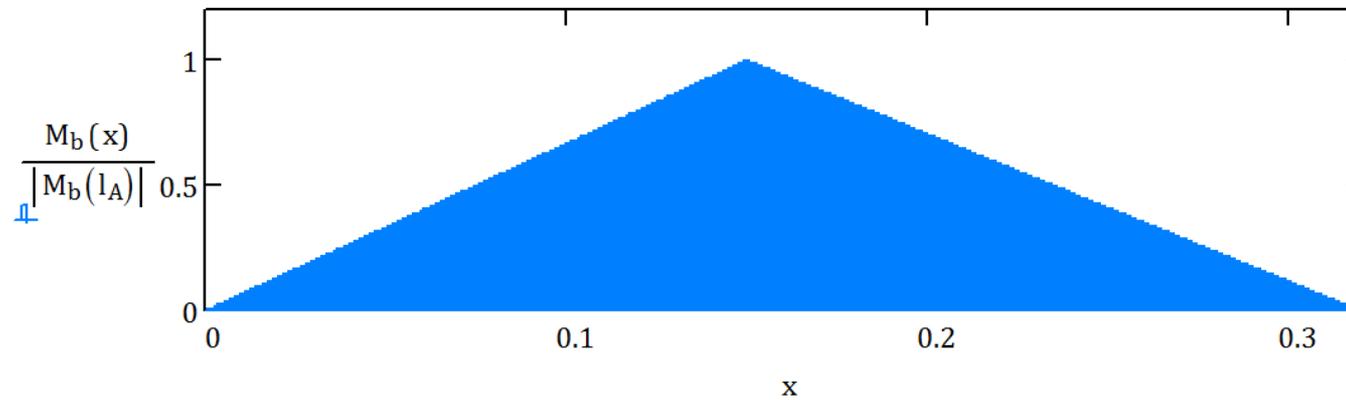


- Die Geometrie der Welle ist durch folgende Vektoren gegeben:

$$d_{\text{vec}} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 60 \\ 55 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

$$L_{\text{vec}} = \begin{pmatrix} 13,5 \\ 100 \\ 200 \\ 307,5 \\ 320 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

- Verlauf des Biegemomentes



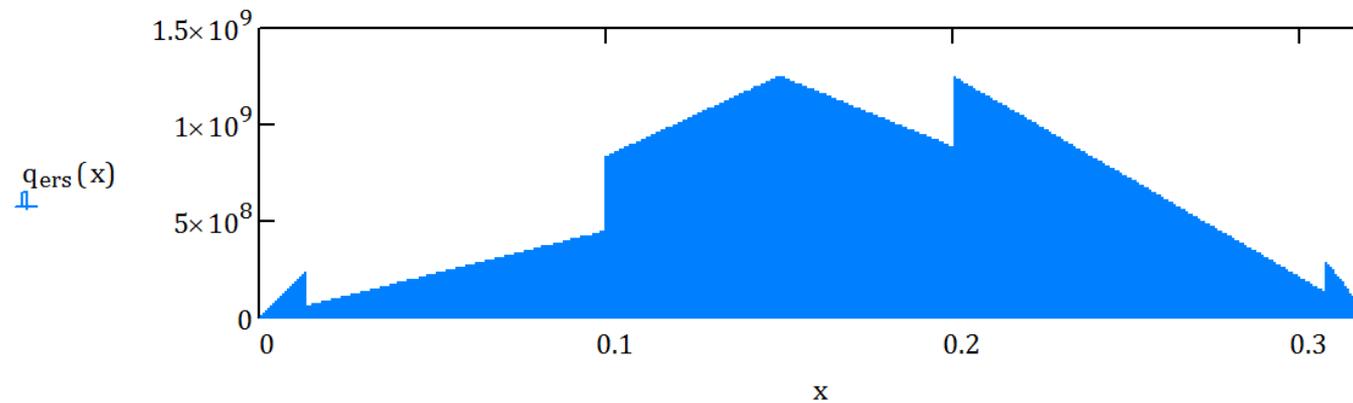
- Definition der Funktion $d(x)$

```

d(x) := | i ← 0
        | while x > Lveci
        |   | i ← i + 1
        |   | break if i = zeilen(Lvec)
        | dveci
  
