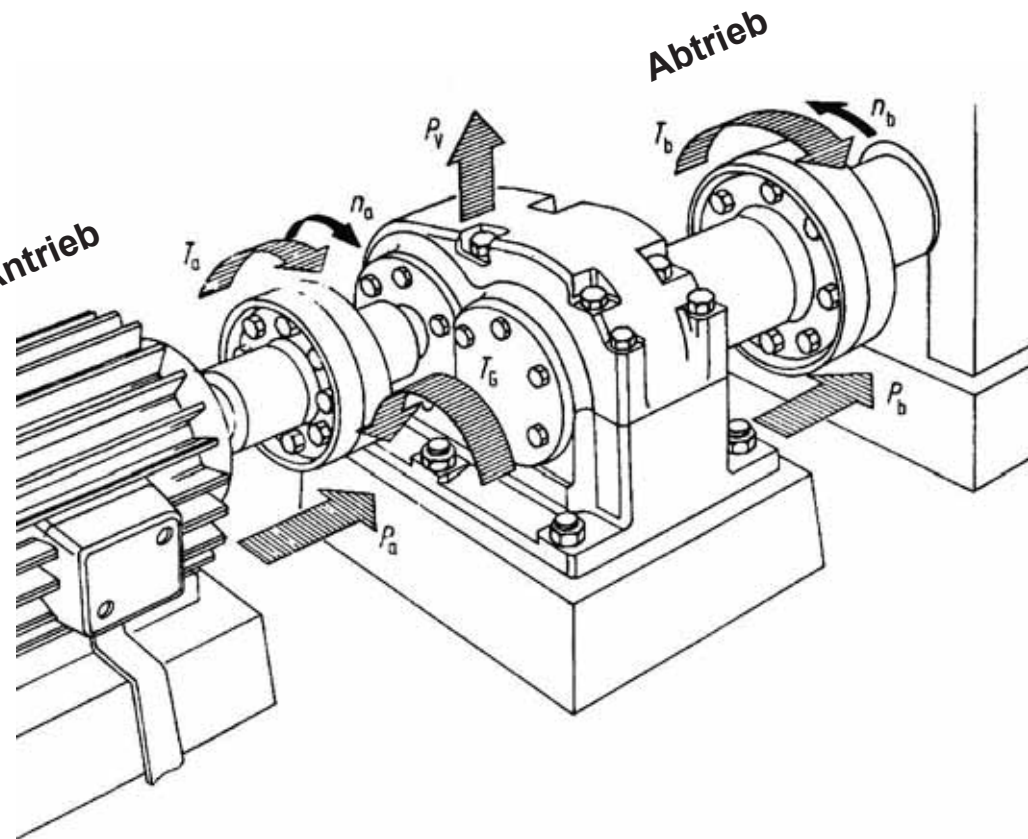

ANTRIEBSTECHNIK 1

Stirnradverzahnungen

Prof. Dr.-Ing. H. Gruss

1. Einführung

- Das Bild zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Maschinenanlage. Für die für den Betrieb der Arbeitsmaschine benötigte Energie sind der Wirkort und die spezielle Energieform vom Arbeitsprozess vorgegeben. Die Kraftmaschine bietet diese Energie in der Regel an einem anderen Ort und in einer anderen Form an, wobei der Wirkungsgrad der Energieübertragung von der Kraft- zur Arbeitsmaschine eine große Rolle spielt.



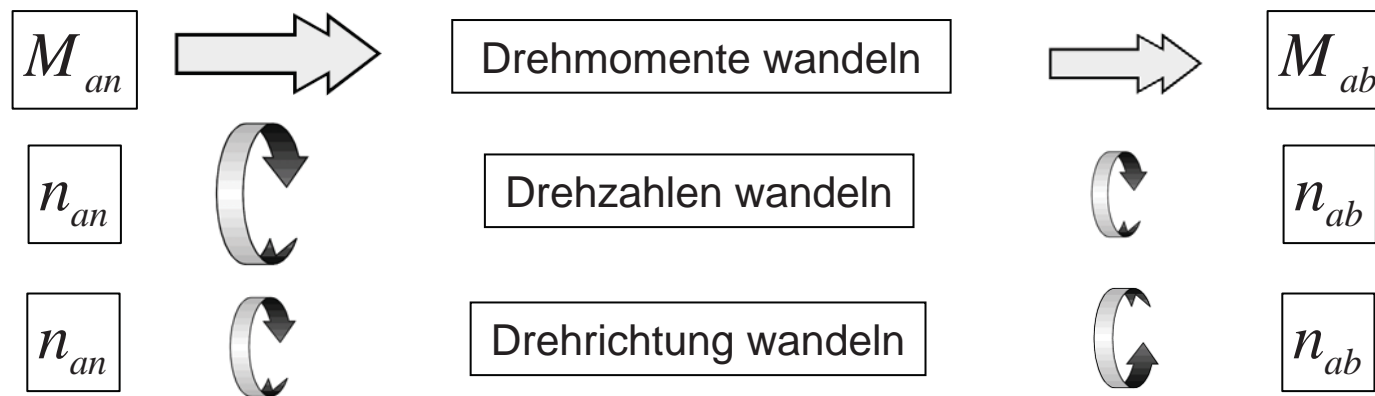
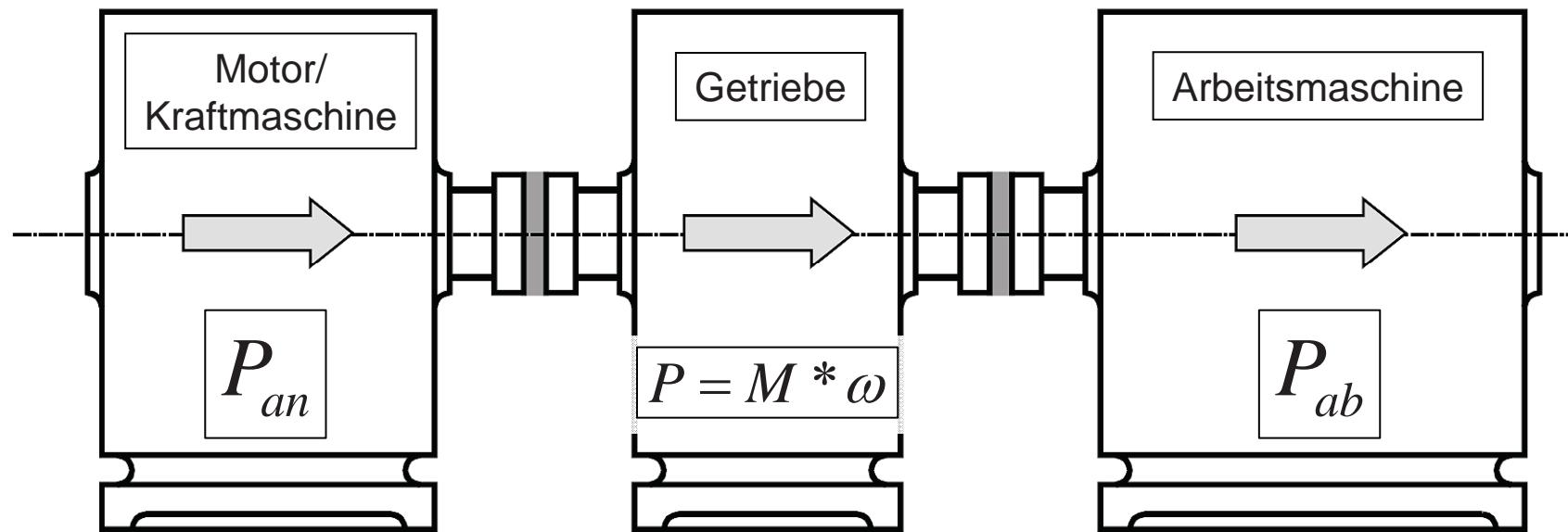
Beziehungen für Getriebe bei Leistungsübertragung

1.1 Aufgaben der Antriebstechnik

- Die Antriebstechnik stellt das Bindeglied zwischen Kraft- und Arbeitsmaschine dar. Sie sorgt dafür, dass beim Betrieb von Maschinen die benötigte Energie in der erforderlichen Form bereitgestellt wird und erfüllt damit Funktionen der:

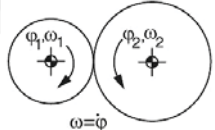
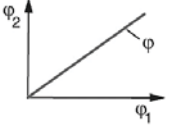
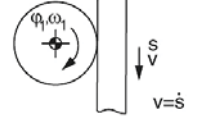
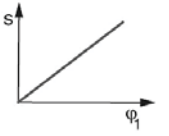
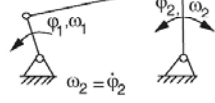
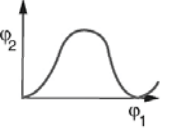
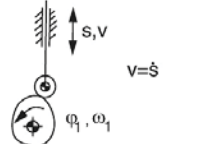
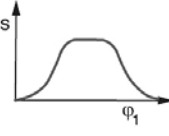
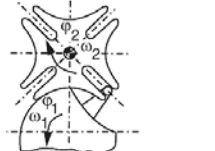
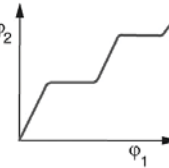
- Energiewandlung
- Energieleitung
- Energiespeicherung

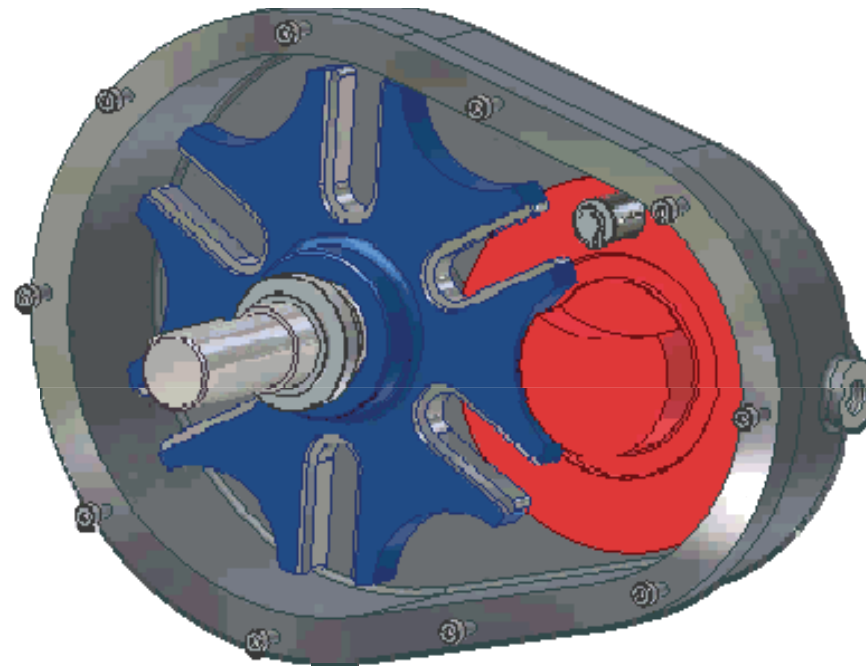
- Energie **wandeln** mechanischer Energie



- Über die Änderung der Drehzahl oder der Geschwindigkeit hinaus kann die Aufgabe der kinematischen Anpassung auch in der Umwandlung einer gleichmäßigen Antriebsbewegung in eine ungleichmäßige bestehen. Daher wird zwischen gleichförmig und ungleichförmig übersetzenden Getrieben unterschieden.

Kinematische Grundaufgaben ausgewählter Getriebearten

Getriebeart	Eingang (Antrieb)	Ausgang (Abtrieb)	Getriebeschema	Übertragungsfunktion
Gleichmäßig übersetzende Getriebe	Drehbewegung φ_1 ω_1	Drehbewegung φ_2 ω_2	Rädergetriebe 	
	Drehbewegung φ_1 ω_1	geradlinige Bewegung s v	Zahnstangengetriebe 	
Ungleichmäßig übersetzende Getriebe	Drehbewegung φ_1 ω_1	pendelnde Drehbewegung φ_2 ω_2	Koppelgetriebe (Kurbelschwinge) 	
	Drehbewegung φ_1 ω_1	pendelnde geradlinige Bewegung s v	Kurvengetriebe 	
	Drehbewegung φ_1 ω_1	schrittweise Drehbewegung φ_2 ω_2	Schrittgetriebe (Malteserkreuzgetriebe) 	



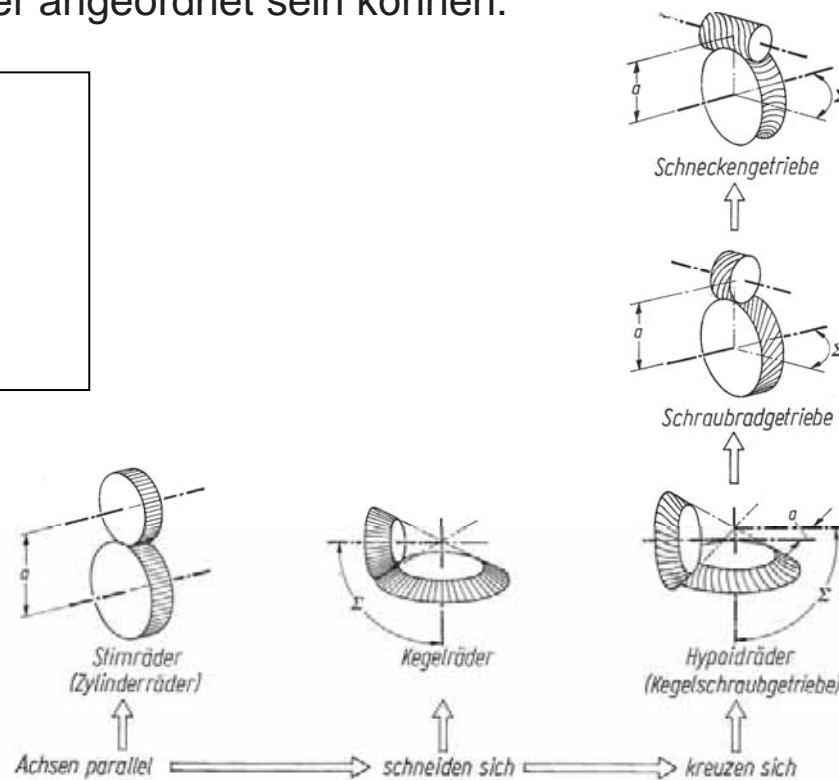
Malteserkreuzgetriebe

- Energie **leiten**

Infolge konstruktiver Randbedingungen ist es oftmals nicht möglich, den Antriebsmotor fluchtend mit der Antriebswelle der Arbeitsmaschine anzuordnen. Daher muss eine geometrische Anpassung erfolgen, bei denen die Wellenstränge folgendermaßen zueinander angeordnet sein können:

- parallel
- koaxial
- ebenwinklig
- räumlich winklig

Geometrische Anpassung am Beispiel der Zahnradpaarungen



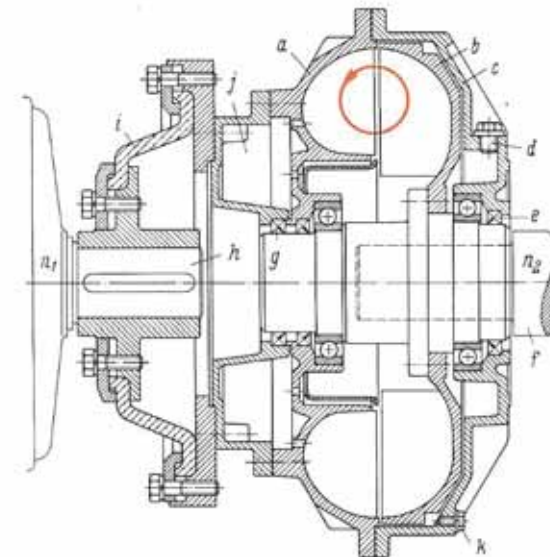
- Zusätzlich zu diesen Grundaufgaben kommen Aufgaben und Probleme, die die Gestaltung der Antriebe wesentlich bestimmen können:
 - Ausgleich von Wellenverformungen, Fluchtung
 - Verformungen der Maschine und Bauteile (z.B. therm. Verformung, Getriebe im Schiff und Windkraftanlagen)
 - Massenkräfte und –momente (z.B. Schaltungen)
 - Konstante oder veränderte Übersetzungen
 - Umwelteinflüsse, Temperatur, Schmutz

- Neben dieser Wandlung mechanischer Größen kann auch eine Wandlung der Energie in andere Energieformen eine antriebstechnische Aufgabe sein, z.B.:

M, ω	\rightarrow	U, A	\rightarrow	M, ω	Elektrische Antriebstechnik
M, ω	\rightarrow	p, \dot{V}	\rightarrow	M, ω	Hydraulische Antriebstechnik

- Neben dem gezeigten Prinzip der hydrodynamischen Kupplung (Föttinger-Kupplung) wird die Flüssigkeit durch eine Pumpe beschleunigt und gibt beim Auftreffen auf die langsamer laufende Turbine kinetische Energie ab.

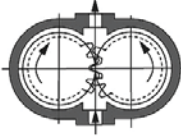
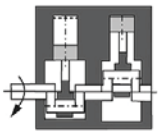



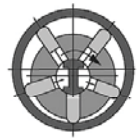
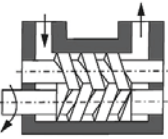
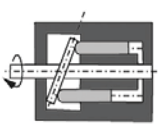

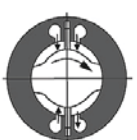
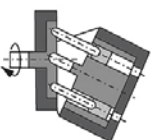
stufenlose Getriebe
beruht auf Prinzip der
Strömungsmaschine



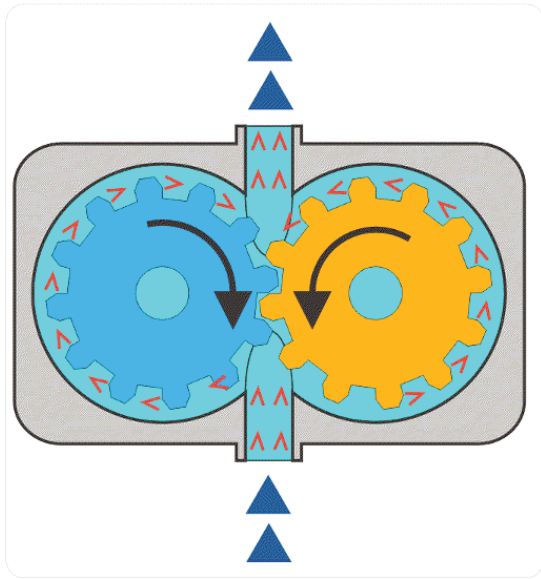
a Primärrad, b Sekundärrad, c Haube, d Öl-Einfüllöffnung, e Öldichtung (Radialdichtring), f Welle der Arbeitsmaschine, g Radialdichtring, h Motorwelle, i Elastik-Kupplung, j Füllungs-Verzögerungskammer, k Schmelzsicherungsschraube, n_1 Antriebsdrehzahl, n_2 Abtriebsdrehzahl

- Beim hydrostatischen Getriebe wird die eingespeiste Leistung mit Hilfe einer Pumpe auf die spezifische Energie des Massenstromes einer strömenden Flüssigkeit übertragen und abtriebsseitig durch einen Motor in die mechanische Form rückgewandelt. An- und Abtriebsseiten sind grundsätzlich vertauschbar.

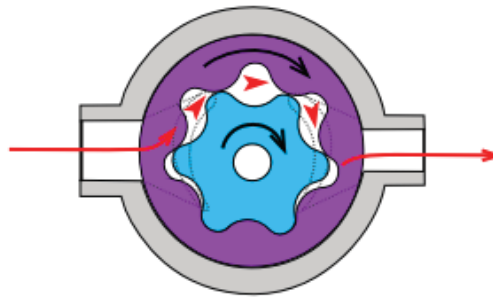
Direkt proportionale Abhängigkeit zwischen nutzbarem Hubraum und Drehzahl → Drehzahlwandlung ist von anliegender Belastung unabhängig.

Verdränger-element	Umlaufverdrängermaschinen		Verdränger-element	Hubverdrängermaschinen	
	Benennung	Schem. Darstellung		Benennung	Schem. Darstellung
Zahn	Außenzahnradmaschine	1 	Kolben	Reihenkolbenmaschine	7 
	Innenzahnradmaschine	2 		Radialkolbenmaschine mit innerer Kolbenabstützung	8 
	Zahnring-(Gerotor-)maschine	3 		mit äußerer Kolbenabstützung	9 
Schraube	Schraubemaschine	4 		Axialkolbenmaschine	10 
	Flügel	Flügelzellenmaschine		5 	Taumscheibenmaschine
Sperrschiebermaschine		6 		Schrägscheibenmaschine	12 

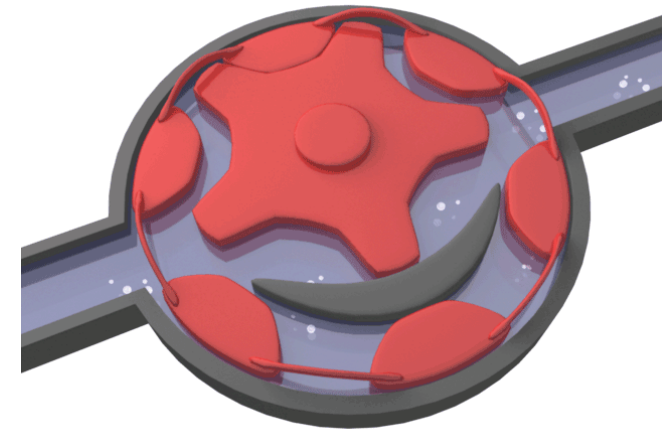
Bauarten von Verdrängermaschinen als Pumpe und Motor



Außenzahnradpumpe



Gerotorpumpe
(Innenzahnradpumpe)



Sichelpumpe
(Innenzahnradpumpe)

1.2 Einteilung und Anwendungsbereiche von Getrieben kann erfolgen nach

- Randbedingungen des Einsatzfalls

- Übertragbare Leistung, Drehmoment- und Drehzahlgrenzen
- Übersetzung, Stellbarkeit und Genauigkeit der Übersetzung, Schlupf
- Lastspielcharakteristik (Stoßbelastung, Dauerbetrieb/Kurzzeitbetrieb, Anlaufmomente)
- Gewicht, Bauraum
- Betriebssicherheit, Wartung, Schmierung
- Schwingungseigenschaften und Geräuschentwicklung
- Wärmeentwicklung und -abfuhr sowie Wirkungsgrad
- Kosten und Wirtschaftlichkeit

- Systematischer Einteilung

- Kinematik - gleichförmig oder ungleichförmig
- Physikalisches Prinzip - mechanisch, elektrisch, hydraulisch, pneumatisch
- Wirkprinzip - formschlüssig oder kraftschlüssig
- Übertragungsart - konstant, gestuft, stufenlos

- Bedeutung gleichförmig übersetzender Getriebe

Rädergetriebe (formschlüssig) - Stirnradgetriebe, Kegelradgetriebe, Schneckenradgetriebe, Schraubenradgetriebe, Zahnstangen, Umlaufrädergetriebe

Rädergetriebe (kraftschlüssig) - Reibradgetriebe

Zugmittelgetriebe - Riementriebe, Kettentriebe

Hydraulische Getriebe - Hydrostatische und hydrodynamische Getriebe

Elektrische Getriebe (kraftschlüssig) - system Generator/Motor

Bauart	Leistung [kW]	Drehzahl [min ⁻¹]	Wälzgeschwindigkeit [m/s]	Übersetzung <i>i</i>	Wirkungsgrad η je Stufe [%]	Volumen je Leistung [dm ³ /kg]	Gewicht je Leistung [kg/kW]
Stirnrad	2.000-150.000	150.000	80-200	1-800 (1.000 max.)	97-99,5	0,5-0,2	2,0-0,1
Umlaufräder	5.000-35.000	17.000	80-100	3-13 (3-35 max.) ¹⁾	98-99,5	0,4-0,15	1,0-0,2
Kegelrad	500-4.000	50.000	40-120	1-5 (8 max.)	97-99	0,8-0,4	2,5-0,6
Hypoid	300-1.000	17.000	30-50	4-8 (1-50 max.)	50-90	1,0-0,5	3,0-0,7
Schnecken	90-1.000	30.000	25-70	5-50 (1-300 max.)	20-97 ²⁾	0,6-0,2	4,5-2,0
Zylinder-Schnecken	5-75	10.000	20-50	1-5 (100 max.)	40-95	2,5-1,0	3,0-1,5
Ketten	200-3.000	10.000	10-40	1-6 (10 max.)	97-98	2,0-0,5	10-4,0
Flachriemen	150-3.000	17.000	60-120	1-5 (20 max.)	96-98	4,0-0,5	6,0-1,5
Keilriemen	100-4.000	6.000	30-40	1-10 (15 max.)	94-97	3,0-0,4	5,0-1,0
Zahnriemen	100-400	30.000	40-70	1-10 (12 max.)	96-98	1,0-0,25	4,0-1,0
Reibrad	50-150	6.000	30-40	1-10 (15 max.)	95-98	3,0-0,4	5,0-1,0
Hydrostatisch	250-1.200	10.000 ³⁾	-	bis 7	85-90	-	1,3-1,7
Hydrodynamisch	1.000-150.000	5.000	-	1-5	85-90	-	0,5-1,5
¹⁾ hochübersetzend bis 10 ⁶		²⁾ η fallend mit steigender Übersetzung				³⁾ Abtrieb	

Anwendungsbereiche und Kenngrößen ausgeführter
Getriebebauarten im allgemeinen Maschinenbau



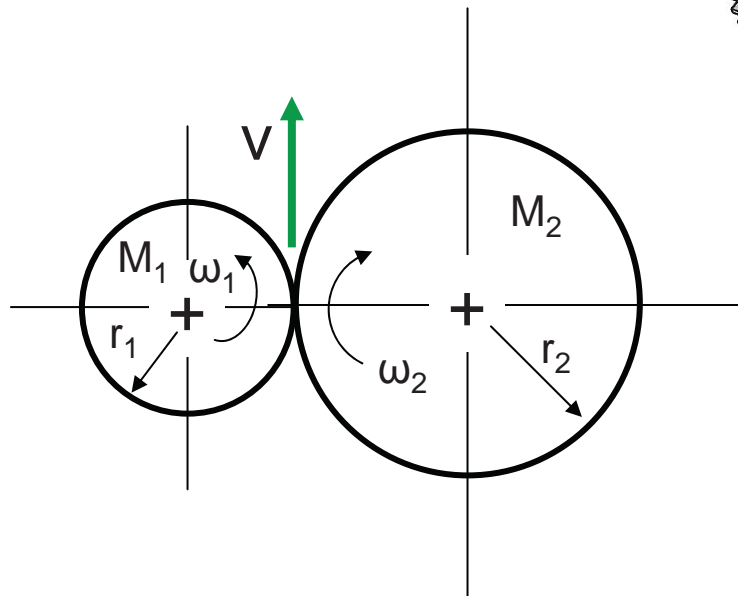
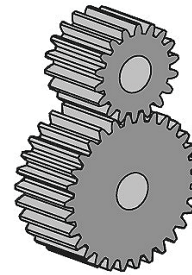
Hydraulikkran