```

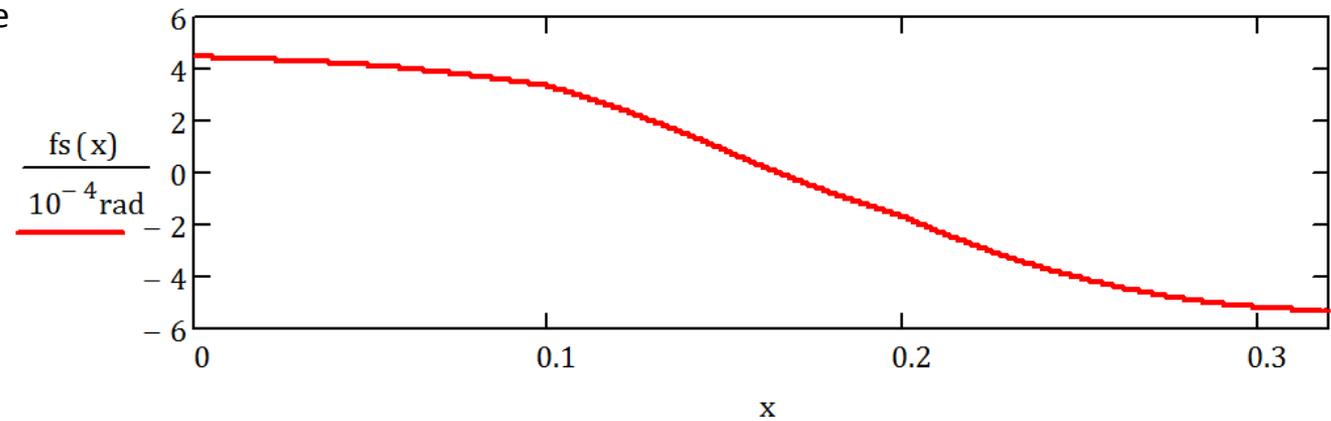
- „Ersatzbelastung“

$$q_{\text{ers}}(x) = \frac{M_b(x)}{I_y(x)} \quad \text{mit} \quad I_y(x) = \frac{\pi}{64} \cdot d(x)^4$$

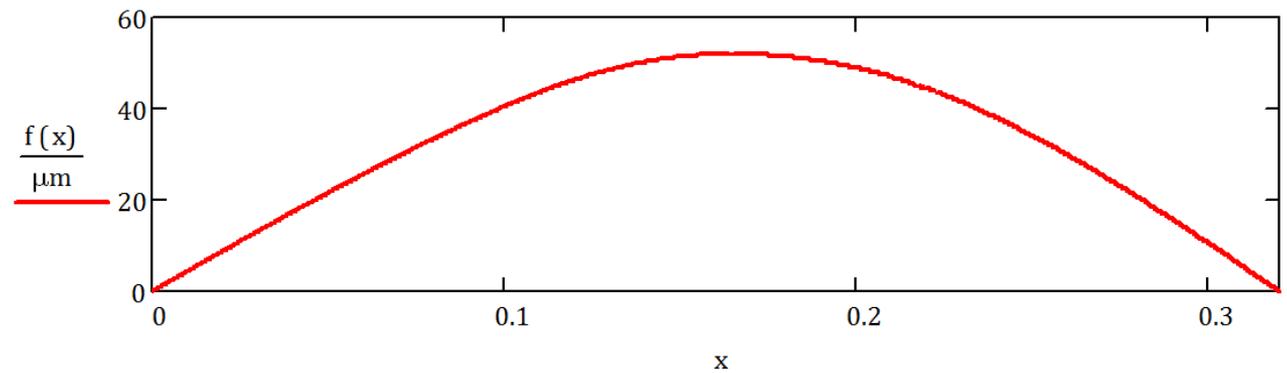


- Nach Ermittlung der Ersatzkraft folgt für Neigung und Biegung:

- Anstieg der Biegelinie
(Neigung)



- Biegelinie



Ergebnisse

Größte Durchbiegung

$$f_{\max} = f(x_0) = 52 \mu\text{m}$$

$$\frac{f_{\max}}{L_{\text{ges}}} = 0,163 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$$

mit

$$x_0 = 165 \text{ mm}$$

Neigung an den Lagerstellen

$$\alpha_A = 0,026^\circ$$

$$\tan \alpha_A = 4,4 \cdot 10^{-4}$$

und

$$\alpha_B = -0,03^\circ$$

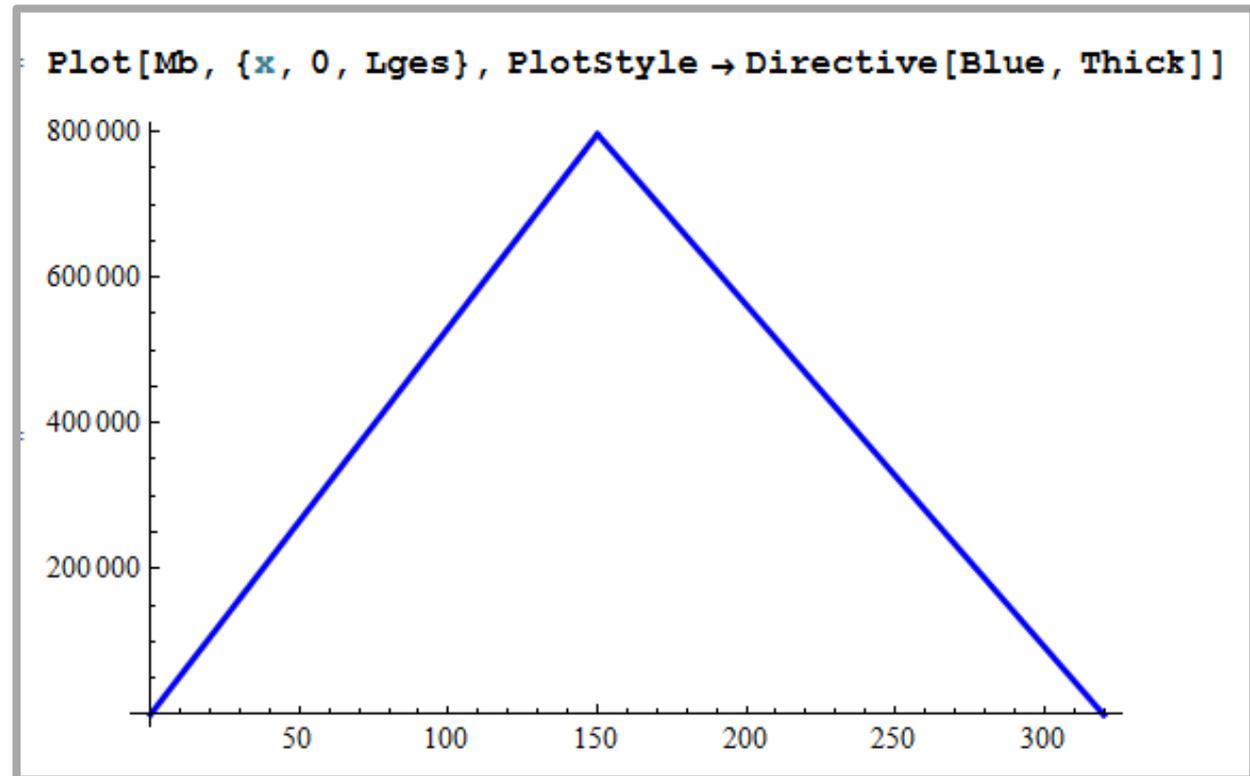
$$\tan \alpha_B = -5,3 \cdot 10^{-4}$$

Wellen und Achsen allgemein, Maximalwert bezogen auf Stützlänge (Biegung)	$f_{\max} \approx 0,33 \text{ mm/m}$
Wellen allgemein, Maximalwert bezogen auf Verdrilllänge (Verdrehung)	$\delta_{\max} \approx 0,25^\circ/\text{m}$
Wellen und Achsen im allgemeinen Maschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,3 \text{ mm/m}$
Wellen und Achsen im Werkzeugmaschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,2 \text{ mm/m}$
Wellen und Achsen im Landmaschinenbau	$f_{\text{zul}} \approx 0,5 \text{ mm/m}$
Lagerabstand bei gegebenem Wellendurchmesser d (z.B. bei Fahrtrieben für Laufkrane bzw. vergleichbaren Antrieben)	$l = (300 \dots 400) \cdot \sqrt{d}$
Wellen von Elektromotoren (x_L – Luftspalt)	$f_{\max} \approx 0,2 \dots 0,3 \cdot x_L$
Gleitlager, einstellbar	$\tan \beta_{\max} \approx 10 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 3')$
Gleitlager, nicht einstellbar	$\tan \beta_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 1')$
Wälzlager, (Radial-) Rillenkugellager	$\tan \beta_{\max} \approx 10 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 3')$