1.3 Funktionale Zusammenhänge

- Unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Übersetzung gibt es für die Lösung der Grundaufgaben durch mechanische Elemente grundsätzlich zwei Konstruktionsprinzipien:

- Wälztriebe bzw. Rädergetriebe
- Hülltriebe bzw. Umschlingungstriebe bzw. Zugmittelgetriebe

Wälztriebe



An- und Abtrieb haben entgegengesetzten Richtungssinn

Übertragung der Kräfte und Wirkbewegungen können erfolgen durch:

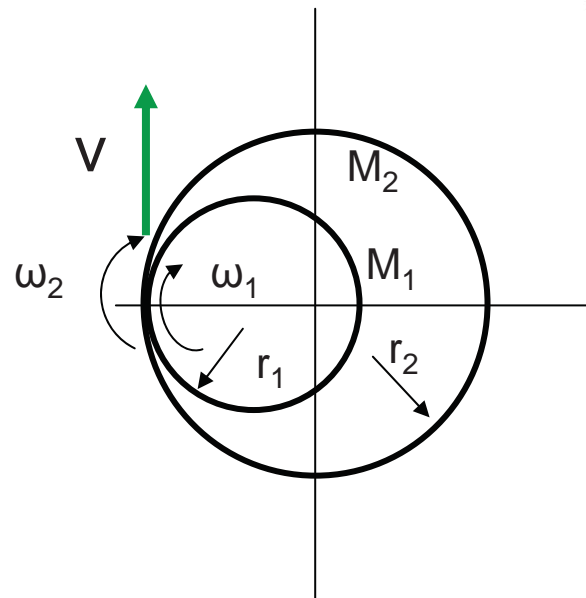
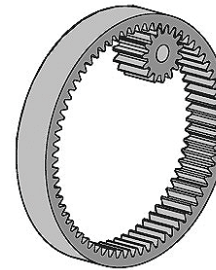
Formschlüssig
-Zahnradgetriebe

oder durch

Reibschluss
- Reibradgetriebe

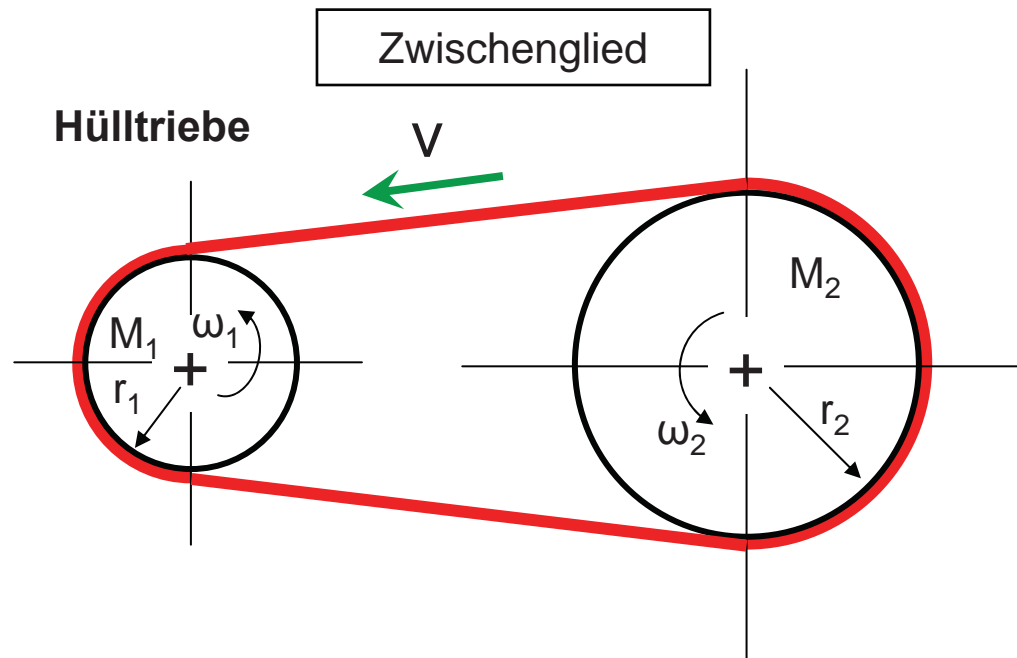
Wälztriebe

als Umlaufrädergetriebe



Übertragung der Kräfte und Wirkbewegungen können ebenfalls durch Reib- und Formschluss erfolgen.

An- und Abtrieb haben gleichen Richtungssinn



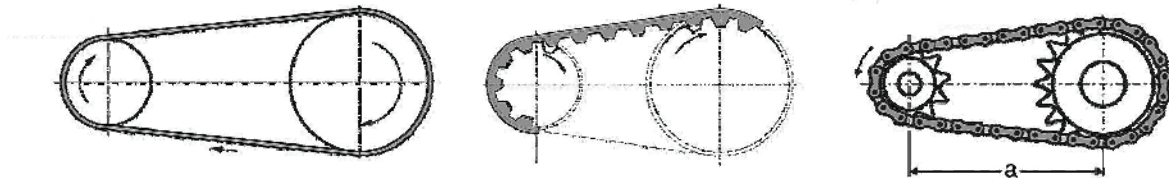
An- und Abtrieb haben gleichen Richtungssinn

Übertragung der Kräfte und Wirkbewegungen können erfolgen durch:

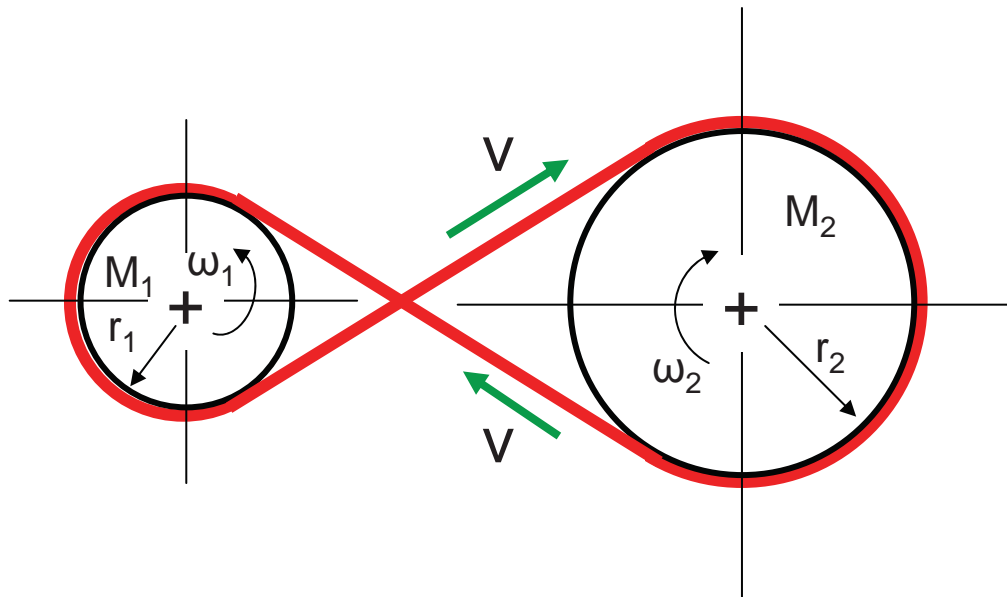
- Reibschluss
- Riementrieb
- Seiltrieb

oder durch

- Formschluss
- Kettentrieb
- Zahnriementrieb



Hülltriebe



Übertragung der Kräfte und Wirkbewegungen können ebenfalls durch Reib- und Formschluss erfolgen.

An- und Abtrieb haben entgegengesetzten Richtungssinn

- Grundgleichungen der mechanischen Leistungsübertragung

- Bewegung:

$v_1 = v_2$	}	Formschluss
$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$		
$v_1 \neq v_2$	}	Reibschluss „Schlupf“
$r_1 \omega_1 \neq r_2 \omega_2$		
$\omega = 2 * \pi * n$		

- Hieraus leitet sich der Begriff der **Übersetzung** (Drehzahlverhältnis) ab:

Formschluss	$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{\omega_{an}}{\omega_{ab}} = \frac{r_{ab}}{r_{an}}$	→ bewegungstreu
-------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------

Reibschluss	$i = \frac{\omega_{an}}{\omega_{ab}} \neq \frac{r_{ab}}{r_{an}}$	→ Schlupf
-------------	------------------------------------------------------------------	-----------

- Zu beachten ist folgende Vorzeichenregel:

gleichsinnige Drehrichtungen

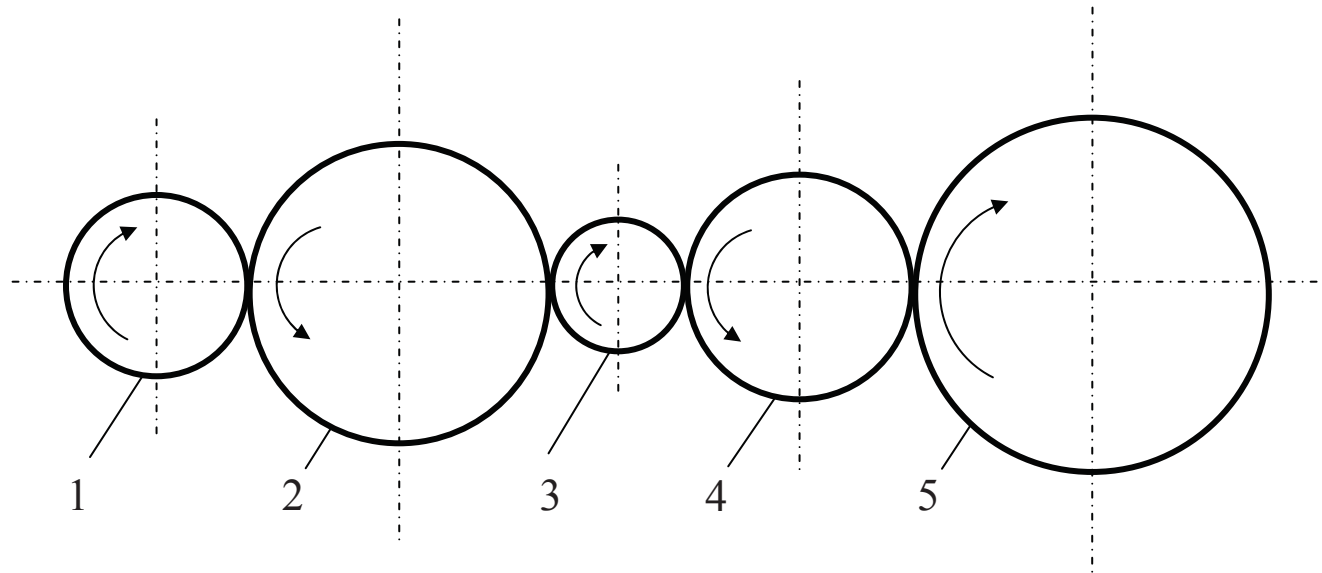
$$i > 0$$

gegenseitige Drehrichtungen

$$i < 0$$

- Weiterhin bedeuten $|i| > 1$ eine Übersetzung ins Langsame und $|i| < 1$ ins Schnelle.

Beispiel – Gesamtübersetzung einer Räderkette (Stufengetriebe)



$$i_{ges} = i_1 * i_2 * i_3 * i_4 = + \frac{z_5}{z_1}$$

$$\rightarrow i_{ges} = (-1)^k * \frac{z_{ab}}{z_{an}}$$

k ... Anzahl der
Radpaarungen
bzw. Stufen

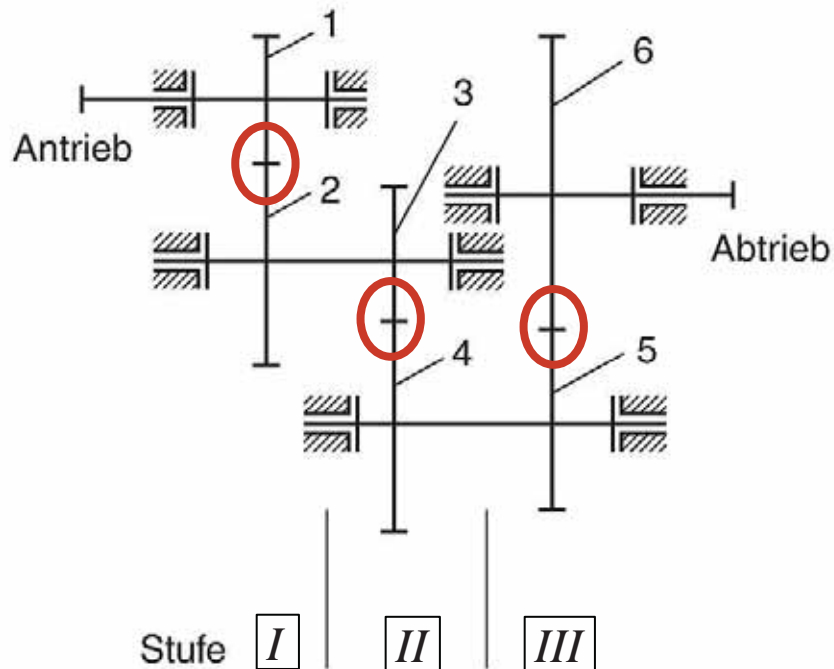
$$i_1 = - \frac{z_2}{z_1}$$

$$i_2 = - \frac{z_3}{z_2}$$

$$i_3 = - \frac{z_4}{z_3}$$

$$i_4 = - \frac{z_5}{z_4}$$

Beispiel – Gesamtübersetzung eines Stufengetriebes



$$i_{ges} = i_I * i_{II} * i_{III}$$

$$i_I = -\frac{z_2}{z_1}$$

$$i_{II} = -\frac{z_4}{z_3}$$

$$i_{III} = -\frac{z_6}{z_5}$$

$$i_{ges} = -\frac{z_2}{z_1} * -\frac{z_4}{z_3} * -\frac{z_6}{z_5}$$

- **Leistung:**

$\Sigma P = 0$ $P_{an} + P_{ab} + P_V = 0$

$$P_{an} > 0$$

$$P_{ab} < 0$$

$$P_V < 0$$

- Mögliche Verluste in Antrieben
- Verzahnungs- und Lagerverluste (Reibung)
- Zirkulation, Ölpantschen
- Schlupf

- Hieraus leitet sich der Begriff des **Wirkungsgrades** ab:

$$\eta = \frac{-P_{ab}}{P_{an}} = \frac{P_{an} + P_V}{P_{an}} = 1 + \frac{P_V}{P_{an}} \quad 0 < \eta < 1$$

$\eta = -\frac{P_{ab}}{P_{an}} = -\frac{M_{ab} * \omega_{ab}}{M_{an} \omega_{an}}$	Reibung \uparrow	Schlupf \nearrow
------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------	-----------------------

$$\eta_{ges} = \eta_1 * \eta_2 * \eta_3 * \dots * \eta_k$$

- **Drehmoment:**

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{F_U * \omega * r}{\omega} = F_U * r$$

- Entsprechend der Übersetzung leitet sich aus der Momentenbetrachtung das **Drehmomentenverhältnis** ab:

$$\mu = \frac{-M_{ab}}{M_{an}} = \frac{-P_{ab} * \omega_{an}}{P_{an} * \omega_{ab}} = \frac{(P_{an} + P_V) * \omega_{an}}{P_{an} * \omega_{ab}} = \eta * i$$

$$i > 0 \rightarrow \mu > 0$$

$$i < 0 \rightarrow \mu < 0$$

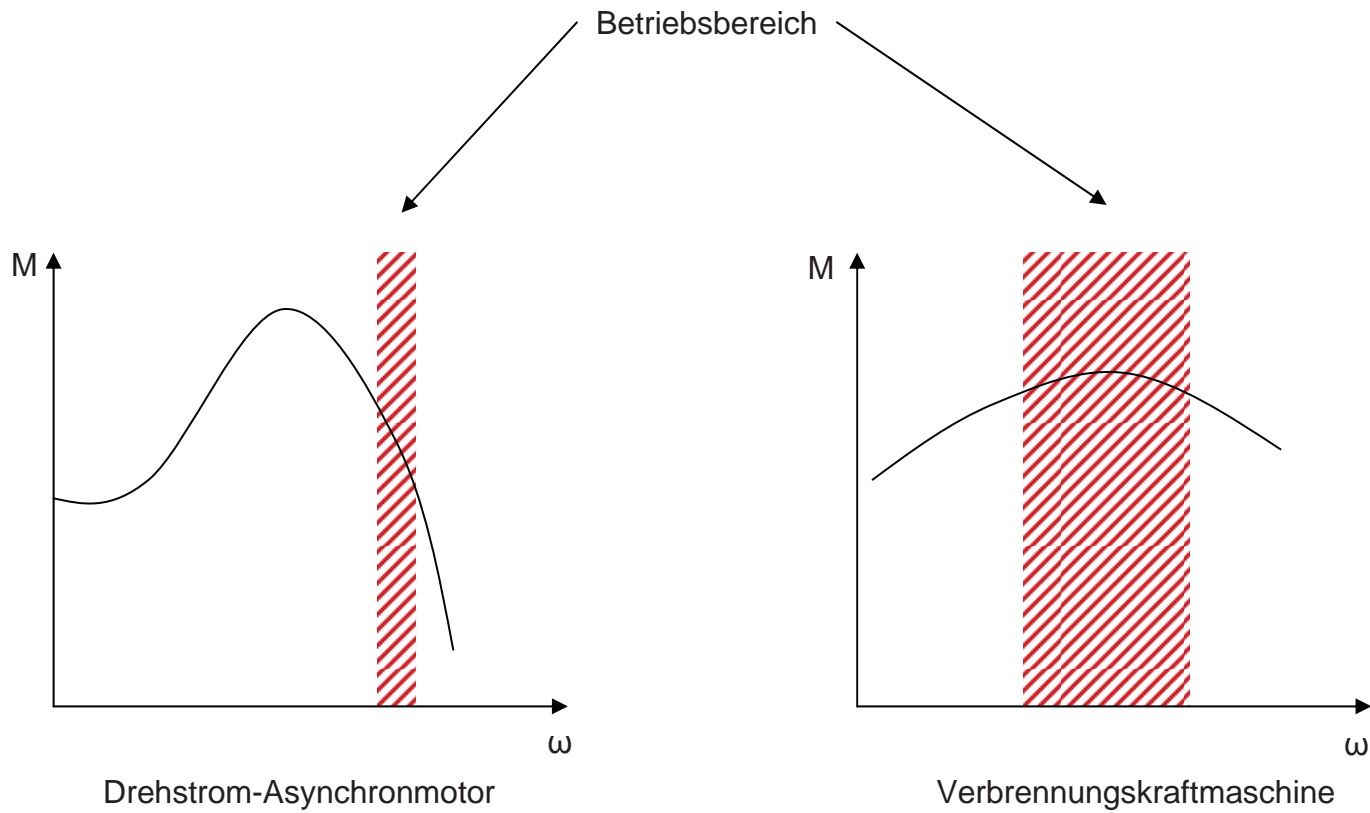
- Merke: Die Gleichgewichtsbedingungen gelten für alle Getriebe.

$$\begin{array}{l} \Sigma M = 0 \\ M_{an} + M_{ab} + M_G = 0 \end{array}$$

$$M_{Gehäuse} = \eta * (i - 1) * M_{an}$$

- Das auf das Gehäuse wirkende Moment muss beispielsweise durch Schrauben aufgenommen werden.

1.4 Anpassung der Kraft- an die Arbeitsmaschine



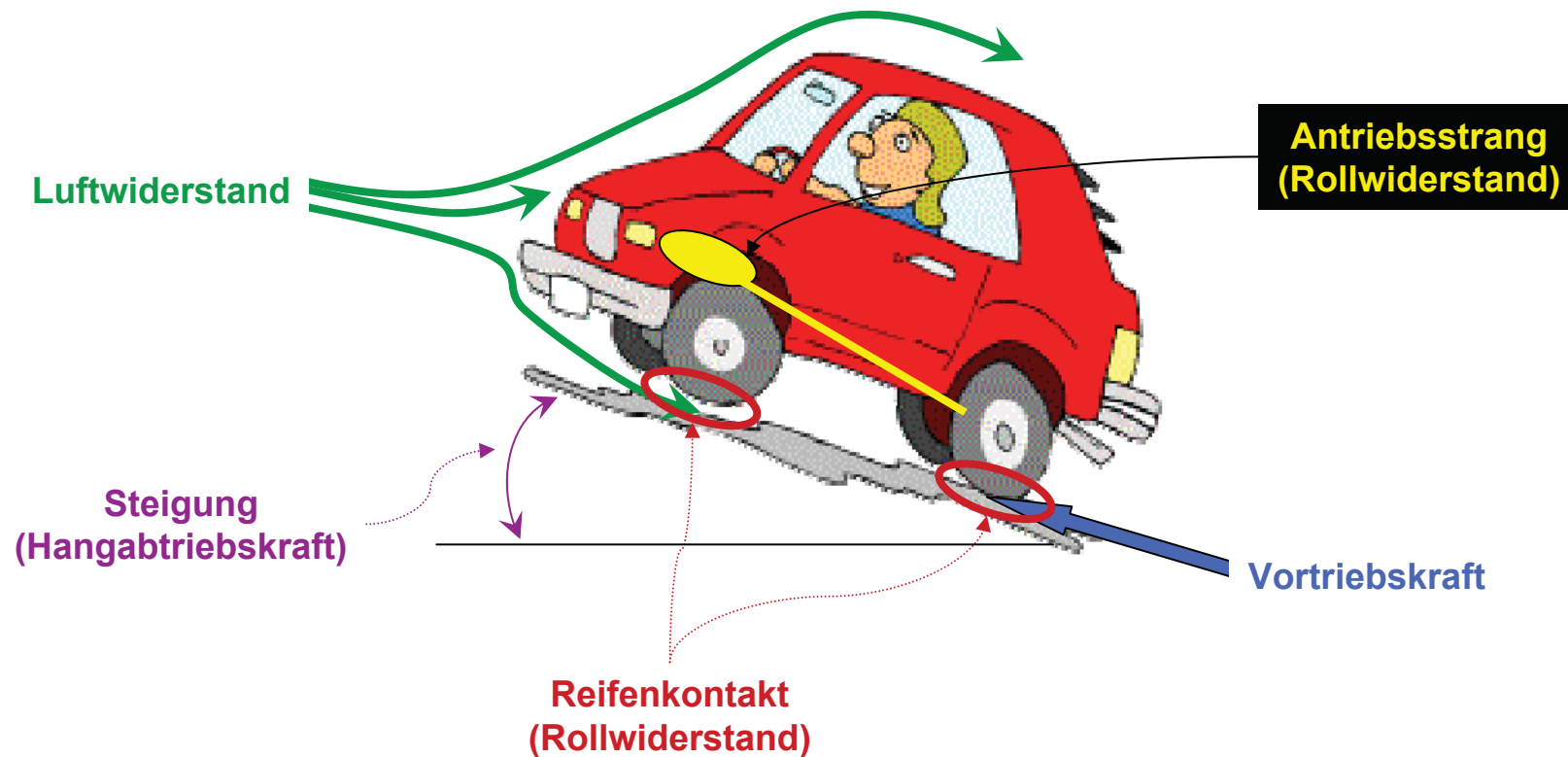
- Die Kraftmaschine (Antriebsmaschine) ist nur in einem bestimmten Drehzahlbereich in der Lage ein Drehmoment abzugeben.
- Die Arbeitsmaschine (Abtriebsmaschine) erfordert eine für den Arbeitsprozess vorgegebene Wirkgeschwindigkeit und Drehzahl.
- Aufgaben von Getrieben sind:
 - Wandeln der Drehzahl in die für die dafür vorgegebenen Bereiche
 - Bereitstellung der Leistung in einer von der Abtriebsmaschine gewünschten Form (Drehmoment, Drehzahl) und Lage (Ort)

Beispiel: Antrieb eines Kraftfahrzeugs

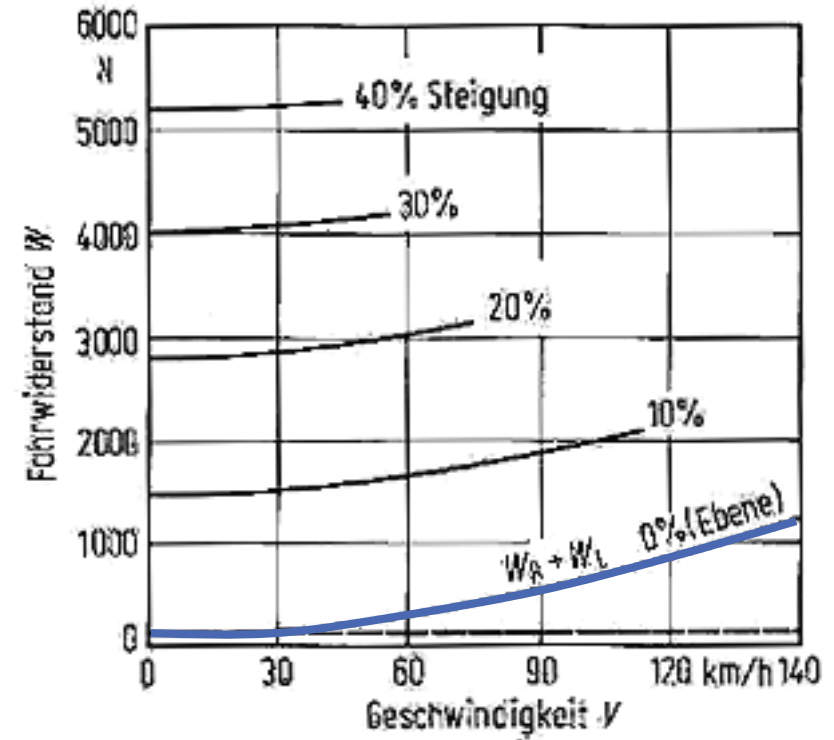
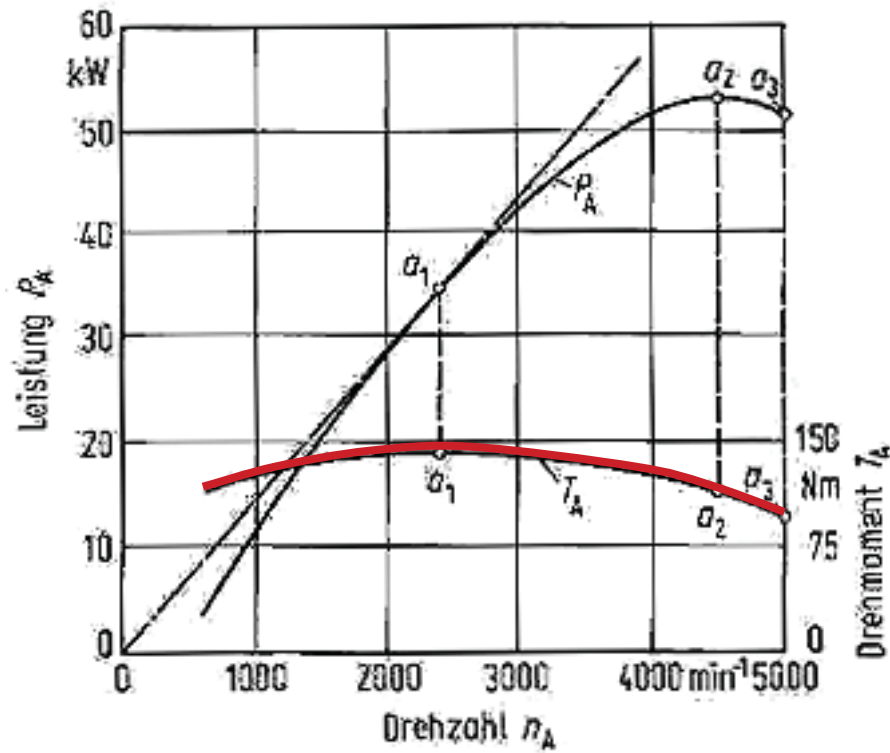
bekannt sind:

- Kennlinie der Antriebsmaschine
→ Leistung, Moment, Benzinverbrauch = $f(\omega)$
- Verbraucherkennlinie (Vortriebskraft) abhängig von Roll-, Luftwiderstand und Steigung

- Kräfte am Fahrzeug

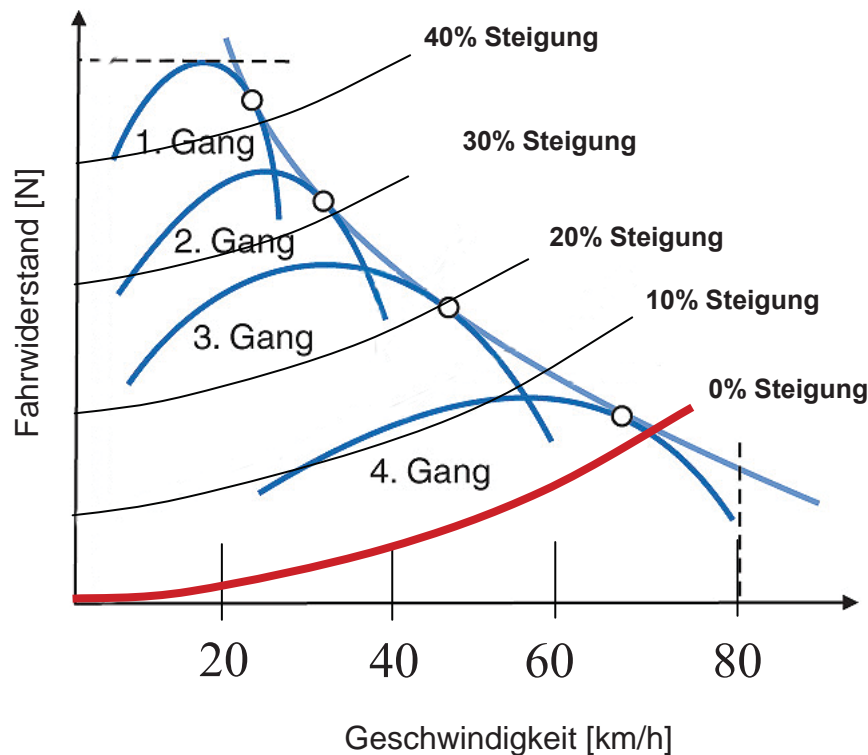


- Kennlinie der Antriebsmaschine (links) und Leistungsanforderung an Abtrieb (rechts)



- a_1 max. Drehmoment
- a_2 max. Leistung
- a_3 max. Drehzahl

- Erweitertes Fahrwiderstandsdiagramm



In diesem Diagramm ist der Fahrwiderstand in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der Fahrbahnsteigung in den einzelnen Gängen angegeben. In der Ebene treten der Luft- und Rollwiderstand (rote Kurve) als Funktion der Geschwindigkeit auf. Im 4. Gang erreicht das Auto eine Höchstgeschwindigkeit von 73 km/h. Dies ist der Schnittpunkt der blauen Kurve (4. Gang) mit der roten Fahrwiderstandsline. An dieser Stelle wird die komplette Motorleistung benötigt, um die Höchstgeschwindigkeit zu halten. Ein Beschleunigen oder Befahren einer Steigung ist nicht mehr möglich.

Im 2. Gang kann beispielsweise eine Steigung von 30% im Geschwindigkeitsbereich von 8 bis 35 km/h befahren werden, da das Zugkraftangebot (blaue Kurve, 2. Gang) über dem Fahrwiderstandsbedarf (schwarze Kurve für 30%) liegt. Unter 8 km/h muss in den 1. Gang zurückgeschaltet werden, mit dem dann Steigungen von ca. 50% befahren werden können. Über 35 km/h kann die Geschwindigkeit bei 30% Steigung nicht weiter gesteigert werden. Selbst ein zurückschalten in den 1. Gang bringt keine Geschwindigkeitssteigerung, da dieser nur bis 25 km/h "reicht".

- Durch Zwischenschalten eines Wandlungsgetriebes kann der Bereich der Antriebsmaschine den Erfordernissen des Antriebs angepasst werden:
 - stufenweise durch Schaltgetriebe
 - stufenlos durch Wandler (hydraulisch)
 - stufenlos durch mechanische Riemengetriebe

- Motivation ist sparsamer Kraftstoffverbrauch

Literatur

Berthold Schlecht

Maschinenelemente 2

Seiten: 1211

ISBN: 978-3-8273-7146-1

€ 79,95

ab 20 Expl.: 10 % vom geb. Ladenpreis
ab 50 Expl.: 12,5 % vom geb. Ladenpreis
ab 100 Expl.: 15 % vom geb. Ladenpreis



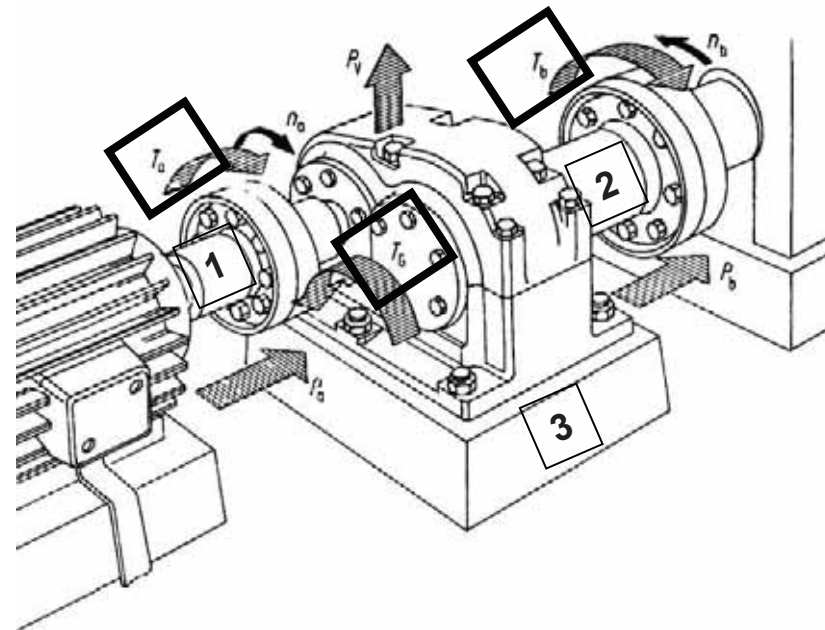
2. Grundlagen für Zahnräder und Getriebe

2.1 Funktion und Wirkung

- Für die kinematische Funktion einer Zahnradpaarung ist die exakte Geometrie von grundlegender Bedeutung. Zudem müssen im Rahmen der Beanspruchbarkeit die Werkstoffkennwerte und der Einfluss der Schmierung ermittelt werden. Aus diesen Anforderungen leiten sich die anfangs erwähnten Hauptforderungen eines Getriebes ab.
 - Anpassung kinematisch-dynamischer Größen – Drehzahl, Drehmoment, Drehrichtung
 - Anpassung der Lage des Antriebs zum Abtrieb – Achsabstand und Winkellage
 - Anpassung der Kennlinien von Kraftmaschine und Arbeitsmaschine

- Unabhängig vom Aufbau setzen sich Getriebe aus 3 Grundbestandteilen zusammen.

1. Antriebsglied (Antriebswelle)
2. Abtriebsglied (Abtriebswelle)
3. Gestell (Gehäuse)



- Die Summe aller an den Bestandteilen auftretenden Momente muss Null sein.

$$\Sigma M = 0$$

$$M_{an} + M_{ab} + M_G = 0$$

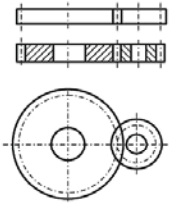
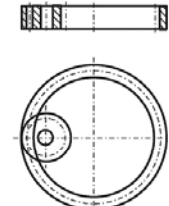
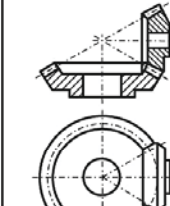
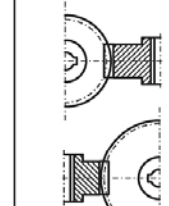
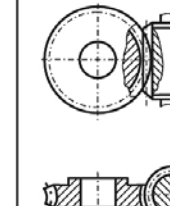
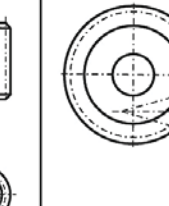
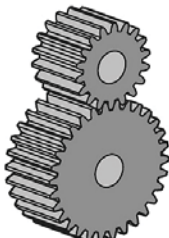

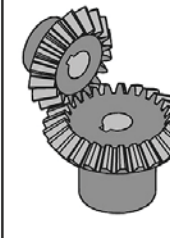
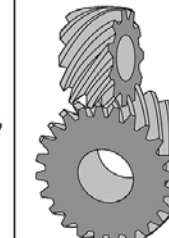
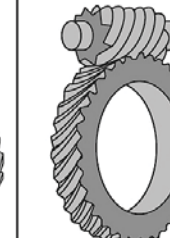
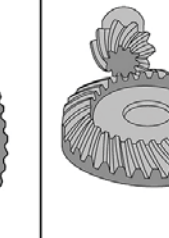
Wenn $M_G = 0$, dann $|M_{an}| = |M_{ab}|$ → keine Wandlung des Drehmomentes
→ Kupplung

2.2 Rad- und Getriebearten

- Zahnradpaarungen lassen sich geometrisch eindeutig durch drei Parameter beschreiben.

1. Form der Radkörper
2. Verlauf der Flankenlinie
3. Zahnprofil

2.2.1 Form der Radkörper

	Stirradgetriebe außen	Stirradgetriebe innen	Kegelradgetriebe	Stirrad-schraubgetriebe	Schneckengetriebe	Kegelradschraubgetriebe (Hypoid)
	Linienkontakt	Linienkontakt	Linienkontakt	Punktkontakt	Linienkontakt	Punktkontakt
Übersetzung	$i \leq 6$ $i_{max} = (8...10)$	$i \geq 3,5$ $i_{max} = 13$	$i \leq 6$ $i_{max} = (8...10)$	$i_{max} = 5$	$i_{min} = 5$ $i_{max} = (60...100)$	$i \leq 6$ $i_{max} = (8...10)$
Querschnitt						
						

Zahnradpaarungen entsprechend ihrer Radkörperform

- **Stirnradpaarungen** sind hierbei am weitesten verbreitet, da sie bezogen auf die übertragbare Leistung folgende Eigenschaften aufweist:

- größte Tragfähigkeit
- geringste Masse
- höchster Wirkungsgrad

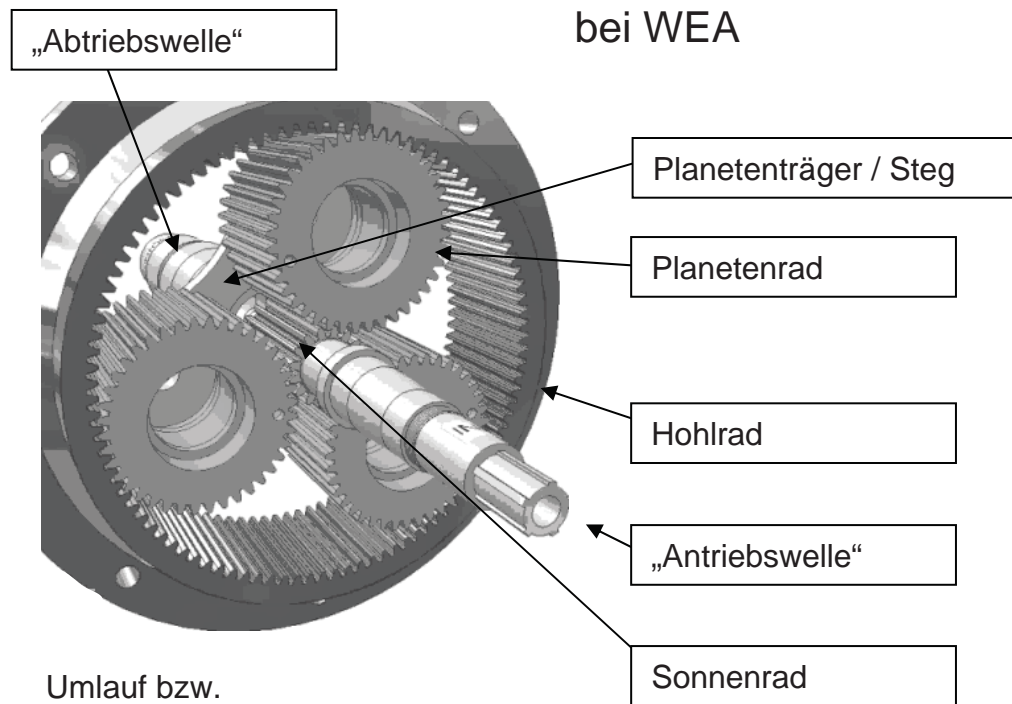


Verteilergetriebe
eines Scania's

- Die Paarung aus jeweils einem innenverzahnten und außenverzahnten Stirnrad gestatten eine kompakte Konstruktion. Infolge der konkaven Ausprägung des Hohlrades nimmt die Tragfähigkeit zu.

Einsatzgebiete:

- Schwenkantriebe für Krane
- Blatt- und Gondelverstellung bei WEA



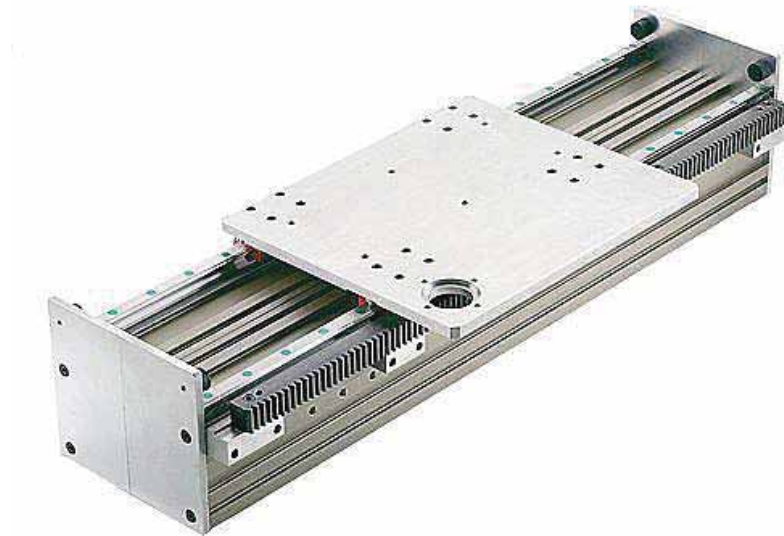
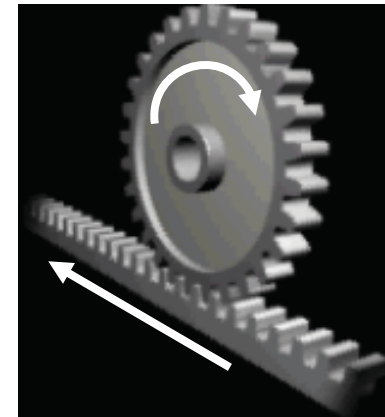
Umlauf bzw.
Planetenradgetriebe



Leistungssammlung:	Steg → Sonnenrad
Leistungsverzweigung:	Sonnenrad → Steg

- Bei Vergrößerung des einen Radius' auf $r \rightarrow \infty$ erhält man eine Paarung aus **Zahnstange** und Außenrad.

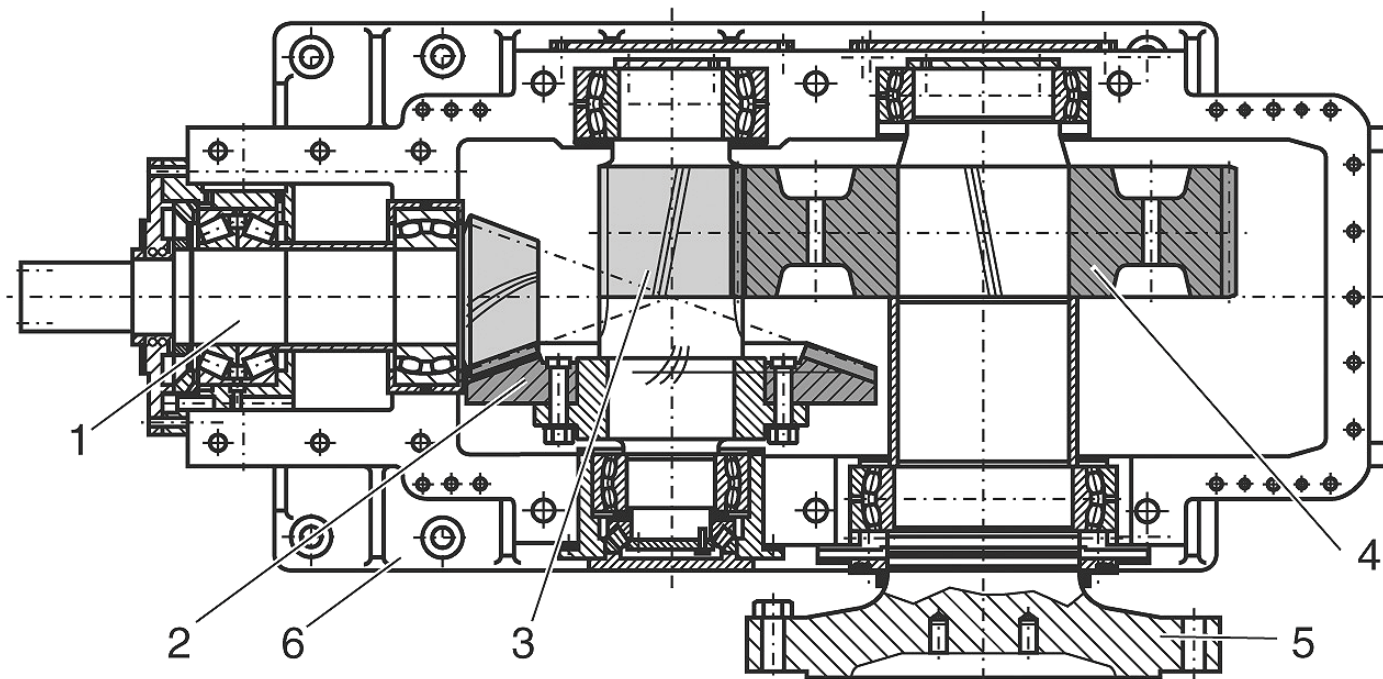
→ umkehrbare Wandlung von rotatorischer und translatorischer Bewegung



Lineareinheit mit Zahnstangenantrieb

- Schneiden sich An- und Abtriebswellen, so bieten sich **Kegelradgetriebe** an.

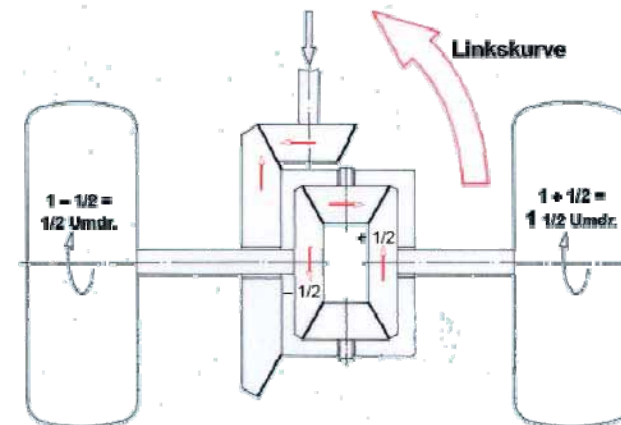
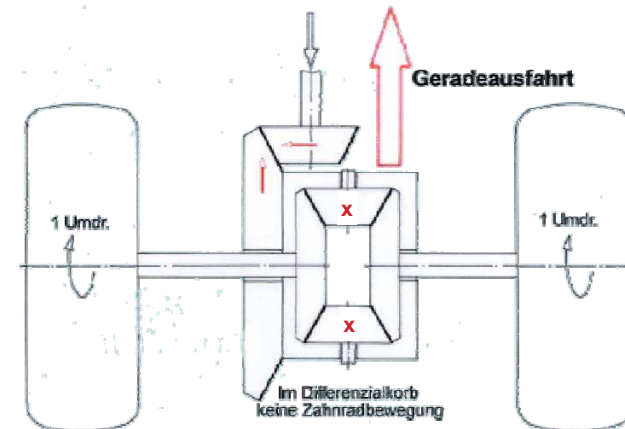
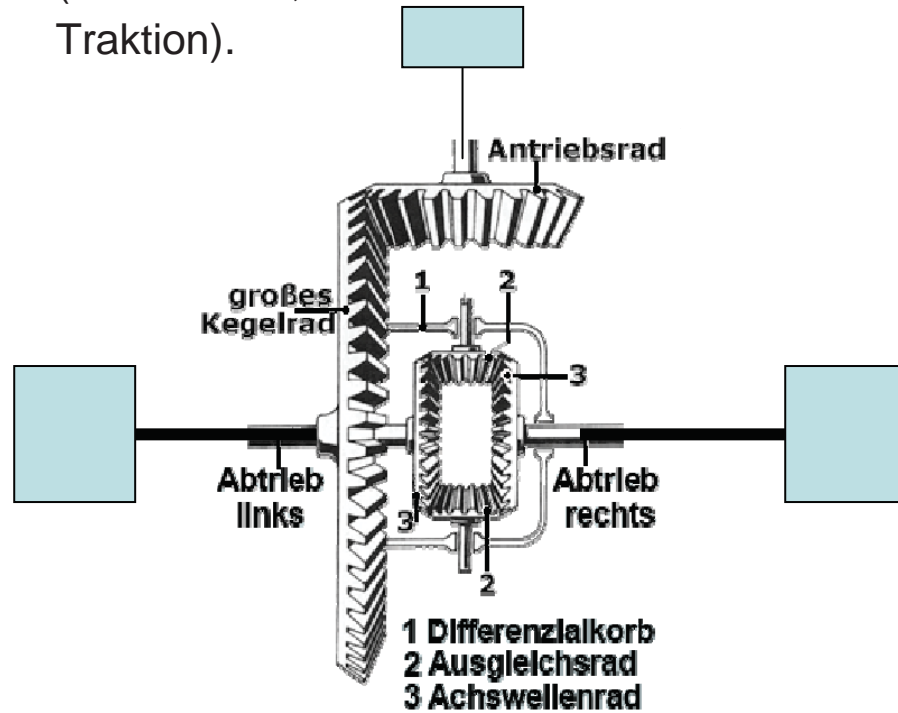
- ungünstig, Geräuschverhalten
- einseitige Lagerungen von Ritzel und Rad (ohne Achsversatz)

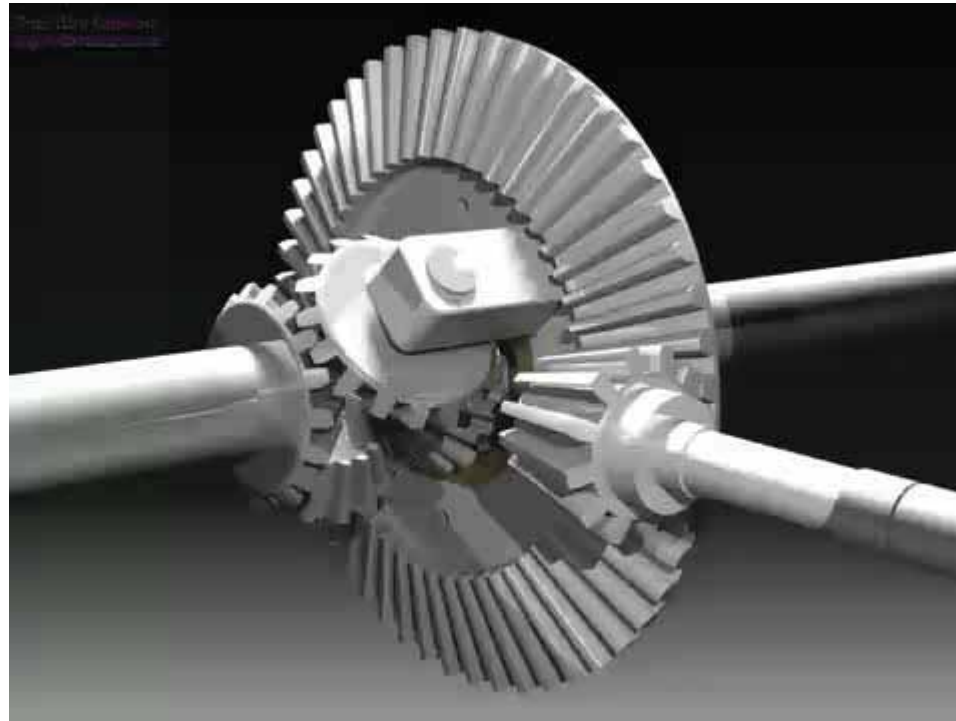


- 1 Ritzelwelle
- 2 Tellerrad
- 3 Stirnritzel
- 4 Stirnrad
- 5 Abtriebsflansch
- 6 Gussgehäuse

Kegel-Stirnradgetriebe mit 2.500 kW Antriebsleistung für einen Gurtförderbandantrieb

- Zwei Antriebsräder mit einem zwischengeschalteten Differentialgetriebe übertragen immer die gleiche Kraft, auch wenn die Geschwindigkeiten ungleich sind (Kurvenfahrt, unterschiedliche Traktion).