Wälzlager, (Radial-) Zylinderrollenlager	$\tan \beta_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,6')$
Wälzlager, (Radial-) Pendelrollenlager	$\beta_{\max} \approx 2^\circ$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle (m_n – Normalmodul)	$f_{\max} \approx 0,005 \cdot m_n$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle, ungehärtete Zahnräder	$\tan \beta_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,6')$
Wellen mit Zahnrad, Maximalwert an Eingriffsstelle, gehärtete Zahnräder	$\tan \beta_{\max} \approx 1 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 0,3')$
Industriegetriebe für schwere Anwendungen, Modul $m = 5$ oder Zahnbreite $b = 50 \text{ mm}$, DIN-Qualität = 7	$\tan \beta_{\max} \approx 4 \cdot 10^{-4} \approx (\beta_{\max} \approx 1,2')$
Industriegetriebe für schwere Anwendungen, Modul $m > 5$ oder Zahnbreite $b > 50 \text{ mm}$, DIN-Qualität > 7	$\tan \beta_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^{-3} \approx (\beta_{\max} \approx 5')$
Schneckenwelle, Maximalwert an Eingriffsstelle (d_m – Mittenkreisdurchmesser der Schnecke)	$f_{\max} \approx 0,001 \cdot d_m$

3.2 Anwendung der Differentialgleichung der Biegelinie mittels *Mathematica*

- Gegebene Größen und Biegemomentenverlauf

```
FN = 10 000;  
FA = 5310;  
FB = 4690;  
Lges = 320;  
lA = 150;  
lB = 170;  
Est = 210 000;
```



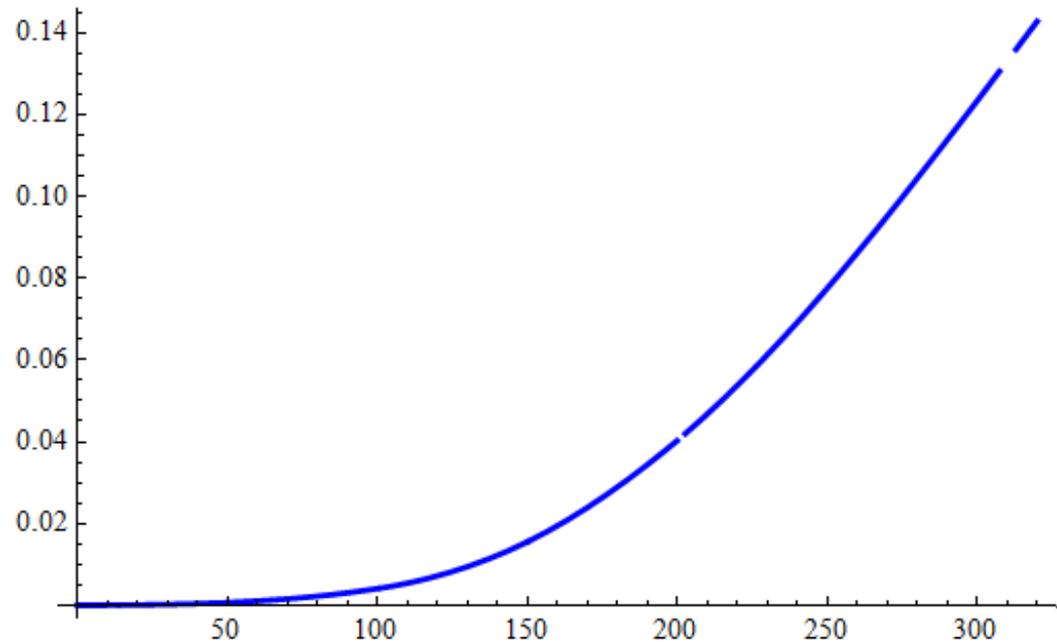
- Wellengeometrie und Biegelinie

```
d = Piecewise[{
  {50, 0 ≤ x < 13.5},
  {70, 13.5 ≤ x < 100},
  {60, 100 ≤ x < 200},
  {55, 200 ≤ x < 307.5},
  {45, 307.5 ≤ x ≤ Lges}
}];
```