Animation eines Differentialgetriebes

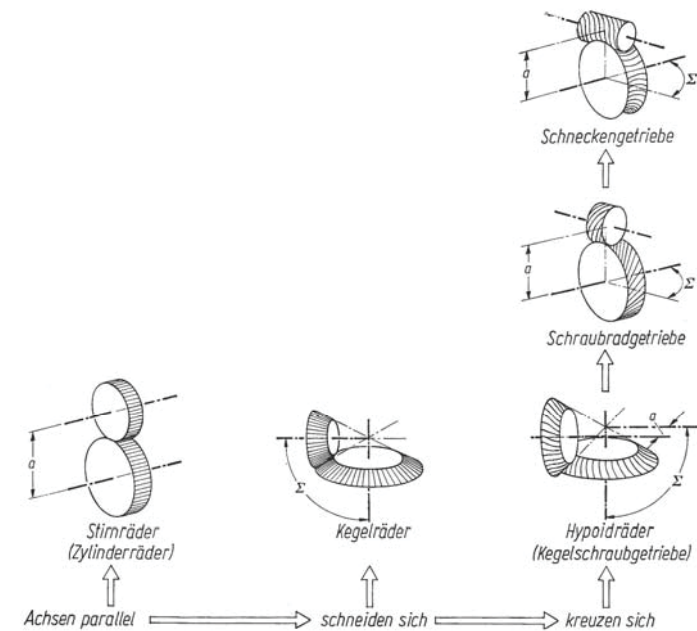
- **Schneckengetriebe** weisen einen Linienkontakt auf, wodurch die Tragfähigkeit steigt. Im Vergleich zu den Stirnradgetrieben ist für den Zahneingriff ein hoher Gleitanteil und geringe Auftreffgeschwindigkeiten der Flanken kennzeichnend. Hieraus ergeben sich gegenüber anderen formschlüssigen Wälztrieben folgende:

Vorteile:

- hohe Übersetzungen
- Selbsthemmung möglich ($\eta < 0,5$)
- Schwingungsdämpfung, geräuscharm

Nachteile:

- Reibungsverluste
- kleiner Wirkungsgrad
- Erwärmung



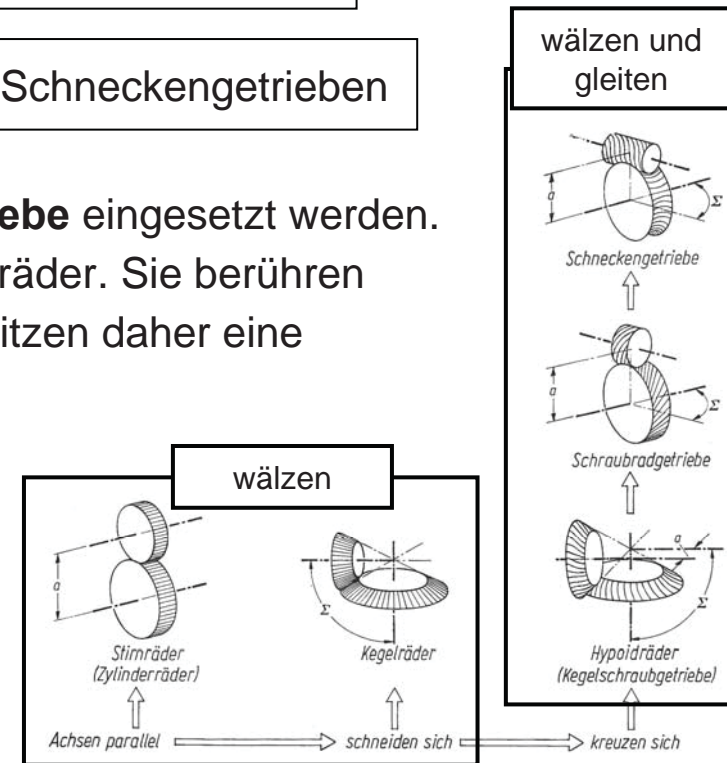
- Bei sich kreuzenden Wellen können **Hypoidgetriebe** eingesetzt werden. Der Achsversatz erlaubt eine beidseitige Lagerung der Wellen.

Vorteile: geräuscharm, beidseitige Lagerung der Wellen möglich
Nachteile: Punktberührung im Eingriff

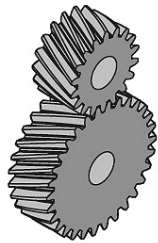
→ Kompromiss zwischen Kegelradgetrieben und Schneckengetrieben

- Alternativ dazu können auch **Schraubradgetriebe** eingesetzt werden. Hierbei handelt es sich um schrägverzahnte Stirnräder. Sie berühren sich im Eingriff ebenfalls nur punktförmig und besitzen daher eine geringe Tragfähigkeit.

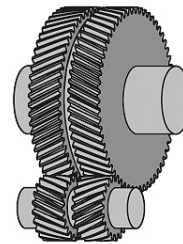
→ für Verstellbewegungen geeignet



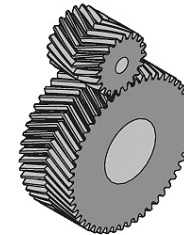
- Die Änderung von Geradverzahnung zu Schrägverzahnung führt zu einer Steigerung der Tragfähigkeit sowie Verbesserung der Geräuschkulisse. Dabei treten Axialkräfte F_a auf.



Schrägverzahnung



Doppelschrägverzahnung

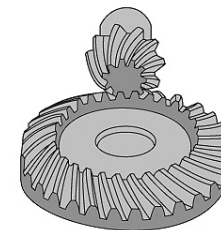


Pfeilverzahnung

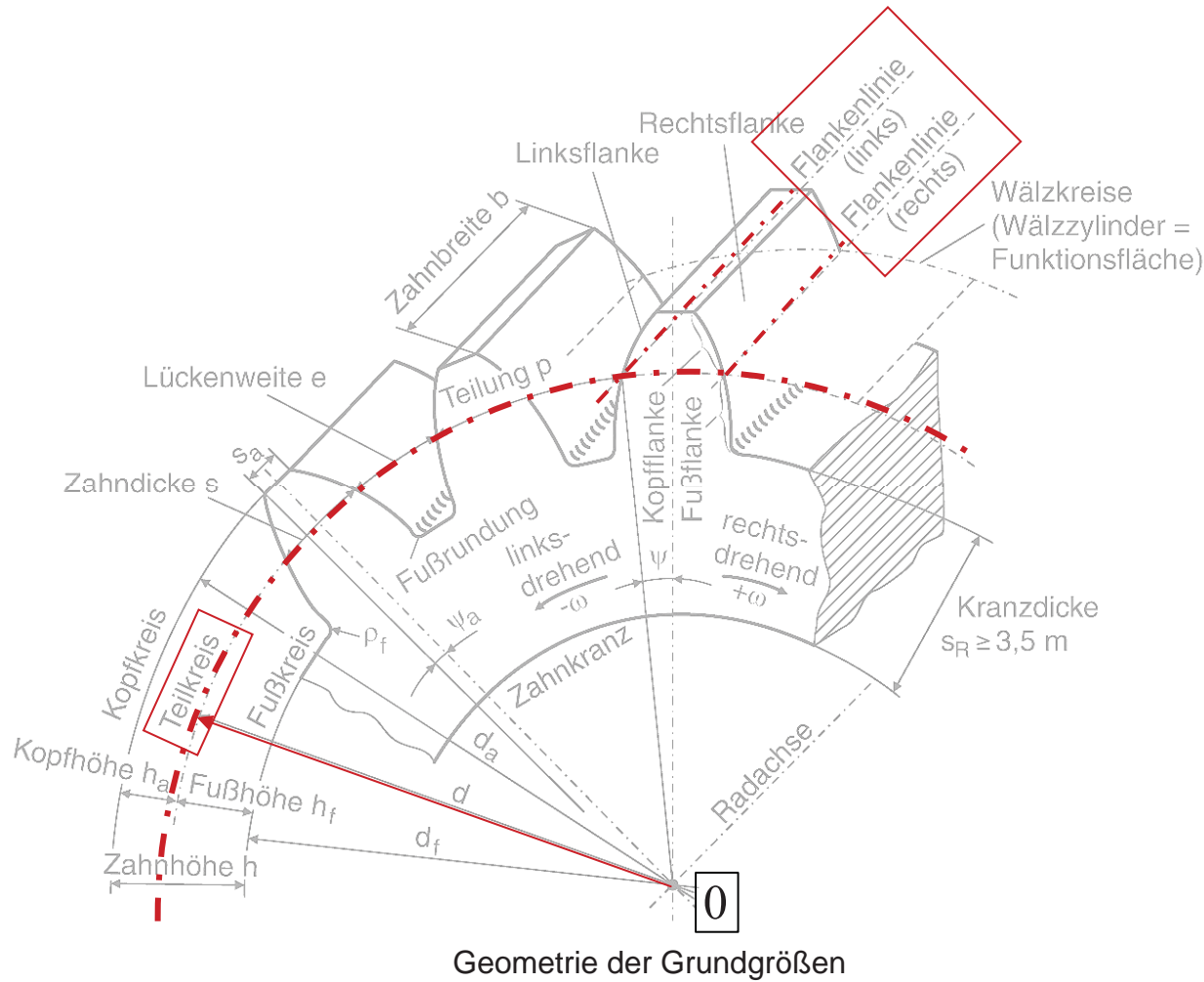
Aufnahme von F_a über Axiallager

Axialkräfte gleichen sich innerhalb der Verzahnung aus

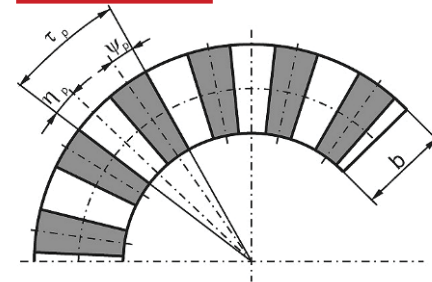
- Auch bei Kegelrädern gibt es Schrägverzahnungen, wodurch bessere Geräusch- und Trageigenschaften erzielt werden.



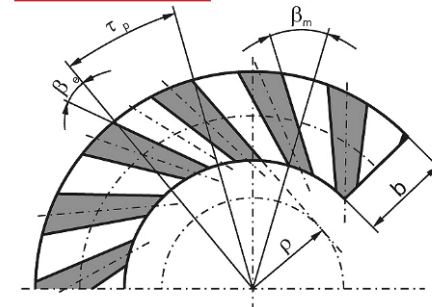
2.2.2 Verlauf der Flankenlinie



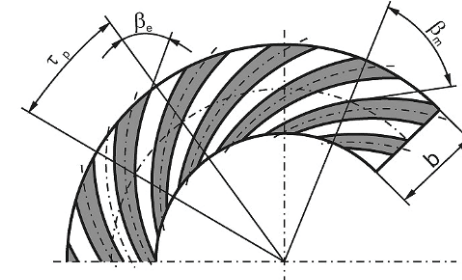
Geradverzahnung



Schrägverzahnung



Bogenverzahnung $\beta_m > 0$ (rechtssteigend)



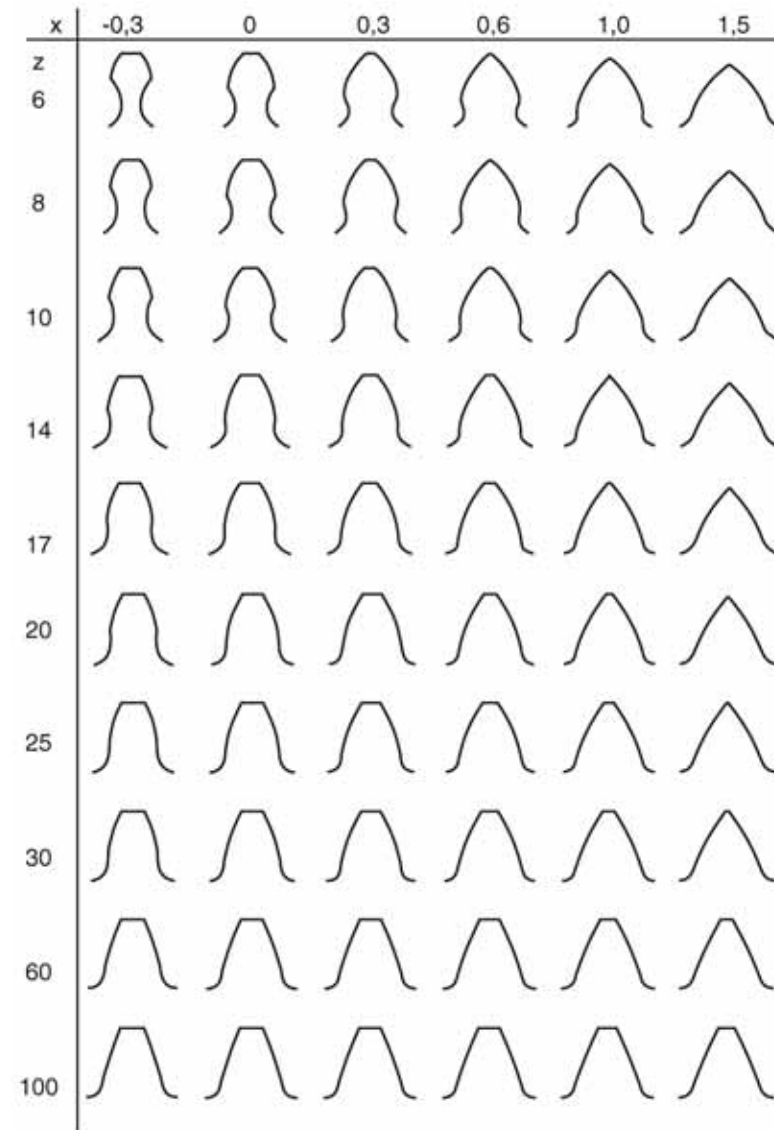
Zahnverlauf an Kegelhätern auf dem abgewickelten Kegelmantel

2.2.3 Zahnprofil

- Die Form der Zahnflanken ist grundsätzlich beliebig. Die für eine Flanke gewählte Form bestimmt aber die Form der Gegenflanke am Gegenrad. Praktisch beschränkt man sich auf Flankenformen, die einfach herstellbar sind. Die größte Verbreitung haben die Evolventen- und die Zykloidenverzahnung

x ... Profilverschiebung
z ... Zähnezahl

Zahnformen außenverzahnter Stirnräder für ein Bezugsprofil nach DIN 867



2.3 Allgemeine Begriffe

- Um die Zwangsbewegung aufrecht zu erhalten, müssen mindestens zwei Zähne ständig im Eingriff sein. Aus dieser Tatsache können allgemeine Begriffe für die Verzahnung hergeleitet werden:
 - **Teilung p :** ... pitch = Profilabstand auf dem Wälzkreis

Zur Aufrechterhaltung des Eingriffs teilt man den Umfang in z gleiche Teile.

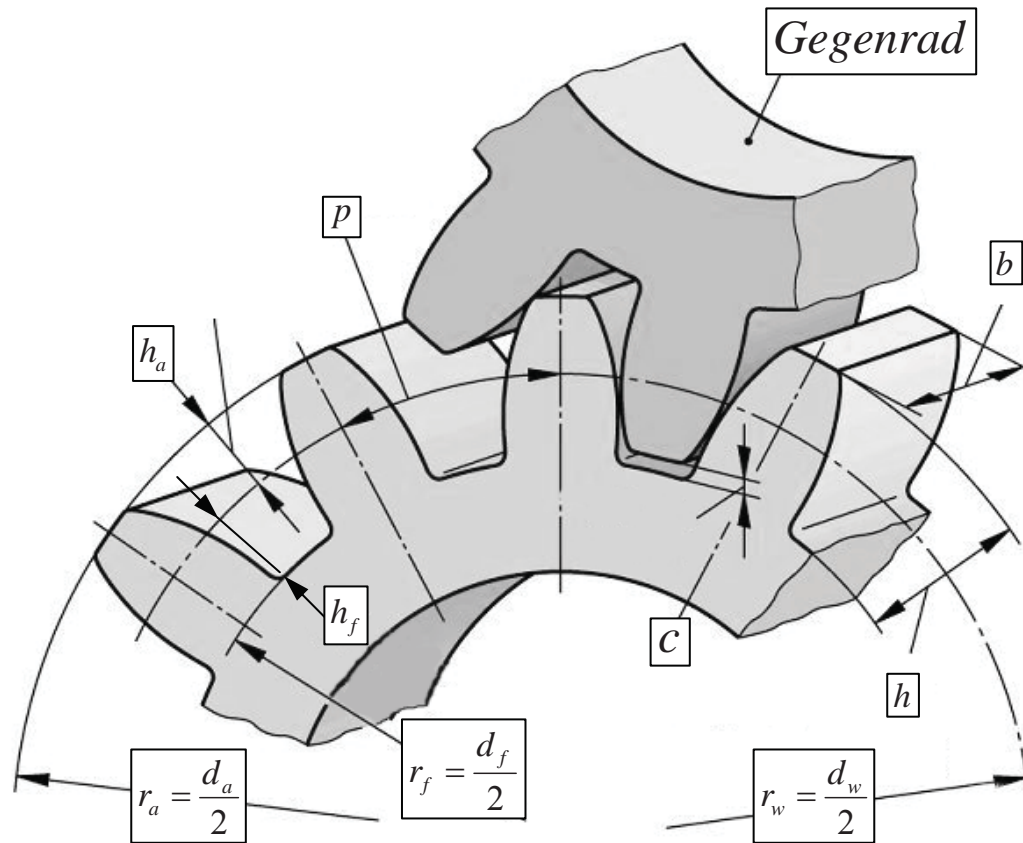
$$2 * \pi * r_w \equiv z * p$$

z ...Anzahl der Zähne

r_w ...Teilkreisradius = Wälzkreisradius

(Unzulässige) Dicken- und Stellungsfehler der Zähne müssen vermieden werden.

$$\rightarrow p = p_1 = p_2$$



- b ... Zahnbreite
- h ... Zahnhöhe
- h_a ... Kopfhöhe
- h_f ... Fußhöhe
- c ... Kopfspiel
- r_a ... Außenradius = Kopfkreisradius
- r_f ... Fußkreisradius
- p ... Teilung

- **Modul m:** ... ist als Rechengröße definiert [mm]

$$m = \frac{2 * r_w}{z} = \frac{p}{\pi}$$

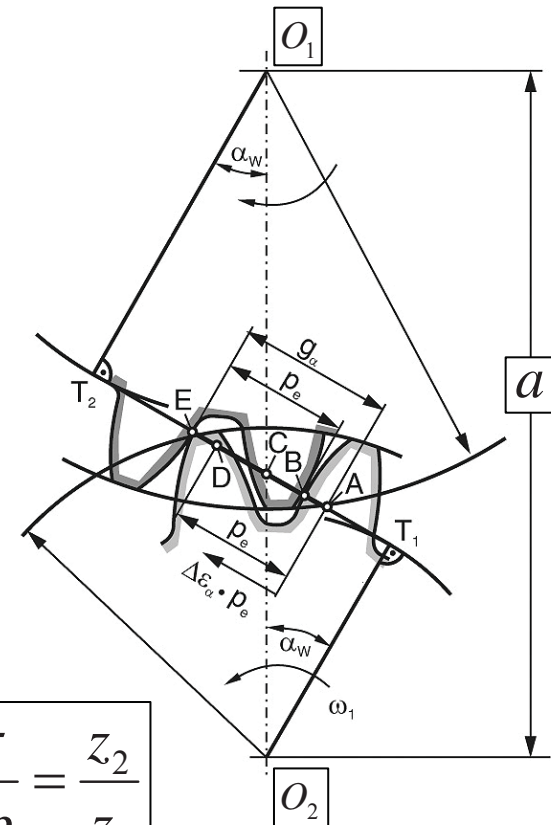
Damit lassen sich wichtige Verzahnungsgrößen als Funktion von Modul und Zähnezahl beschreiben:

- **Übersetzung:**

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2 * p}{2 * \pi}{z_1 * p} = \frac{z_2}{z_1}$$

- **Achsabstand:**

$$\overline{O_1 O_2} = a = r_{w1} + r_{w2} = \frac{z_1 * m}{2} + \frac{z_2 * m}{2} = \frac{m}{2} * (z_1 + z_2)$$



- Aus diesem Zusammenhang ergibt sich die wichtige Kenngröße zur Beurteilung der gleichförmigen Bewegungsübertragung durch Formschluss:

Profilüberdeckung bzw. Überdeckungsgrad ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_e} \geq 1 \text{ (theoretisch); } \geq 1,25 \text{ (praktisch)}$$

g_α ... Eingriffsstrecke

p_e ... Eingriffsteilung

- Der Überdeckungsgrad wird mit zunehmender Zähnezahl größer.
→ bei der Paarung zweier Zahnstangen ist $\varepsilon = \infty$

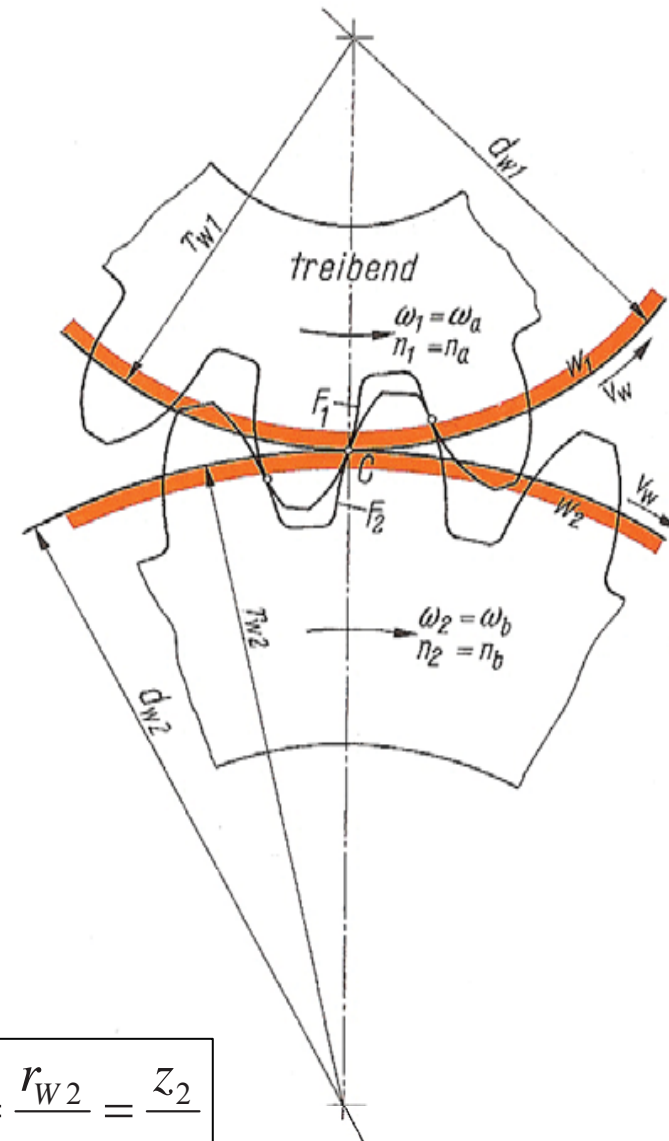
2.4 Verzahnungsgesetz

- Zur gleichförmigen und stoßfreien Übertragung einer Drehbewegung muss eine konstante Übersetzung $i = \text{const}$ eingehalten werden. Hierzu wird für ein gegebenes Profil ein Gegenprofil ermittelt, dessen Kontur mithilfe des allgemeinen Verzahnungsgesetzes genau bestimmt werden kann.
- Im Wälzpunkt C betragen die Umfangsgeschwindigkeit v_W :

$$|v_W| = d_{W1} * \pi * n_1 = d_{W2} * \pi * n_2$$

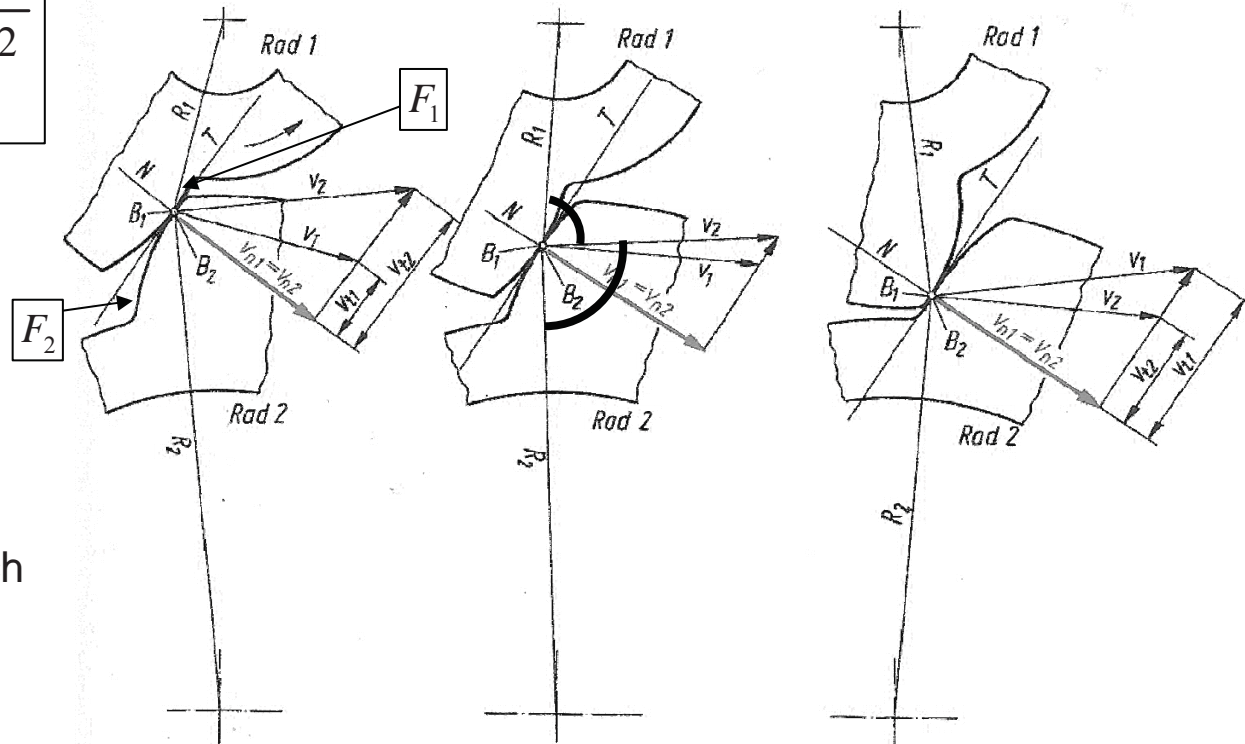
und die Übersetzung i :

$$|i| = \frac{n_a}{n_b} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = \frac{z_2}{z_1}$$



- Die aufeinander abgestimmte Form der Zahnflanken F_1 und F_2 muss einen kontinuierlichen Bewegungsablauf gewährleisten. $\rightarrow i = const$

$$v_i = \sqrt{v_{n,i}^2 + v_{t,i}^2}$$



- Die Normalgeschwindigkeiten sind in jeder Berührungsphase gleich groß.

$$v_{n1} = v_{n2}$$

\rightarrow Normalgeschwindigkeiten entsprechen praktisch den Umfangsgeschwindigkeiten.

- In diesem Beispiel berühren sich willkürlich gestaltete Zahnflanken momentan mit den beiden Flankenpunkten B_1 und B_2 . Die Räder bewegen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 .

$$v_1 = \omega_1 * R_1$$

$$v_2 = \omega_2 * R_2$$

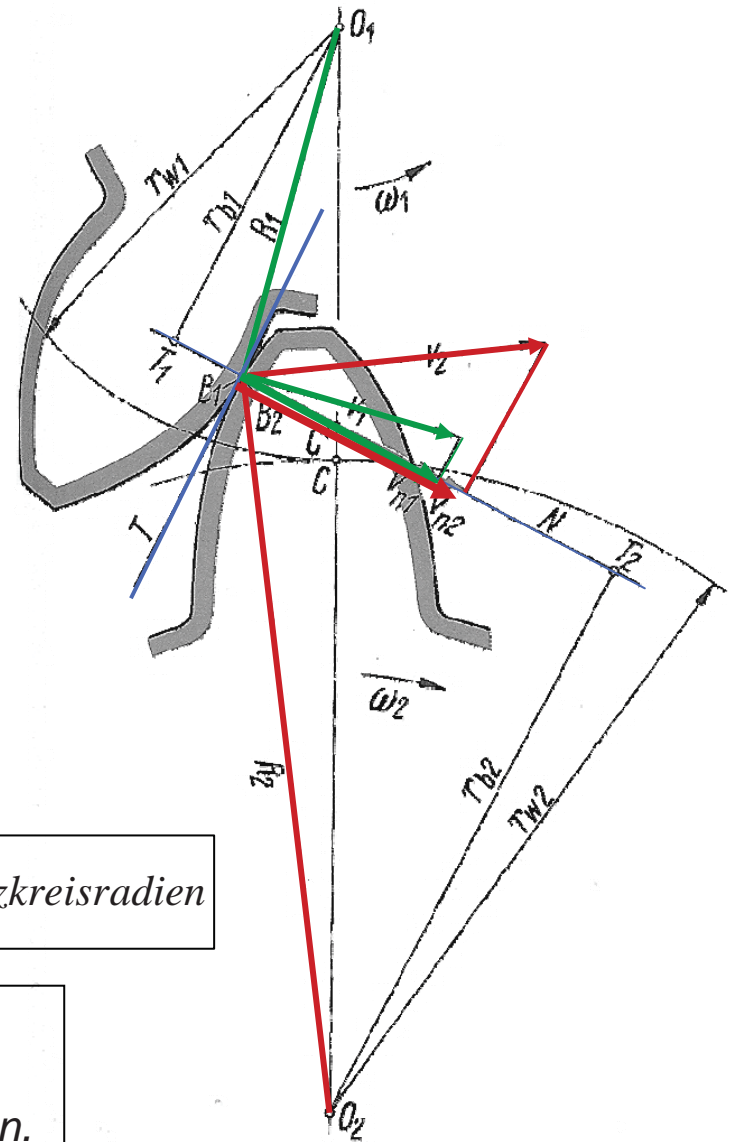
Die Zerlegung in Tangential- und Normalgeschwindigkeit zeigt, dass die geforderte Bedingung

$$v_{n1} = v_{n2}$$

nicht erfüllt ist.

$$r_w = \frac{d_w}{2} = T_w \dots = \text{Wälzkreisradien}$$

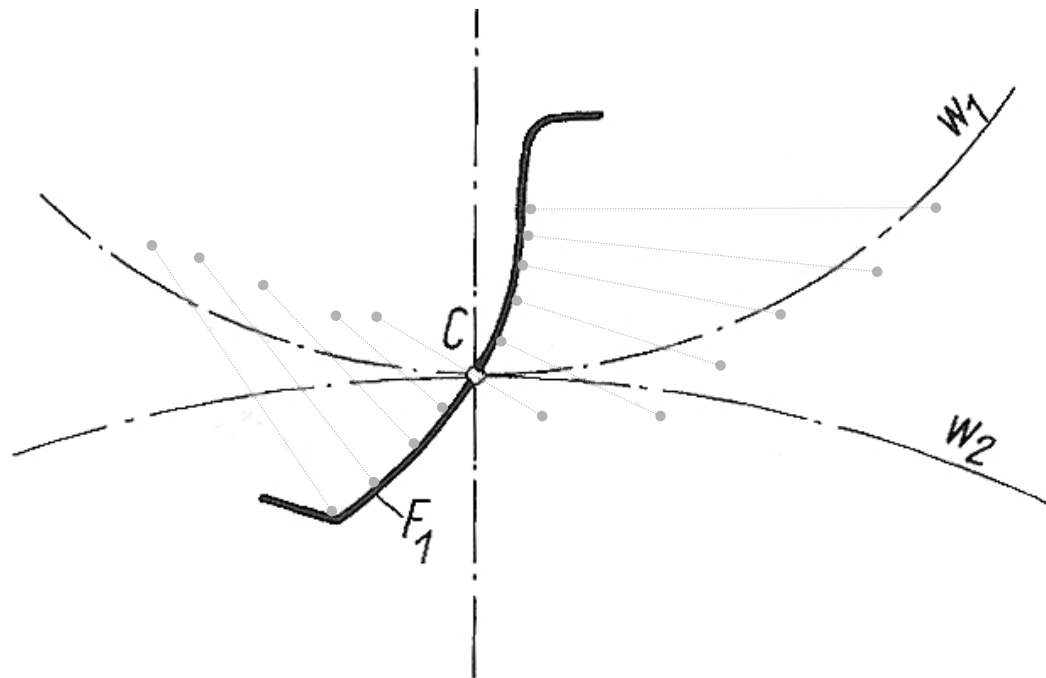
Verzahnungsgesetz:
 Die Normale im jeweiligen Berührungspunkt zweier Zahnflanken muss stets durch den Wälzkreis gehen.



- Herleitung – 1. Schritt

Voraussetzung 1: Alle Normalen der Flanke F_1 müssen den Wälzkreis w_1 schneiden

Voraussetzung 2: Flanken müssen sich im Wälzpunkt C berühren.



- Herleitung – 2. Schritt

B_1 wählen

T

N

$$n = \overline{B_1 W_1}$$

$$CW_1 = CW_2$$

drehen:

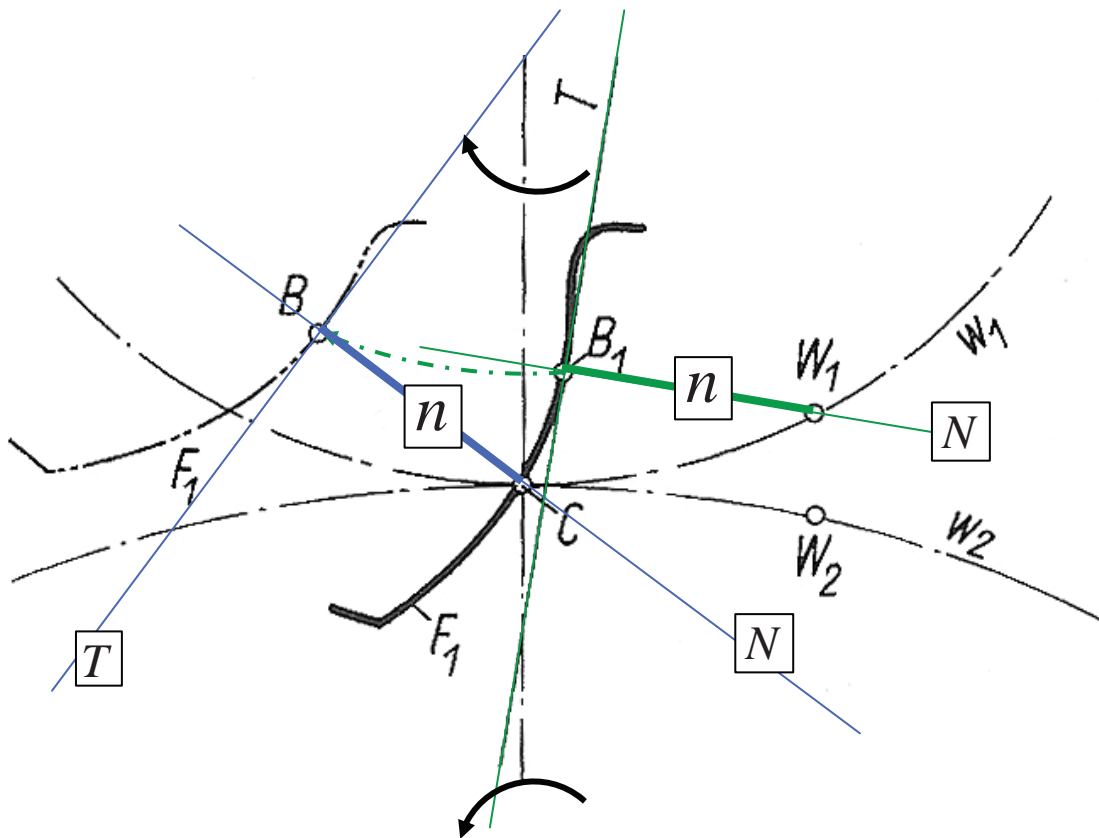
W_1 und $W_2 \rightarrow C$

N geht durch C

\rightarrow Verzahnungsgesetz

$$n = \overline{B_1 W_1} = \overline{BC}$$

$$B = B_1 = B_2$$



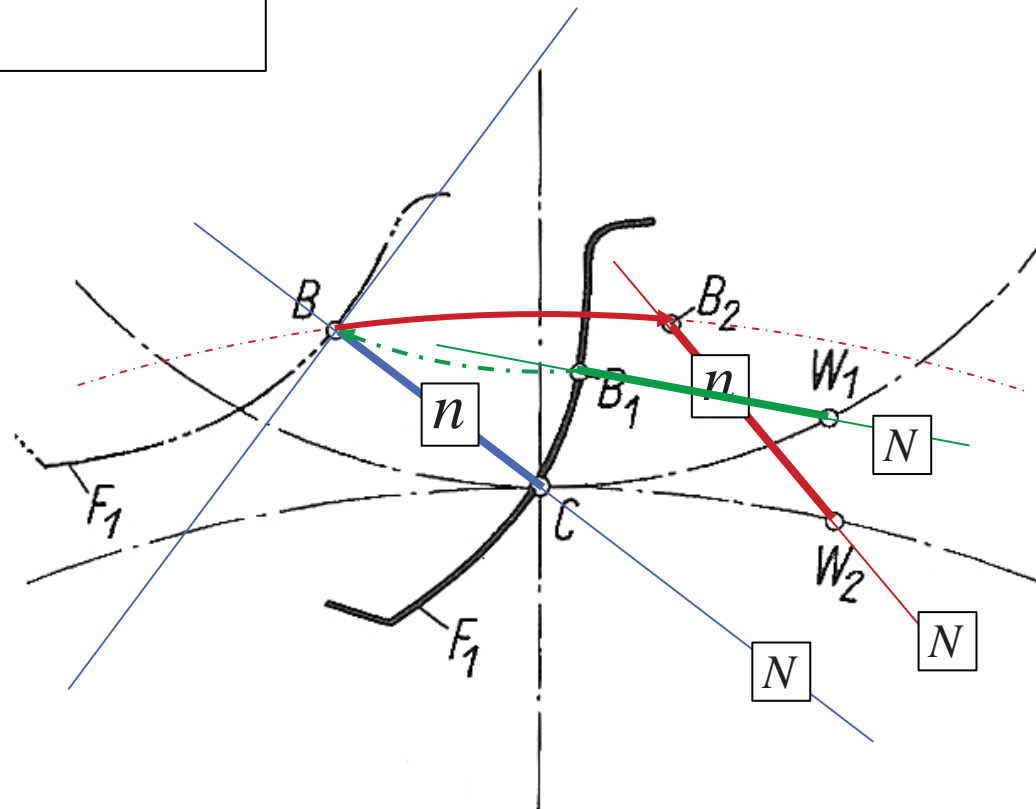
- Herleitung – 3. Schritt

zurückdrehen um den gleichen Betrag

$C \rightarrow W_1$ bzw. W_2

$B \rightarrow B_1$ bzw. B_2

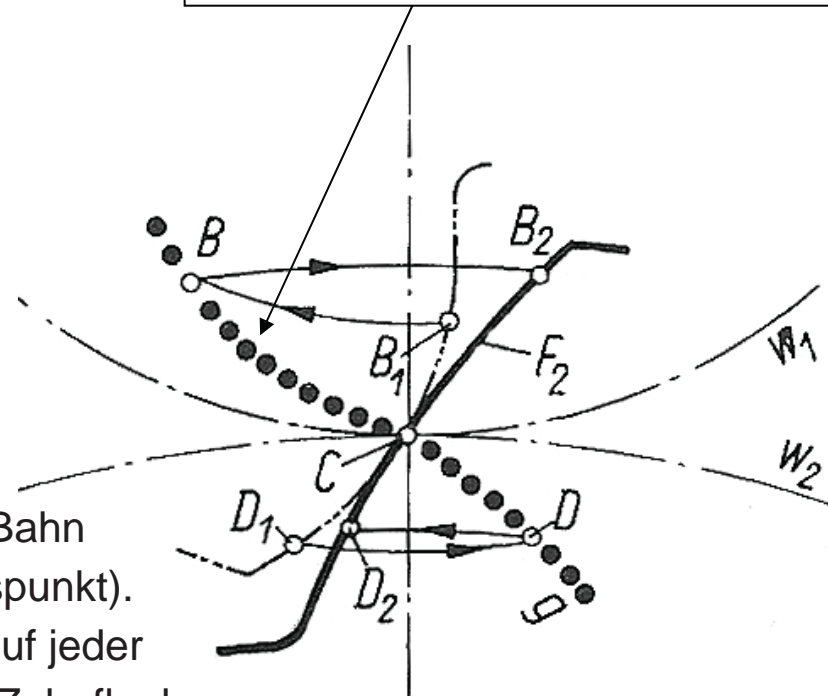
$$n = \overline{BC} = \overline{B_1W_1} = \overline{B_2W_2}$$



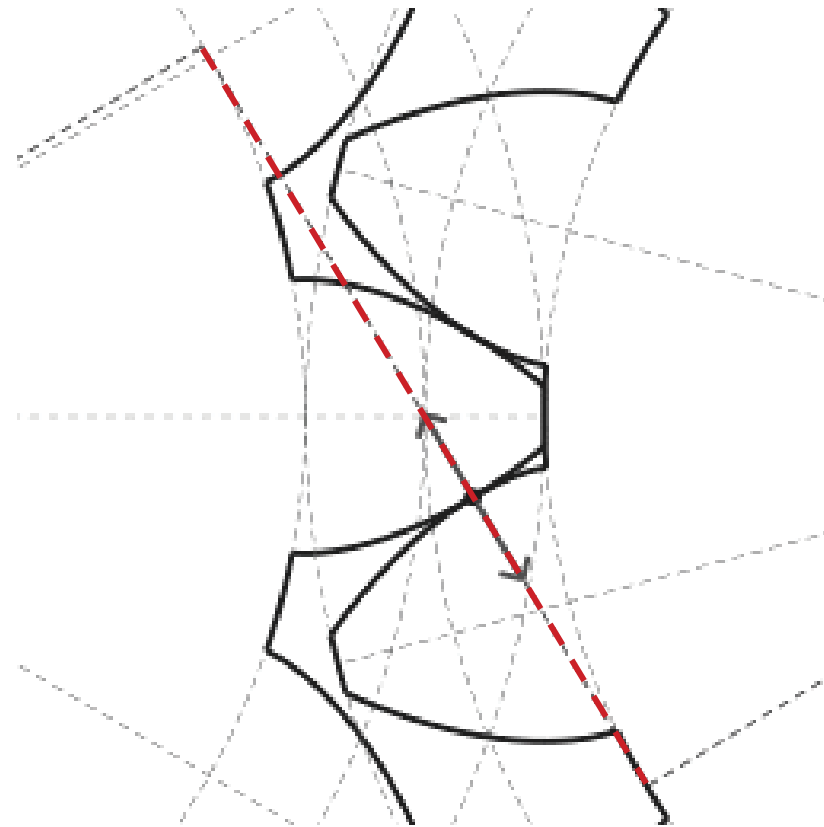
- Herleitung – 4. Schritt

Wiederholen der Schritte 2 und 3 bis Gegenflanke F_2 erzeugt ist.

Eingriffslinie
räumlich → Eingriffsfläche bzw. Eingriffsfeld



- Die Eingriffslinie ist die absolute Bahn des Berührungspunktes (Eingriffspunkt). Dabei wandert der Berührungspunkt auf jeder Zahnflanke entlang, weshalb die Zahnflanken als relative Bahnen des Berührungspunktes anzusehen sind.



Evolutenverzahnung im Eingriff
Nur eine der beiden Eingriffslinien ist dargestellt

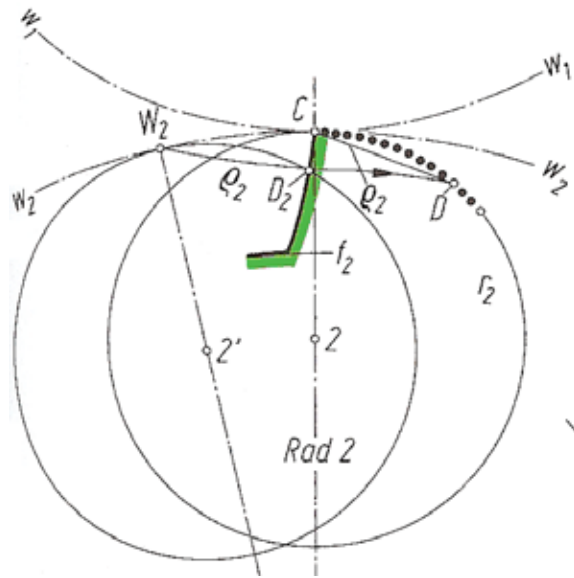
2.5 Verzahnungsgeometrien

- In Erweiterung zur kinematischen Grundanforderung der konstanten Übersetzung sollten Verzahnung über folgende Eigenschaften verfügen.

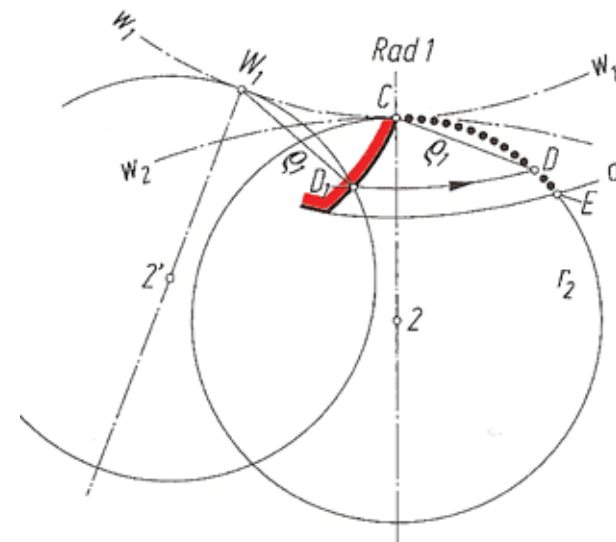
- hohe Tragfähigkeit
- hoher Wirkungsgrad → geringe Verlustleistung
- geräuscharm
- einfache Fertigung, einfache Werkzeugformen (heute geringere Einschränkungen)
- Unempfindlich gegen Fertigungsabweichungen

- Keine der gängigen Verzahnungen erfüllt alle oben aufgeführter Anforderungen.

- Mit dem Rollkreis r_2 ist analog zu verfahren. Es ergeben sich dann die Fußflanke des Rades 2 (Hypozykloide 2) und die Kopf flanken des Rades 1 (Epizykloide 1).



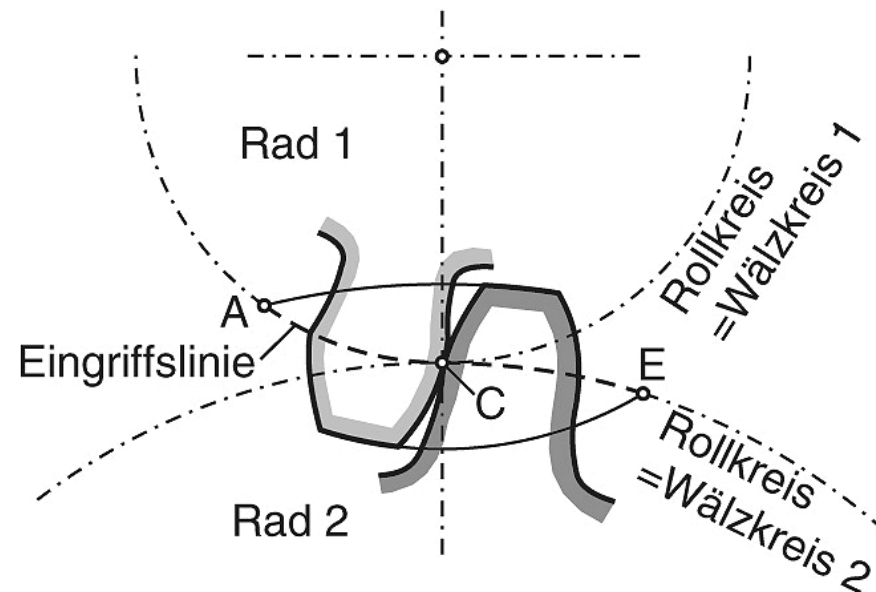
Entstehung der Fußflanke am Rad 2



Entstehung der Kopf flanken am Rad 1

- Abschließend sind auf den Wälzkreisen noch die Zahndicken abzutragen und die Gegenflanken beider Zähne symmetrisch zur jeweiligen Zahnmittelebene zu zeichnen.

- Bei der Punktverzahnung sind Roll- und Wälzkreisdurchmesser identisch. Die Fußflanke schrumpft dabei zu einem Punkt zusammen, mit dem der Zahnkopf des Gegenrades in Eingriff kommt. Je nachdem, ob ein oder zwei Rollkreise den zugehörigen Wälzkreisdurchmessern entsprechen, wird zwischen einfacher und doppelter Zykloidenverzahnung unterschieden.



Doppelte Punkterzahnung
Sonderverzahnung

Eigenschaften der Zykloidenverzahnung

Vorteile:

- gegenüber Evolventenverzahnung kleinere Ritzelzähnezahlen möglich

→ $z_{\min} = 4$ in Kombination mit einer Zahnstange

- Durch das Zusammenwirken einer konkaven mit einer konvexen Zahnflanke ergibt sich eine gute Schmiegun

→ kleinere Flankenpressung → geringerer Verschleiß (mit Ausnahme in C)

Nachteile:

- Da Epo- und Hypozykloide durch einen Wendepunkt voneinander geometrisch separiert sind, müssen während der Fertigung die Überdeckung von Betriebs- und Erzeugungswälzkreisen gewährleistet sein.
- Herstellung teuer, da Wälzwerkzeuge Hohlflanken aufweisen.
- kleine Abweichung bei Achsabstand führt zu periodischem Drehwinkelfehler

Nachteile:

- Während des Zahneingriffs ist Winkel ϑ veränderlich
 → Betrag und Richtung der Zahnkraft ändern sich.