$$I_y = \frac{\pi}{64} d^4;$$

$$f0 = \frac{1}{E_{st}} \iint \frac{M_b}{I_y} dx dx;$$

```
Plot[f0, {x, 0, Lges}, PlotStyle → Directive[Blue, Thick]]
```



Mathematica integriert ohne Konstanten! → Biegelinie nicht korrekt!

- Lösungsmöglichkeiten

- **Variante 1**

Händisches Hinzufügen der Integrationskonstanten und anschließendes Lösen eines Gleichungssystems zur Bestimmung der Konstanten:

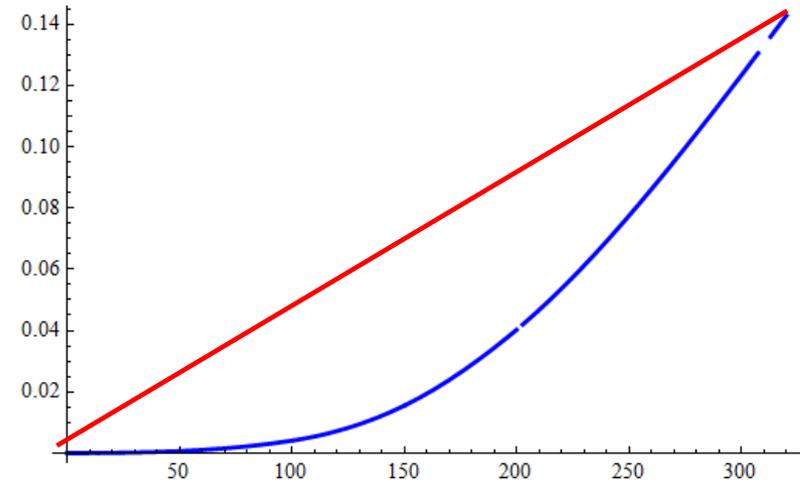
```
f0 =  $\frac{1}{ESt} \int \int \frac{Mb}{Iy} dx dx + C1 x + C2;$   
fA = Limit[f0, {x → 0}][[1]];  
fB = Limit[f0, {x → Lges}][[1]];  
Konst = NSolve[{fA == 0, fB == 0}, {C1, C2}][[1]]
```

Fehlermeldung!

→ Probleme infolge der abschnittsweise definierten Funktion $d(x)$ bzw. $I_y(x)$

- **Variante 2**

Berücksichtigung einer „Schusslinie“,
d.h. einer Geraden durch beide
Lagereustellen



Zweipunktform einer Geraden:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

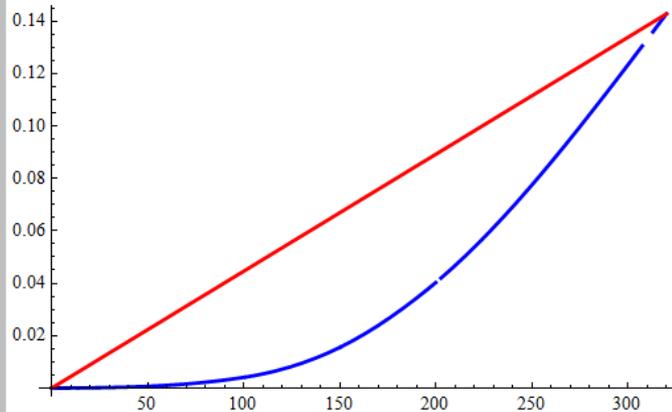
In diesem Fall ist:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ x_2 = L_{\text{ges}} \\ y_2 = f_0(x_2) \end{array} \longrightarrow y = \frac{f_0(x_2)}{L_{\text{ges}}} \cdot x$$

- Schusslinie und korrigierte Biegelinie

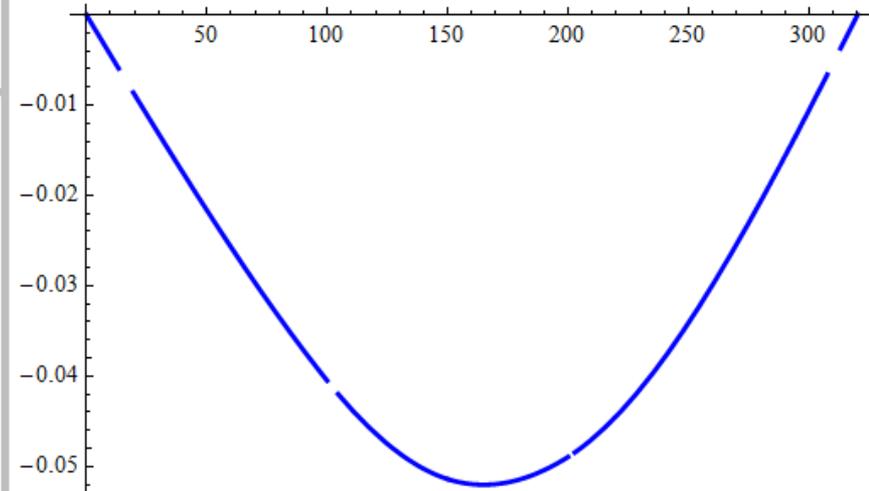
$$y_S = \frac{f_0 / . x \rightarrow L_{ges}}{L_{ges}} x;$$

```
Plot[{f0, yS}, {x, 0, Lges}, PlotStyle -> {Directive[Blue, Thick], Directive[Red, Thick]}]
```



$$f = f_0 - y_S;$$

```
Plot[f, {x, 0, Lges}, PlotStyle -> Directive[Blue, Thick]]
```



- Ergebnisse

```

x0 = x /. NSolve[D[f, x] == 0, x][[1]]
164.898

fmax = f /. x -> x0
-0.0520295

 $\alpha_A = \text{Limit}[D[f, x], \{x \rightarrow 0\}][[1]] 180 / \pi$ 
-0.0255636

 $\alpha_B = (D[f, x] /. x \rightarrow 320 - \text{MachinePrecision}) 180 / \pi$ 
0.0297976

```

- Vergleich mit den Ergebnissen aus MathCAD, ermittelt mit dem Verfahren nach Mohr

$$f_{\max} := f(x_0) = 52.03 \cdot \mu\text{m}$$

$$\alpha_A := f_s(0) = 0.026 \cdot ^\circ$$

$$\alpha_B := f_s(L_{\text{ges}}) = -0.03 \cdot ^\circ$$

▪ Hinweis zum Verfahren von Mohr

- Die Korrektur der Biegelinie mittels Schusslinie ist auch beim Mohrschen Verfahren notwendig, sofern gilt:

Randbedingungen des Biegemomentes \neq Randbedingungen der Biegelinie

- Beispiel: Fliegende Lagerung