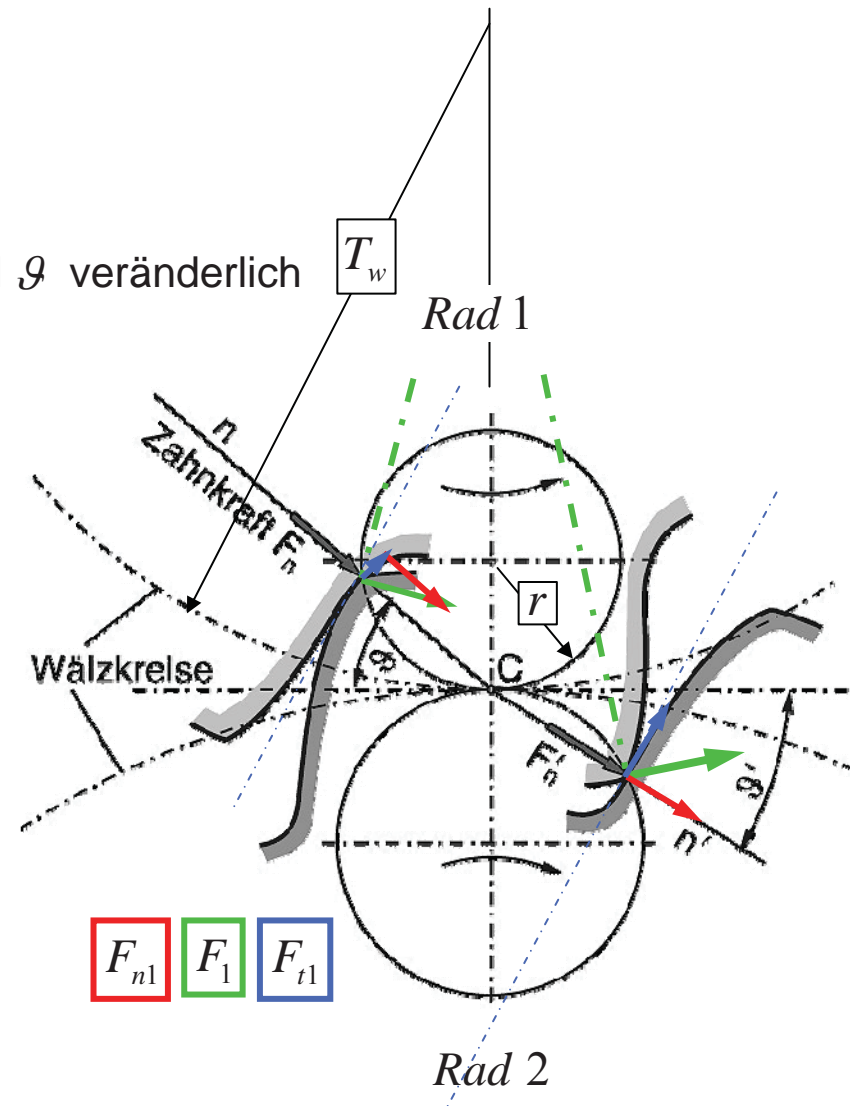
$$\vartheta \uparrow \Rightarrow r \downarrow$$

Zahn- und Achskräfte groß
 → unruhiger Lauf

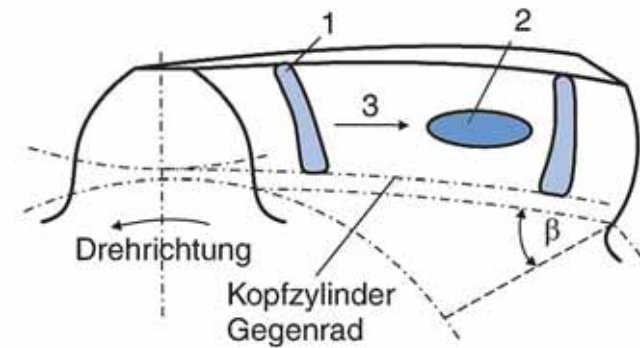
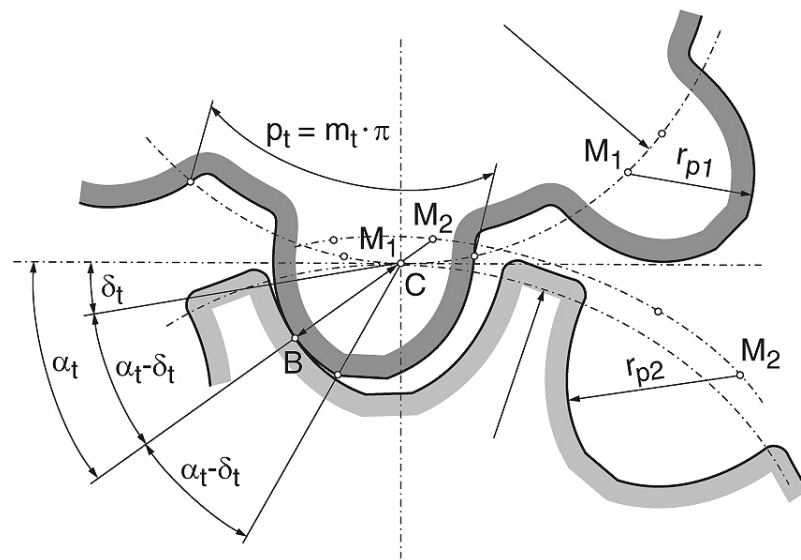
$$\vartheta \downarrow \Rightarrow r \uparrow$$

Zunahme der relativen
 Gleitgeschwindigkeit
 → Verschleiß

→ Anhaltswert: $r \approx \frac{1}{3} * T_w$



2.5.2 Wildhaber-Novikov-Verzahnung



Lage und Form der Hertz'schen Abplattungsfläche:

- 1: Für $r_1 = r_2$
- 2: Für $r_1 < r_2$
- 3: Verschieberichtung

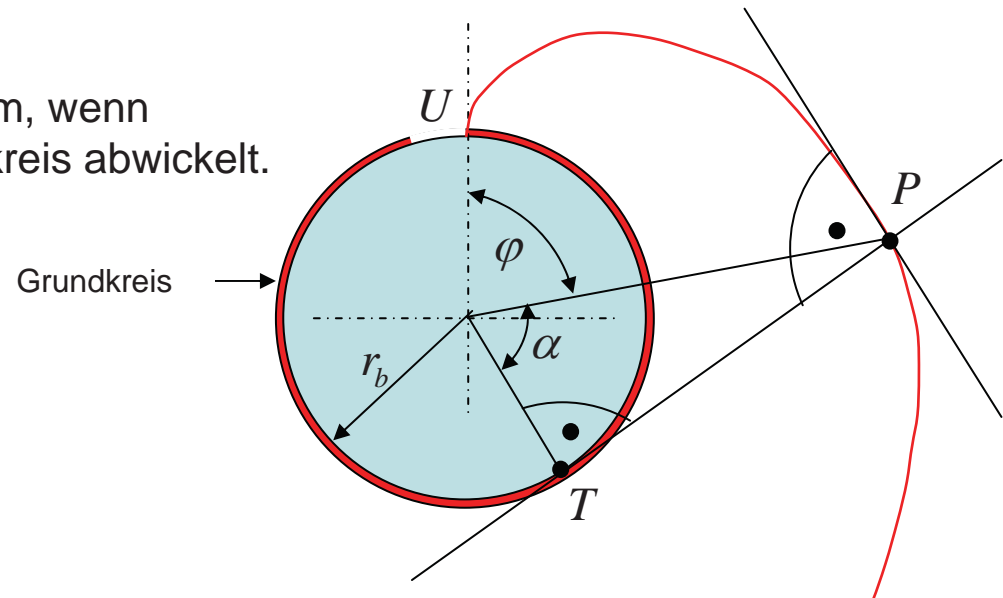
Wildhaber-Novikov-Verzahnung

- Bei der Wildhaber-Novikov-Verzahnung verfügen die gepaarten Räder in ihrer Grundform über konvexe und konkave Profile, die durch Kreisbögen gebildet werden. Der Kontakt erfolgt dabei über den gesamten Halbkreis. Infolge der parallel liegenden Eingriffslinie, besteht während des Kontaktes keine Stirnüberdeckung. Damit jedoch der Formschluss vollzogen werden kann, muss die Verzahnung als Schrägverzahnung ausgeführt werden.
- Unter Belastung wird aus dem Punkt- ein Flächenkontakt, der über die Zahnbreite wandert. Es liegen günstige Schmierbedingungen vor. Weiterhin liegen in jedem Berührungspunkt gleich große Gleitgeschwindigkeiten vor, wodurch ein gleichmäßiger Flankenabtrag erfolgt
- Durch die vergleichsweise geringe Flankenpressung kann gegenüber der Evolventenverzahnung kann in der Praxis die 1,5fache Umfangskraft übertragen werden.

2.5.3 Evolventenverzahnung

- Die Kreis-Evolvente als Flankenform, wenn man einen faden auf einem Grundkreis abwickelt.

φ ... Polarwinkel
 α ... Pressungswinkel



- Es gilt die Bedingung:

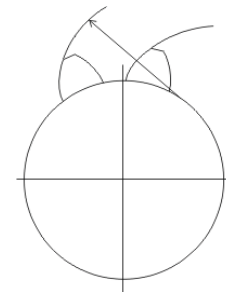
$$\widehat{UT} = \overline{PT}$$

$$r_b * (\varphi + \alpha) = r_b * \tan(\alpha)$$

- Durch Gleichsetzen und Kürzen von r_b erhält man die Evolventenfunktion:

$$\varphi = \text{inv}\alpha \equiv \tan \alpha - \hat{\alpha} = \tan \alpha - \frac{\alpha * \pi}{180^\circ}$$

Geometrische Herleitung einer Evolventenverzahnung



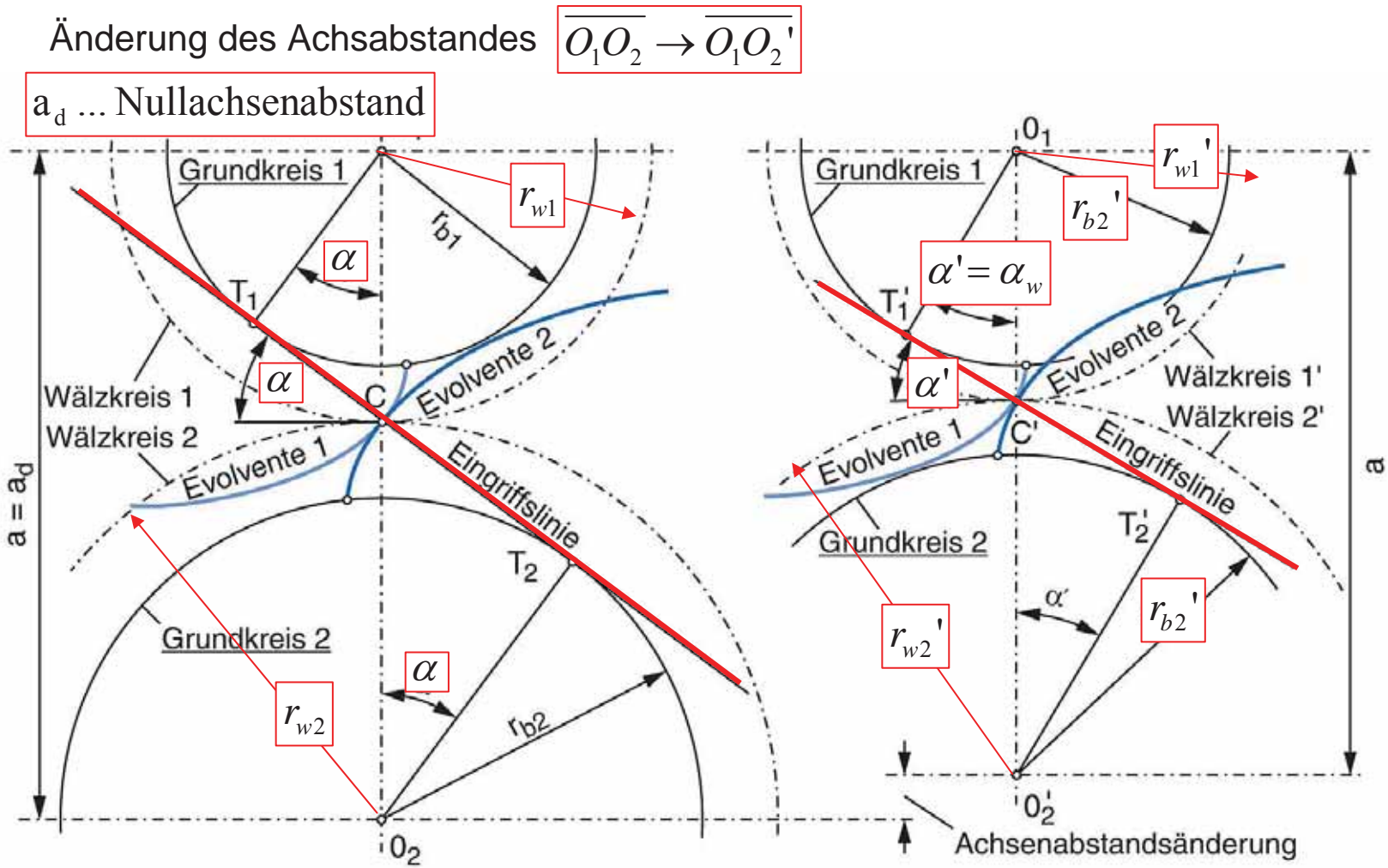
- Die Evolventenfunktion ist eine Winkelfunktion, die bei der Verzahnungsberechnung herangezogen wird. Ihre Form ist dabei abhängig vom Grundkreis:

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------------------------|
| - kleiner Grundkreis: | stark gekrümmte Evolvente |
| - großer Grundkreis: | schwach gekrümmte Evolvente |
| - $r_b \rightarrow \infty$: | Evolvente entspricht einer Geraden
→ Geradverzahnung |

- Die Evolventenverzahnung erfüllt die Merkmale des Verzahnungsgesetzes, die sind:

Erzeugende Tangente \overline{PT} = Profilmnormale = Tangente um r_b = Eingriffslinie

- Bei der Paarung zweier Räder mit Evolventenflanken gilt:
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$



Eingriffslinie, Achsabstand a , Betriebseingriffswinkel α, α_w für Außenverzahnung

- Bei Änderung des Achsabstandes $\overline{O_1O_2} \rightarrow \overline{O_1O_2}'$

- bleibt unverändert:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}'}{r_{w1}'} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha'} * \frac{\cos \alpha'}{r_{b1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}}$$

Evolute

- ändert sich:

$$r_{w1} \rightarrow r_{w1}', r_{w2} \rightarrow r_{w2}'$$

$$C \rightarrow C'$$

$$\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha_w \dots \text{Eingriffswinkel}$$

Lage der Eingriffslinie

*→ Eingriffspunkt wandert an anderem Ort
der gleichen Evolute*

Eigenschaften der Evolventenverzahnung

Vorteile

- Erzeugung der Evolvente durch geradflankige Verzahnungswerkzeuge

→ einfache Fertigung

- Unempfindlich gegen Achsabstandsabweichungen.

→ Einhaltung des allgemeinen Verzahnungsgesetzes → const. Übersetzung

- Erzeugung unterschiedlicher Zahnformen und Achsabstände bei gleicher Zähnezahl mit demselben Werkzeug.

- Richtung und Größe der Zahnnormalkraft bleiben unverändert.

→ schwingungsarmer Lauf

Nachteile

- Unterschnitt bei kleinen Zähnezahlen

→ Senkung der Zahnfußtragfähigkeit

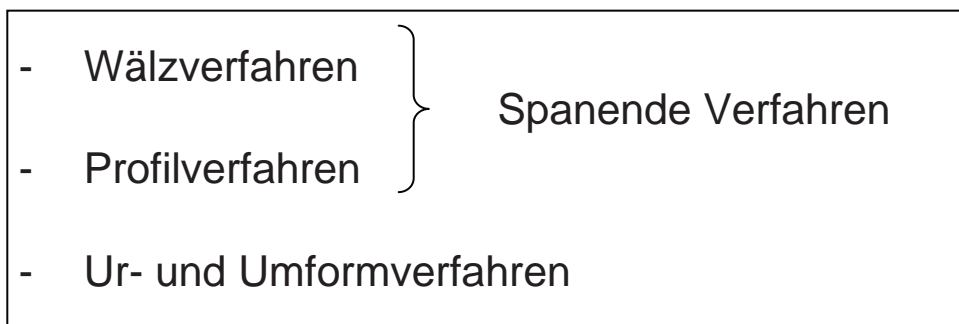
- ungünstige Pressungsverhältnisse bei Außenverzahnungspaarungen

→ durch konkave Flanken geringe Schmiebung

2.6 Herstellung der Evolventenverzahnung

2.6.1. Einleitung

- Die Wahl des Herstellungsverfahrens richtet sich vorrangig nach Werkstoff, Baugröße, Stückzahl, Radart und Genauigkeit. Für die Formgebung eines Zahnrades unterscheidet man folgende Arbeitsprinzipien:

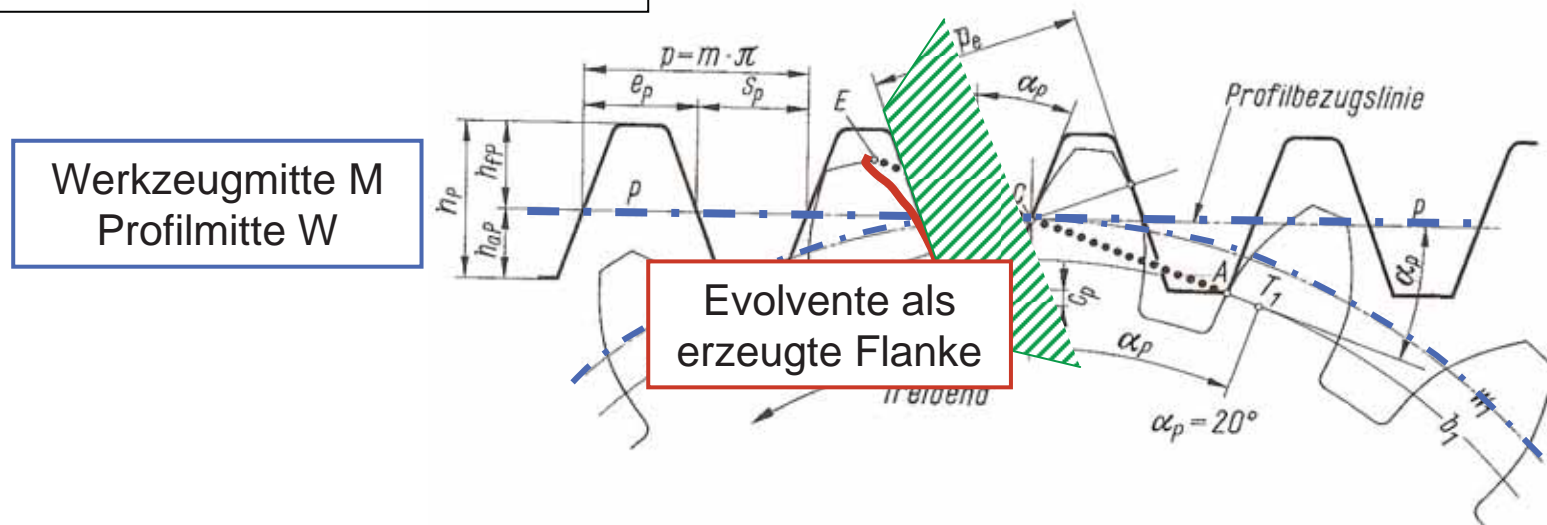


- Im Maschinenbau überwiegen bei $m > 1$ die spanenden Verfahren.

2.6.2. Wälzverfahren

- Aus den dargestellten Zusammenhängen zum Abwälzvorgang leiten sich die Wälzverfahren zur Herstellung von Evolventenverzahnungen ab.
- Insbesondere beim Wälzfräsen wird eines der Räder als Werkzeug ausgeführt. Um bei der Herstellung von Zahnrädern mit verschiedenen Zähnezahlen, Profilverschiebungen und Schrägungswinkel bei gleichem Modul mit ein und demselben Werkzeug zu arbeiten, nutzt man als Werkzeug:

- Zahnstange mit Eingriffswinkel α

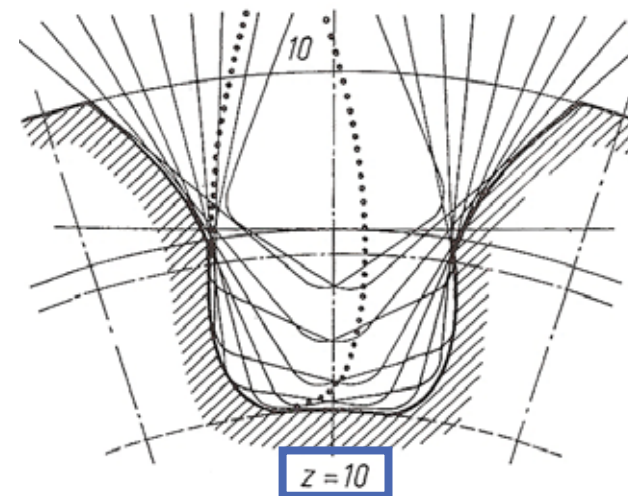
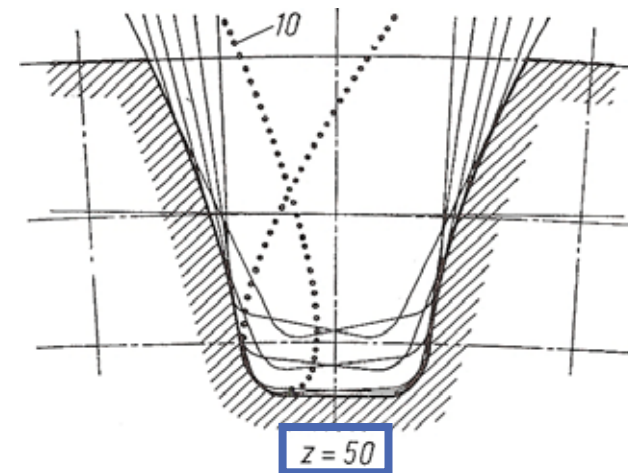


- Bei den Wälzverfahren entsteht die Flankenform als Einhüllende der geradflankigen Werkzeugschneide.
- Beim Wälzfräsen und Wälzschleifen dient zur Erzeugung der Verzahnung ein

- Zahnstangenprofil

Hingegen entspricht das Werkzeug beim Wälzstoßen und Schaben praktisch einem

- Gegenrad



Erzeugen der Zahnflanke im Hüllschnitt-Wälzverfahren

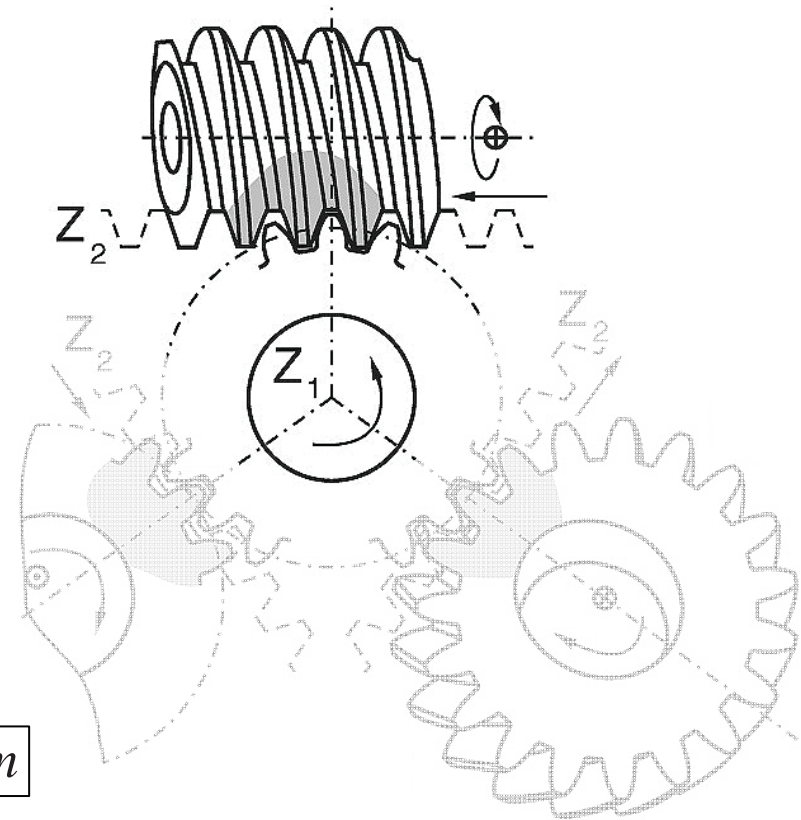
- Beim **Wälzfräsen** (und Wälzschleifen) kommt ein Fräser zum Einsatz, der einer Zylinderschnecke entspricht, die stetig über die Zahnbreite verschoben wird.

→ kontinuierliches Wälzverfahren

- Radabmessungen: $1,5 \text{ mm} \leq d \leq 12 \text{ m}$

Moduln: $0,1 \text{ mm} \leq m \leq 50 \text{ mm}$

- Einsatzbereiche:
 - Vor- und Fertigbearbeitung ungehärteter und gehärteter Verzahnungen im Einzel- und Großserienbereich
 - sowie in der Schlichtbearbeitung einsatzgehärteter Stähle, erreichbare Qualität liegt bei 6 bis 7.



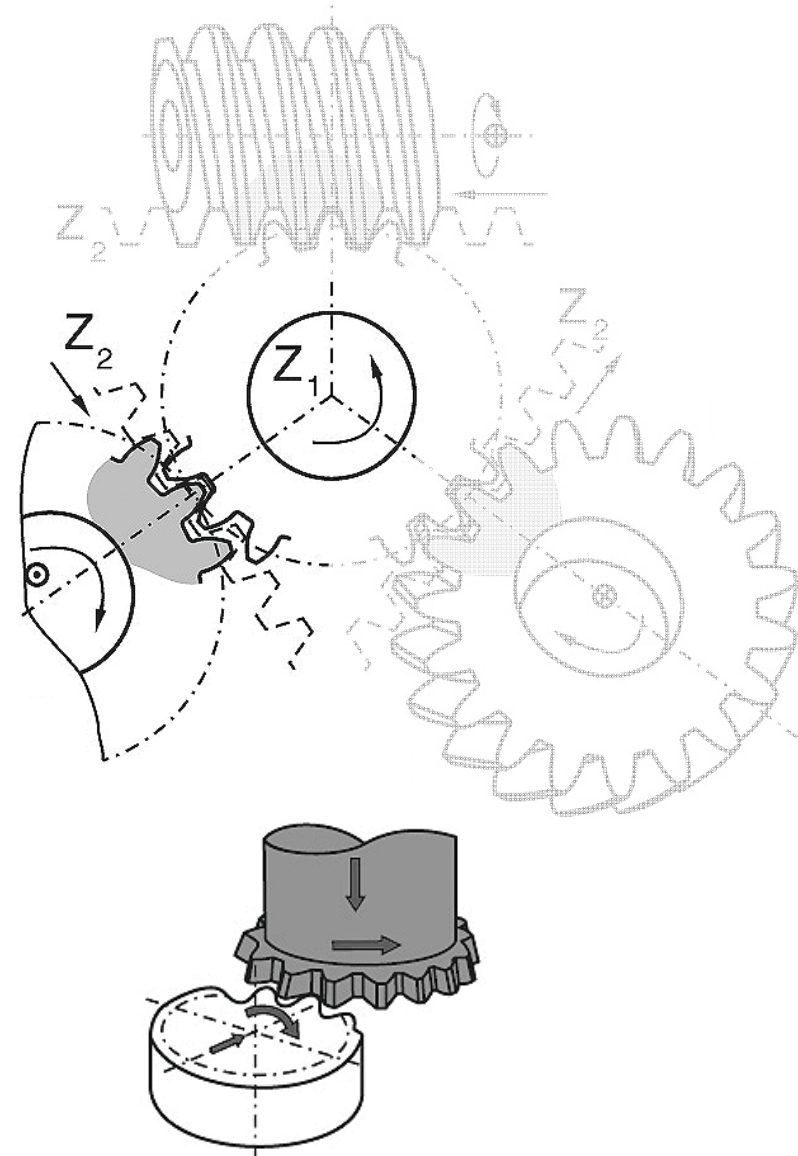


Wälzfräser



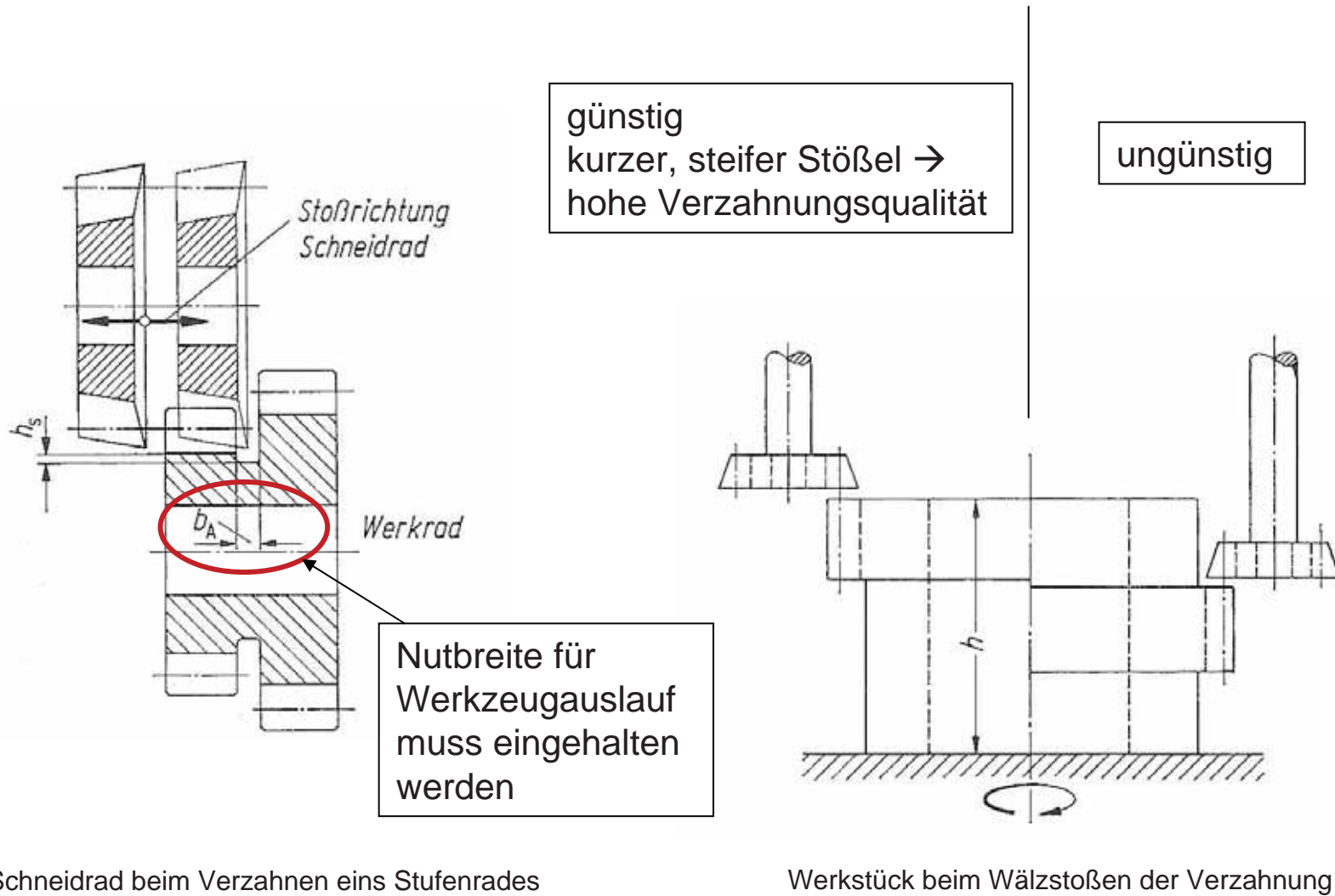
Wälzfräsen

- Beim **Wälzstoßen** wird ein Gerad- oder Schrägstirnrad mit hinterschlifflenen Zahnflanken und Außendurchmesser, wobei der Hinterschliff der Profilverschiebung entspricht. Während des kontinuierlichen Abwälzvorgangs wird axial eine hin- und hergehende Stoßbewegung vollzogen.
- Radabmessungen: $1,5 \text{ mm} \leq d \leq 4,5 \text{ m}$
Moduln: $m \leq 20 \text{ mm}$
Zahnbreite: $b \leq 500 \text{ mm}$
- Einsatzbereiche:
 - Vor- und Fertigbearbeitung ungehärteter Verzahnungen in Einzel- und Mittelserienfertigung, erreichbare Qualität liegt bei 6.

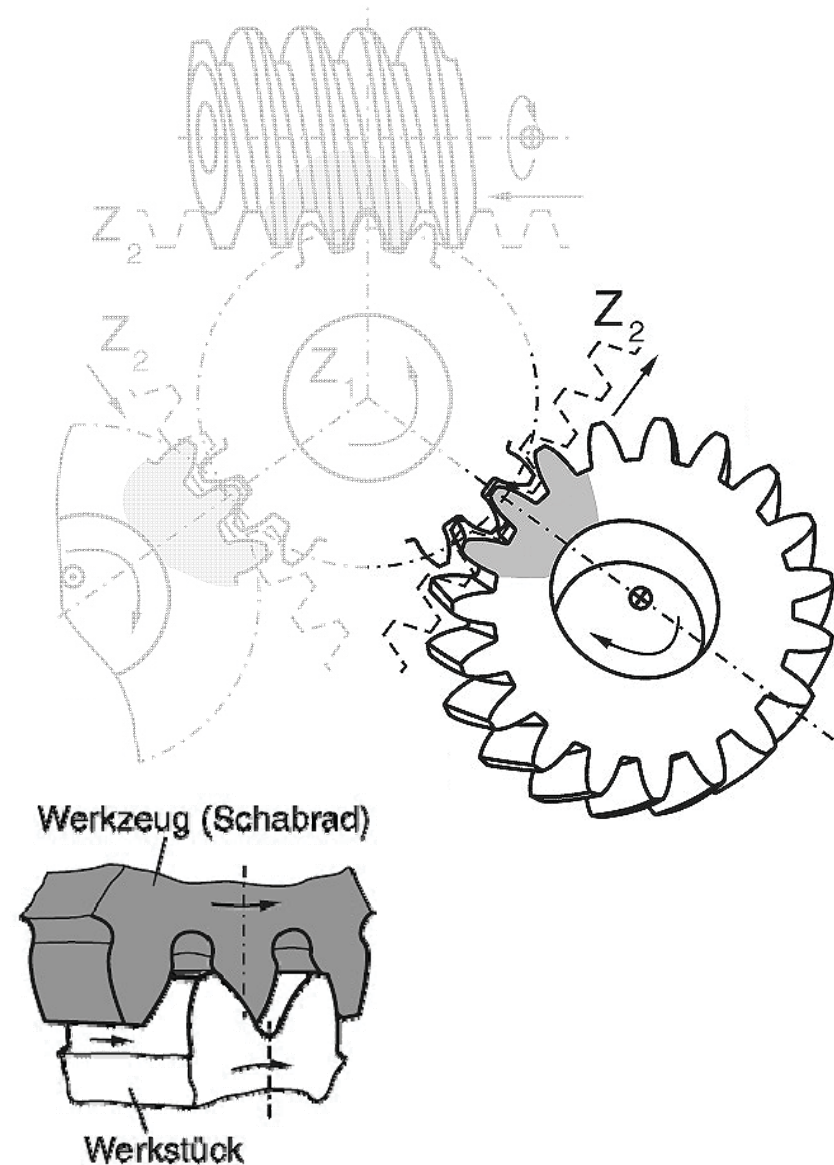




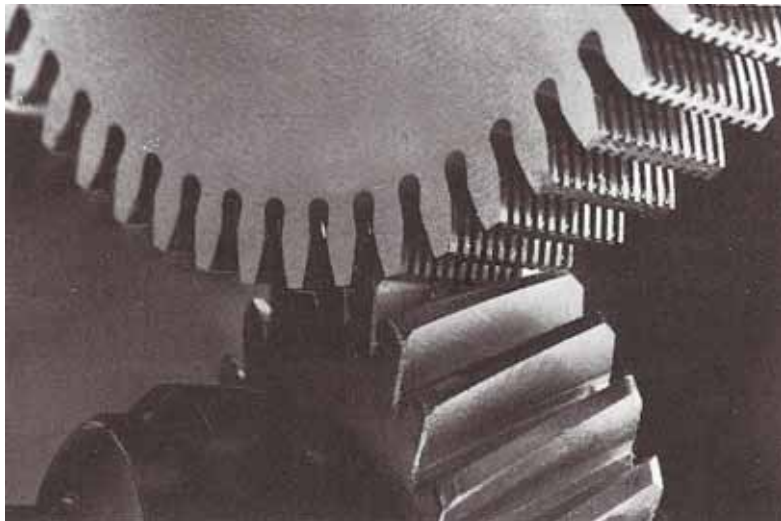
Wälzstoßen



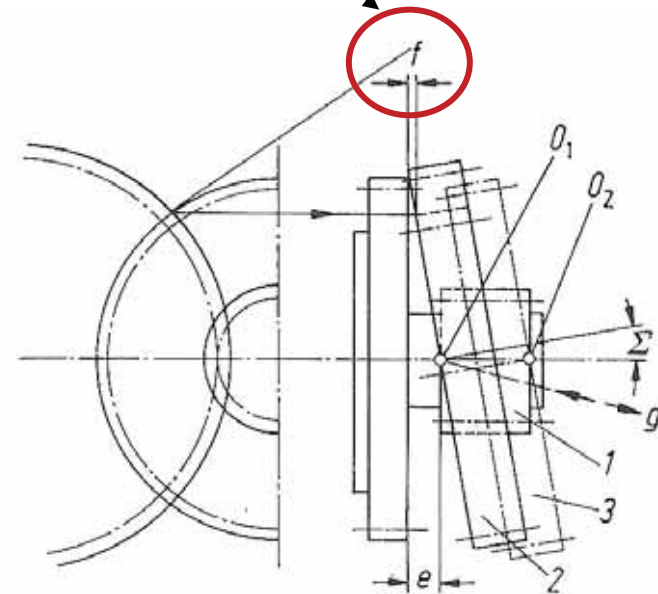
- Das **Wälzschaben** stellt ebenfalls ein (kontinuierliches) Schraubwälzverfahren mit einem stirnrädförmigem Werkzeug dar. Jedoch resultiert hierbei die Schnittkraft aus dem radialen Ineinanderverschieben der Verzahnungen.
- Richtungskorrekturen bzw. Zahnendrücknahmen können durch Modifizierung der Anpresskraft vorgenommen werden.
- Radabmessungen: $d \leq 6 m$
- Moduln: $m \leq 20 \text{ mm}$
- Einsatzbereiche:
 - Fertigbearbeitung ungehärteter Verzahnungen in Mittel- und Großserienfertigung, erreichbare Qualität bis 5.



Mindestabstand des Schabrades von der Schulter



Schabrad und Werkrad im Eingriff



Schaben einer Verzahnung mit Diagonalvorschub neben einer Schulter

- Bei den **Profilverfahren** wird das Werkzeug mit dem Profil der Zahnflanken in Richtung der Zahnflanken bewegt, so dass sich Werkzeug und Werkstück im ganzen Profil berühren.
- Es wird unterschieden zwischen

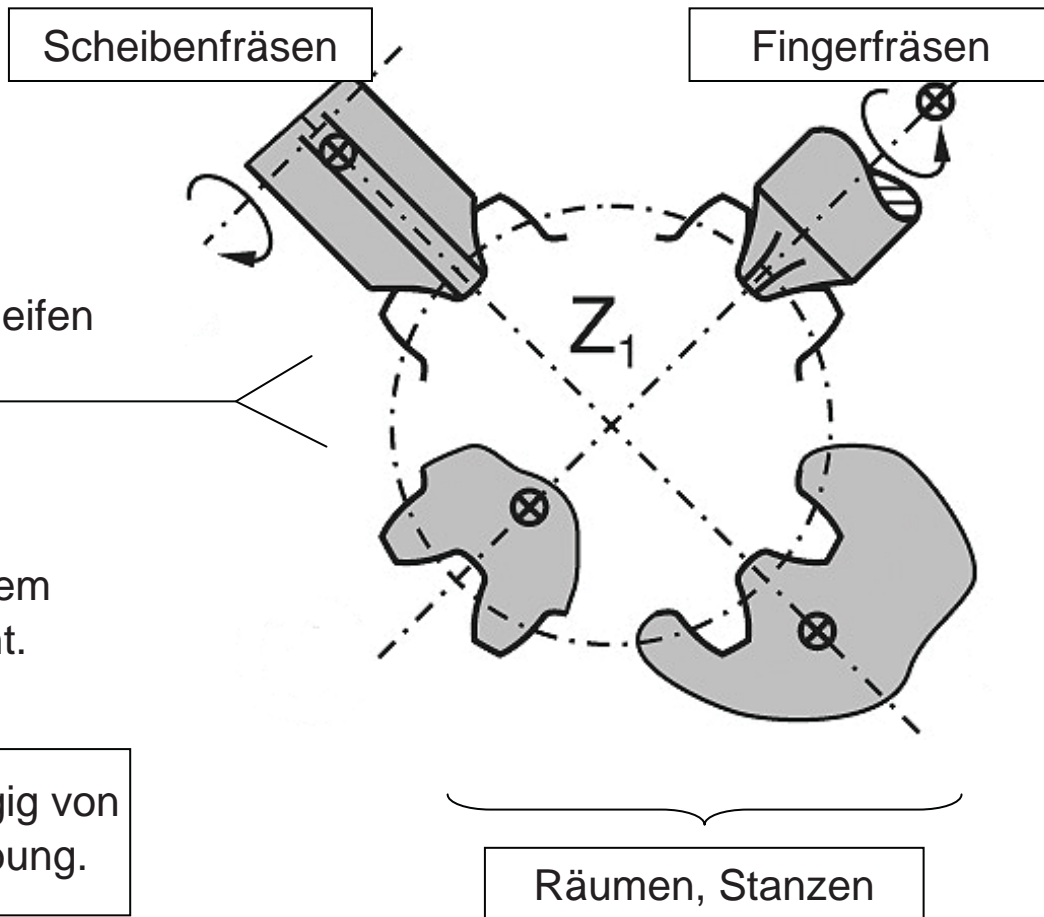
- Teil-Profilverfahren:

Zahnweises Schneiden und Schleifen

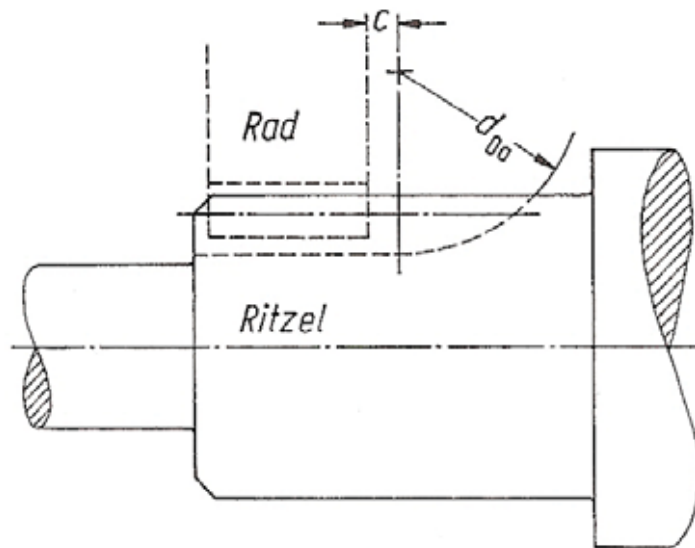
- Komplet-Profilverfahren:

Das gesamte Werkrad wird in einem Schnitt- und Ziehvorgang verzahnt.

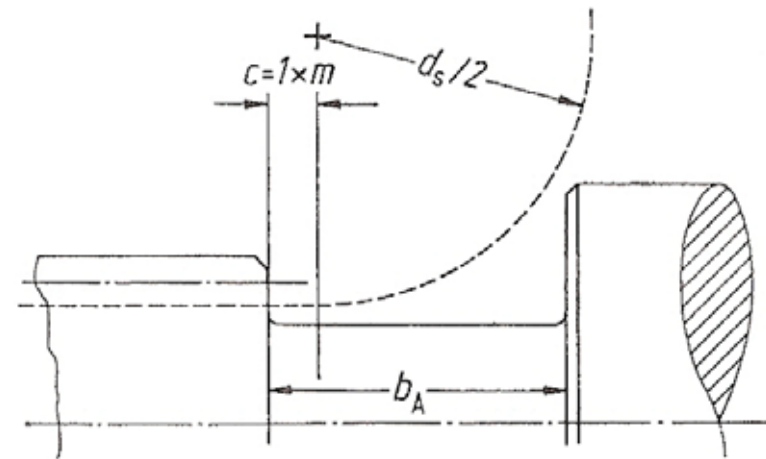
→ Generell ist Werkzeug abhängig von Zähnezahl und Profilverschiebung.



- Bei Wellenschultern und Wellenbunden ist Überlaufweg zu beachten.



Einzuhaltender Abstand von Wellenschultern
am Beispiel des Scheibenfräsens



Einzuhaltender
Schleifscheibenüberstand c

- Bei den **Ur- und Umformverfahren** wird zur Herstellung eine Form verwendet, die einer vollständigen räumlichen Matrize des Zahnrades entspricht, worin das Rohmaterial gegossen, gesintert, gepresst oder gespritzt wird.
- Die Verfahren eignen sich für die Massenfertigung kleiner Zahnräder aus Stahl, Nichteisenmetallen und Kunststoff. Abhängig vom Verfahren muss der Schwund berücksichtigt werden.

2.7 Abmessungen und Geometrie der Evolventenverzahnung

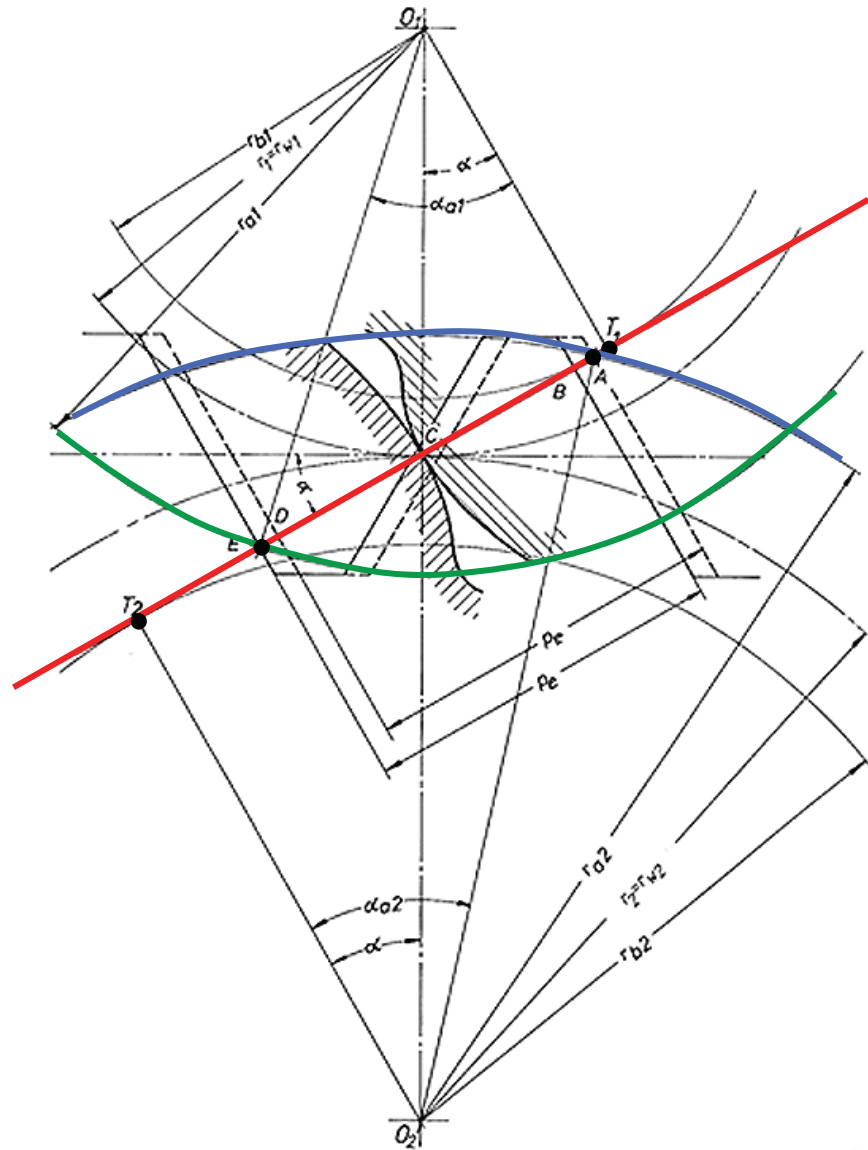
2.7.1 Profilüberdeckungsgrad ε_α

- Zur gleichförmigen Bewegungsübertragung ist es notwendig, dass bereits vor dem Eingriffsende eines Zahnpaars ein neues Zahnpaar zum Eingriff kommt.
- Die Eingriffsstrecke als Teil der Eingriffslinie, auf der das Abwälzen zweier Flanken erfolgt, wird begrenzt durch:

1. die Grundkreise mit den Radien r_b , wobei außerhalb von $\overline{T_1T_2}$ keine Evolvente entstehen kann sowie

2. die Kopfkreise $r_a = r + h_a$ bzw. $d_a = 2 * r_a = d + 2h_a = z * m + 2h_a$
Sie begrenzen das Zahnrad im Umfang.

[Siehe Folie 52](#)



Damit liegen

- der Anfangspunkt A des Eingriffs auf dem Kopfkreis 2
- der Endpunkt B des Eingriffs auf dem Kopfkreis 1

Hieraus ergibt sich der Profilüberdeckungsgrad ε_α

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\overline{AE}}{p_e} = \frac{\overline{AE}}{p^* \cos \alpha} \geq 1$$

p_e ... Eingriffsteilung

- Die Berechnung der nutzbaren Eingriffsstrecke

$$g_\alpha = \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{T_2A} - \overline{T_2C} + \overline{T_1E} - \overline{T_1C}$$

$$g_\alpha = r_{b2} * (\tan \alpha_{o2} - \tan \alpha) + r_{b1} * (\tan \alpha_{o1} - \tan \alpha)$$

wobei $r_{b1} = r_1 * \cos \alpha = \frac{m}{2} * z_1 * \cos \alpha$ und $r_{b2} = r_2 * \cos \alpha = \frac{m}{2} * z_2 * \cos \alpha$

$$z_2 = z_1 * i$$

$$r_{b2} = \frac{m}{2} * z_1 * i * \cos \alpha$$

$$g_\alpha = \frac{m}{2} * \cos \alpha * z_1 * (i * (\tan \alpha_{o2} - \tan \alpha) + (\tan \alpha_{o1} - \tan \alpha))$$

$$p_e = p * \cos \alpha = m * \pi * \cos \alpha \quad \rightarrow \frac{p_e}{\pi} = m * \cos \alpha$$

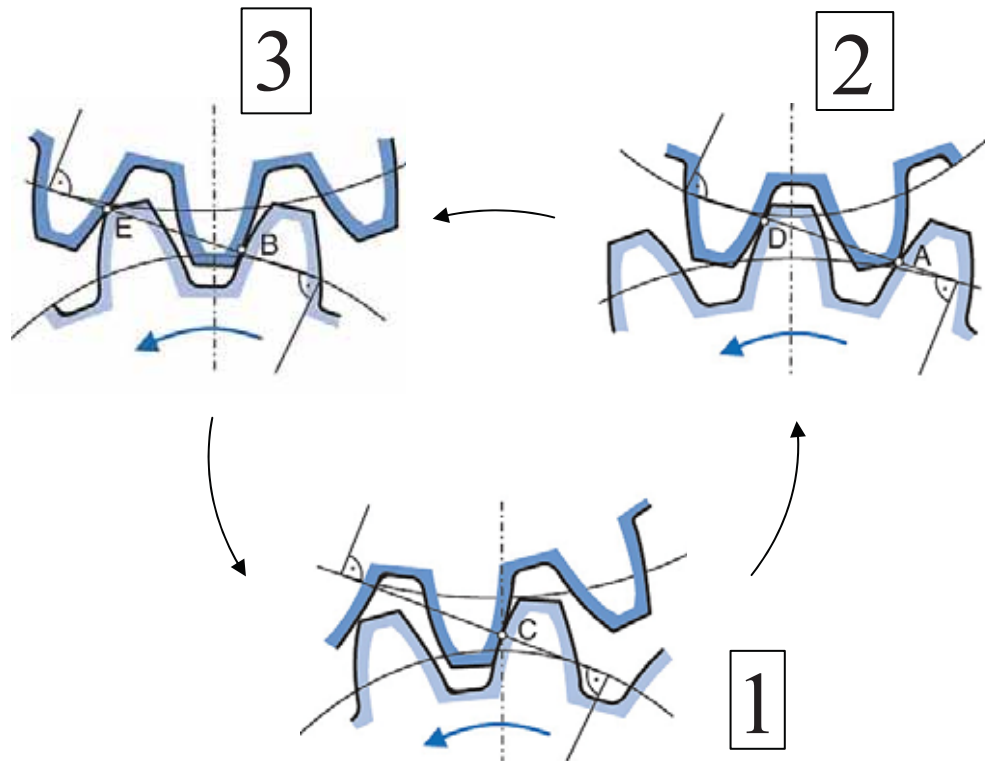
$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{p_e} = \frac{1}{2\pi} * z_1 * [i * (\tan \alpha_{o2} - \tan \alpha) + (\tan \alpha_{o1} - \tan \alpha)]$$

- Da bei $\varepsilon_\alpha = 1$ der Zahn des Rades 1 sich kontaktlos in der entsprechenden Lücke des Gegenrades dreht, ist die Verzahnung kinematisch nicht funktionsfähig.
- Zur Erzielung eines gleichmäßigen Laufs und Verbesserung der Tragfähigkeit sowie der Geräuschseigenschaften sollte die Profilüberdeckung folgende Bedingung erfüllen:

$$\varepsilon_\alpha \geq 1,25$$

- Während des Eingriffs sind bei $\varepsilon_\alpha > 1$ während des Eingriffs ein oder zwei Zahnradpaare im Eingriff.

Die zu Paaren zugeordneten Einzeleingriffspunkte B und E sowie A und D kennzeichnen dabei den Übergang vom Einzel- zum Doppeleingriff.

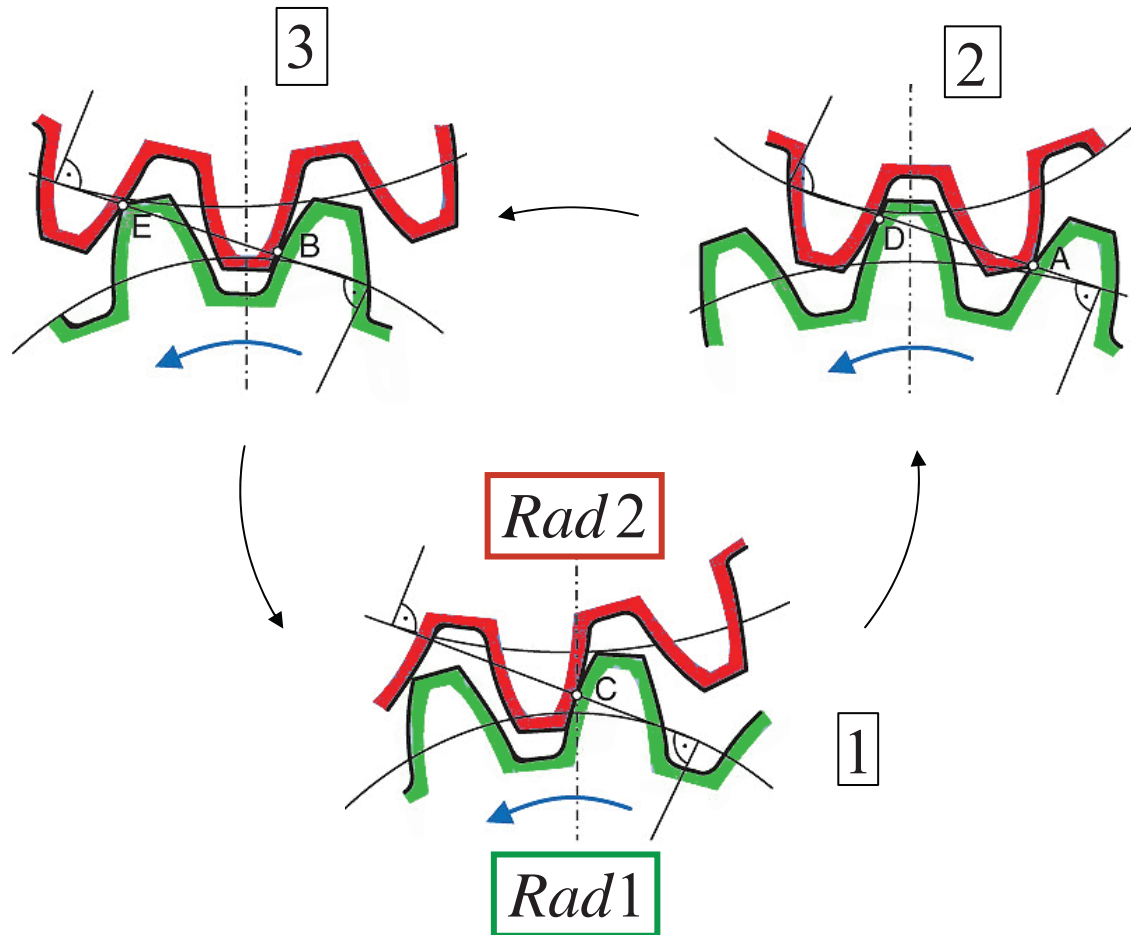


Übertragung des Drehmoments durch:

ein Zahnradpaar $\rightarrow 3$

zwei Zahnradpaare $\rightarrow 1$ und 2

Bezeichnung der Eingriffspunkte



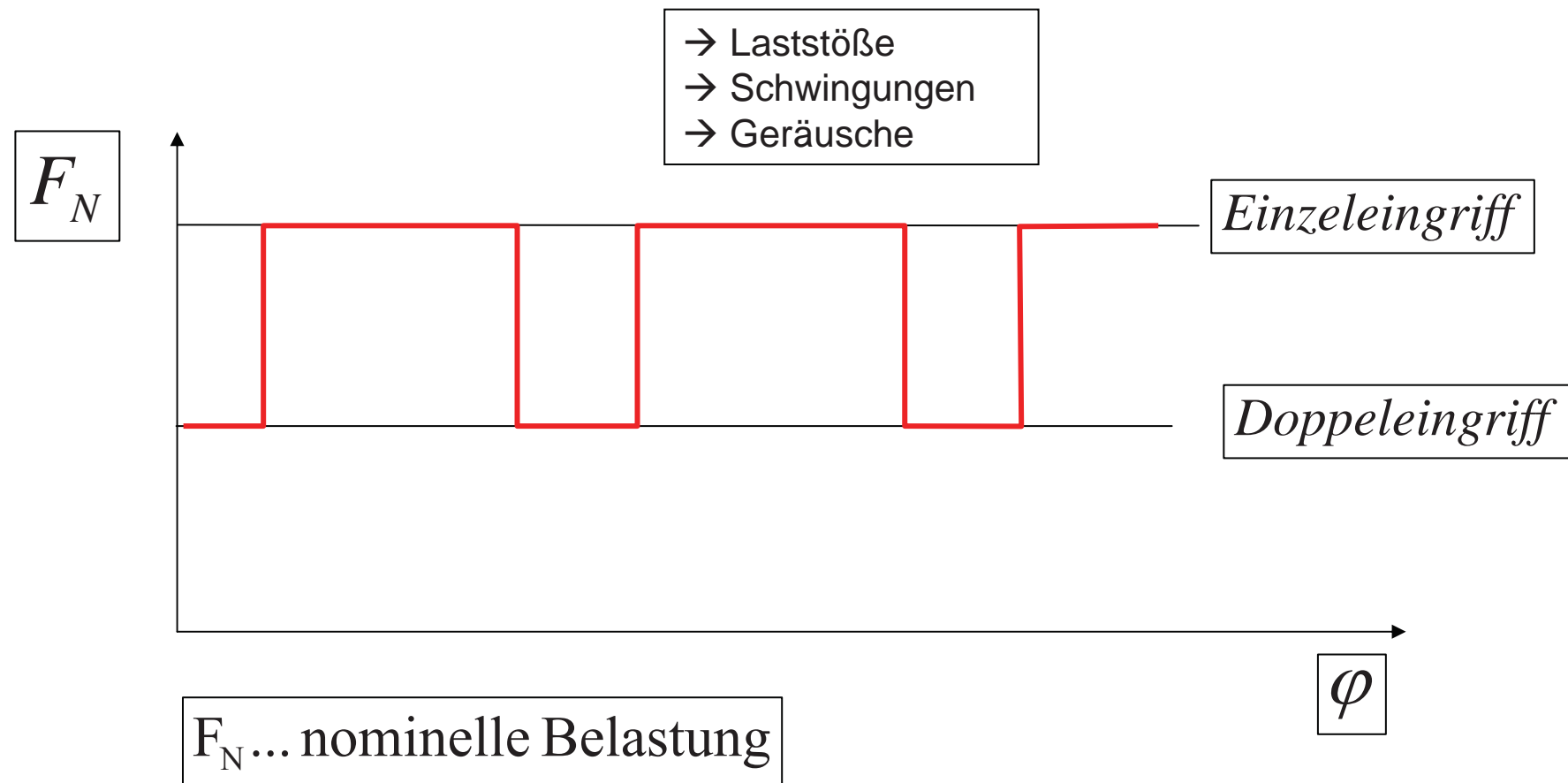
Rad1:

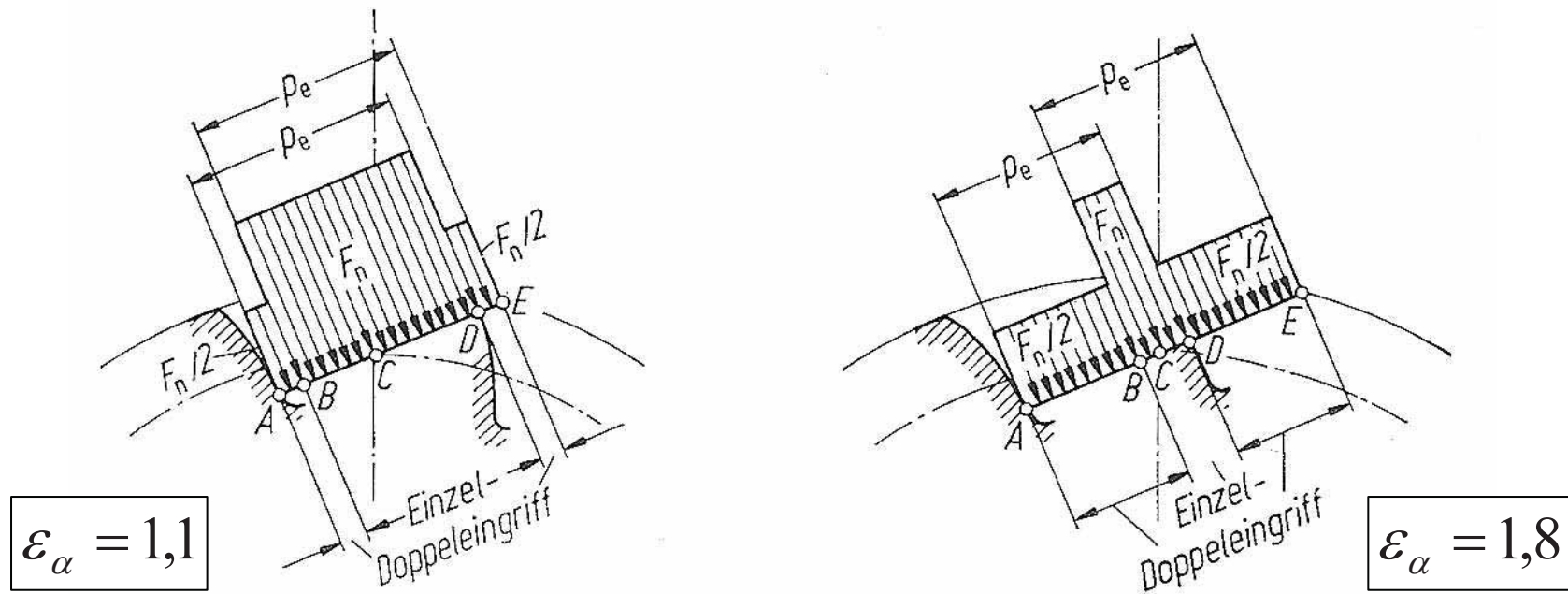
- A Fußeingriffspunkt
- B Innerer Einzeleingriffspunkt
- C Wälzpunkt
- D Äußerer Einzeleingriffspunkt
- E Kopfeingriffspunkt

Rad 2

- A Kopfeingriffspunkt
- B Äußerer Einzeleingriffspunkt
- C Wälzpunkt
- D Innerer Einzeleingriffspunkt
- E Fußeingriffspunkt

- Während der Eingriffsübergänge folgt daher ein Lastwechsel auf die einzelnen Zähne. Die Höhe der Lastwechsel hängt neben der Überdeckung des Weiteren von der Zahnsteifigkeit sowie eventuellen Zahnfehlern ab.





Nominelle Belastung einer Zahnflanke während der Eingriffsdauer

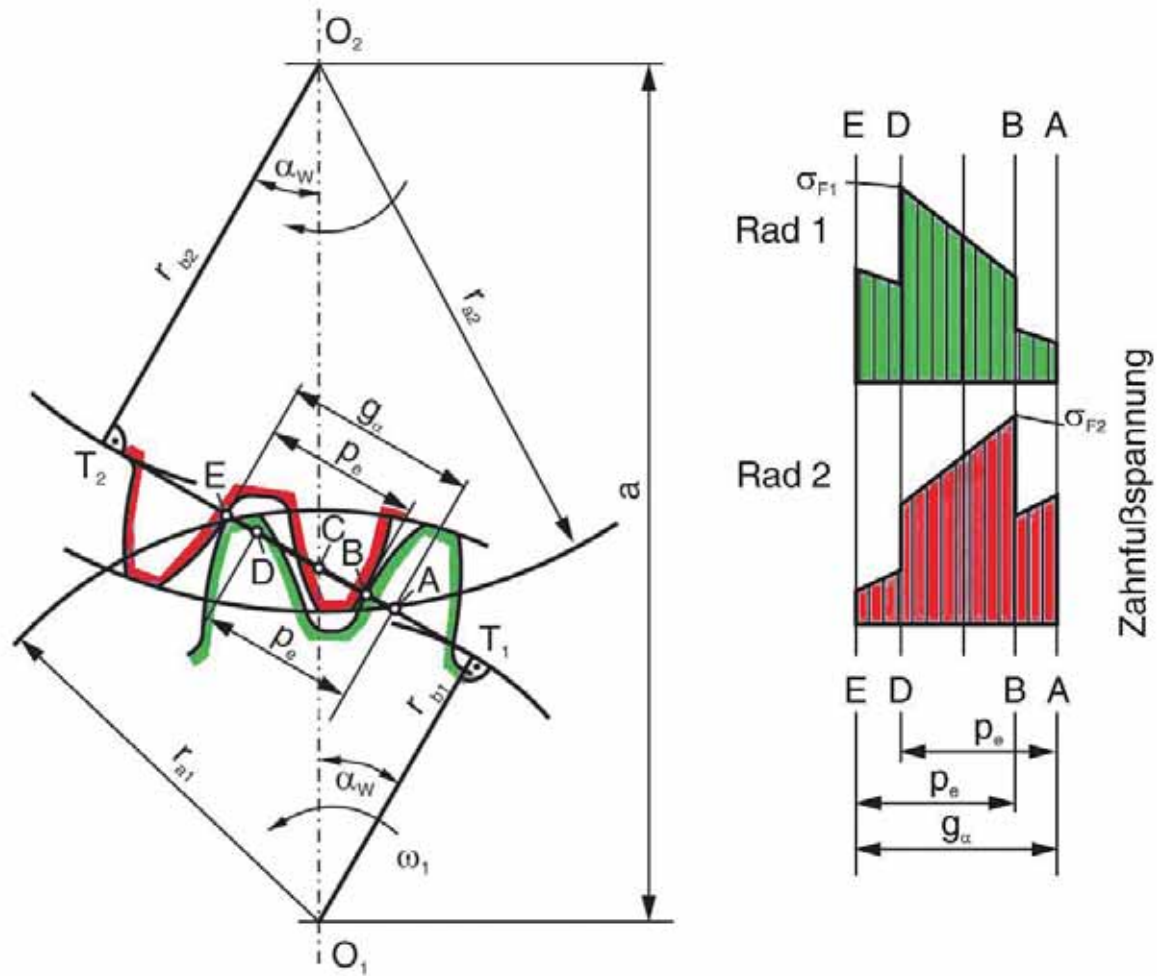
- Das Eingriffsgebiet ist umso kleiner die effektive – über die zeit gemittelte – Berührungslänge umso größer, je größer die Profilüberdeckung ist.

- Das Eingriffsgebiet ist umso kleiner die effektive – über die zeit gemittelte – Berührungslänge umso größer, je größer die Profilüberdeckung ist.
- Bei (Gerad)Verzahnungen mit einem Bezugsprofil nach DIN 867 (Eingriffswinkel $\alpha = 20^\circ$) ist

$$1 \geq \varepsilon_\alpha \geq 1,98$$

- Üblicherweise liegt die Profilüberdeckung im Bereich

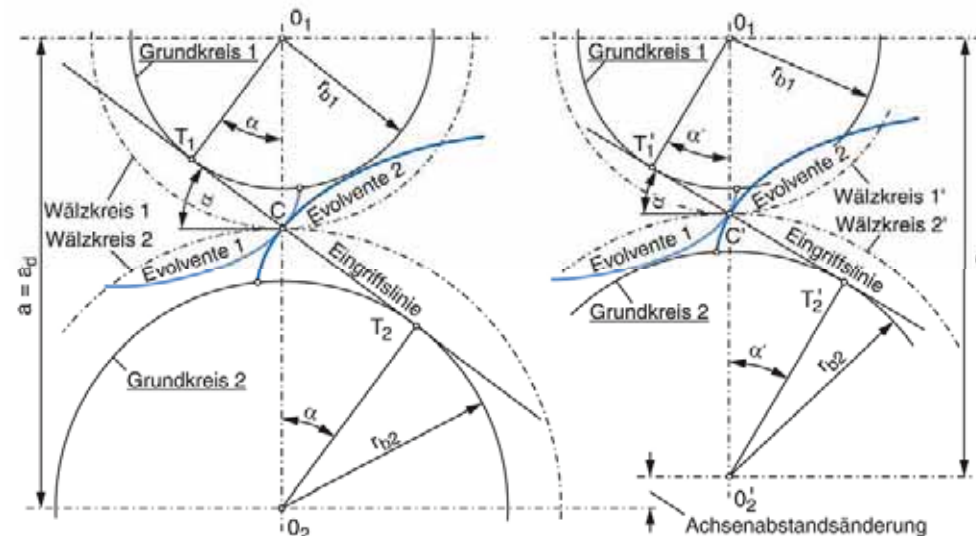
$$1,2 \dots 1,25 \geq \varepsilon_\alpha \geq 1,7$$



Zahnfußspannungen bei einer Außenradpaarung in Abhängigkeit des Eingriffszustandes

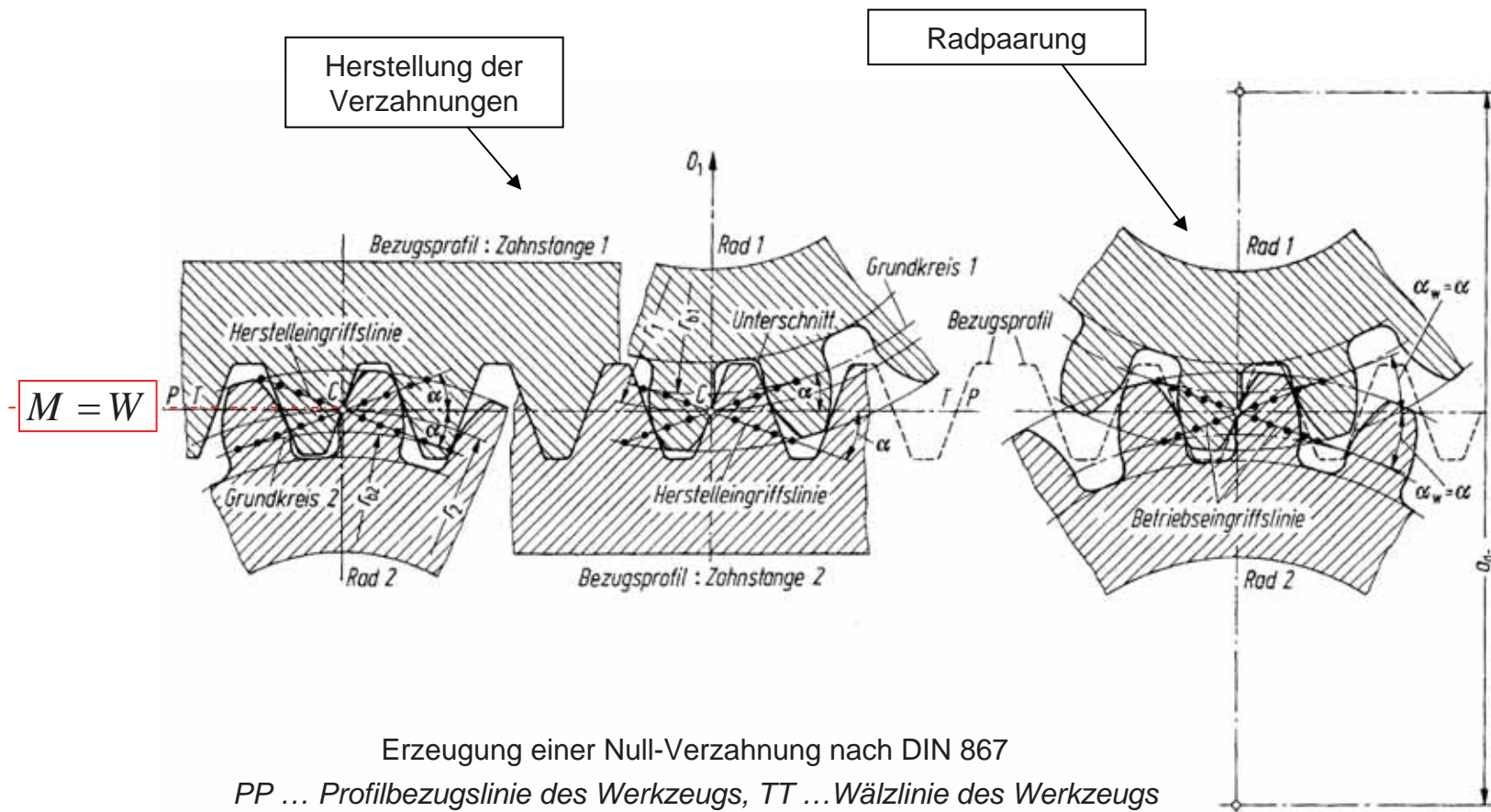
2.7.2 Profilverschiebung

- Gegenüber der Zykloidenverzahnung besteht bei der Evolventenverzahnung der wesentliche Vorteil in der Erfüllung des Verzahnungsgesetzes sowie in der gleich bleibenden Bewegungsübertragung bei verändertem Achsabstand. Eine derartige Achsabstandsänderung bedingt die radiale Verschiebung des Nutzungsbereichs der Evolvente, so dass weiter außen oder weiter innen liegende Bereiche des Zahnprofils genutzt werden können.



Unterschiedliche Lagen der Wälzpunkte C auf den Evolventen bei Null- und bei V_{minus} -Verschiebung

- Die **Nullverzahnung** entsteht, wenn das gemeinsame Bezugsprofil mit seiner Mittellinie auf dem Teilkreis von Ritzel und Rad abrollt. Die Teilkreise sind dann auch die Wälzkreise.



- Hieraus leiten sich folgende Gleichungen ab:

- **Teilkreisdurchmesser:** $d_1 = m^* z_1$ $d_2 = m^* z_2$

- **Null-Achsabstand:** $a_d = \frac{(d_1 + d_2)}{2} = \frac{m^* (z_1 + z_2)}{2}$

- **Kopfkreis-
durchmesser**

allgemein:

$$d_a = d + 2h_a$$

für Bezugsprofil
nach DIN 867
(Nullverzahnung):

$$d_a = m^* (z + 2)$$

z ... Gesamtzähnezahl

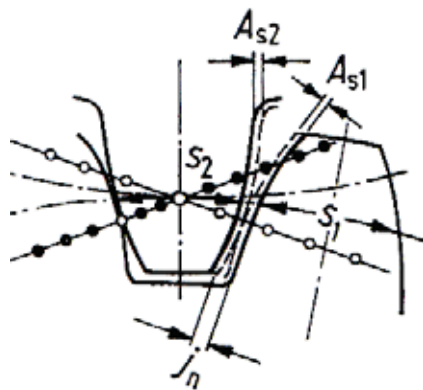
- **Fußkreis-
durchmesser**

$$d_f = d - 2h_f$$

$$d_f = m^* (z - 2 - 2c^*)$$

$c = c^*$... Kopfspiel

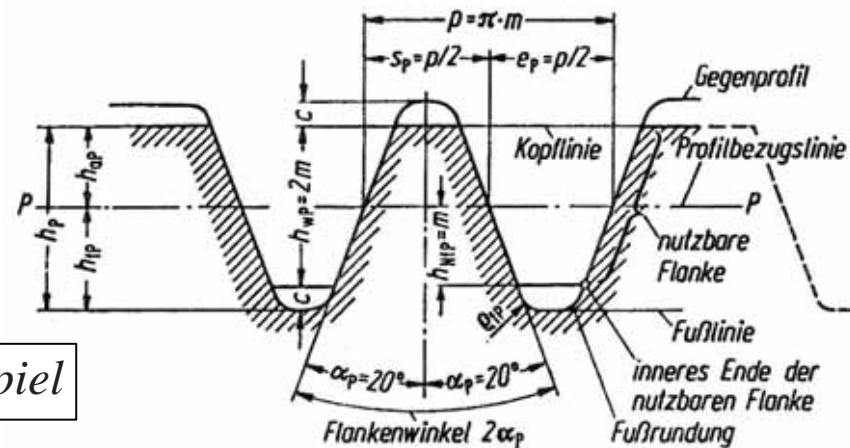
- **Zahndicke im Teilkreis P :**



$$s = p / 2 + A_s$$

$$s = m^* \pi / 2 + A_s$$

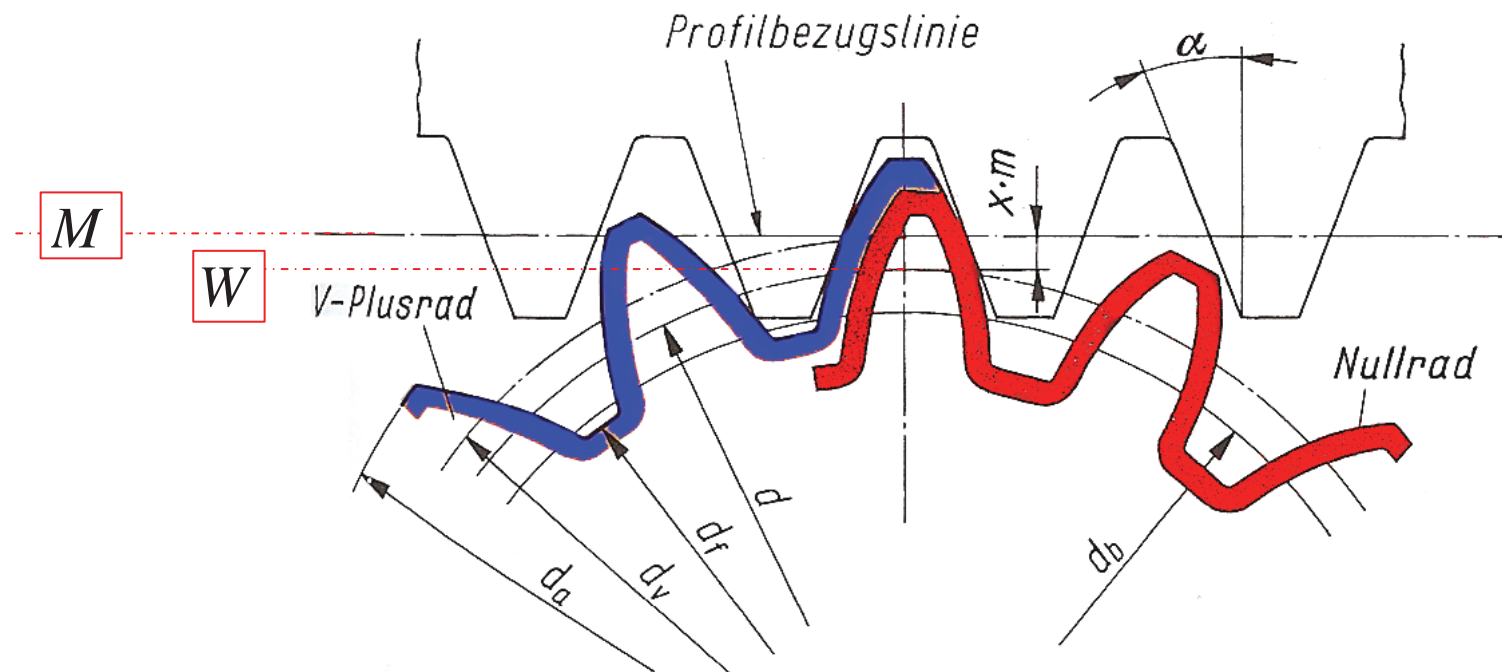
Def. $A_s < 0$... Flankenspiel



Bezugsprofil nach DIN 867

- Der Herstellungswälzkreis und seine Lage zum Werkzeug sind grundsätzlich frei wählbar. Bisher wurde der Sonderfall betrachtet, dass während der Herstellung die Wälzbahn des Werkzeugs (W) gleich der Profilbezugslinie des Werkzeugs (M) ist. Für den Fall, dass die Wälzbahn nicht der Profilbezugslinie entspricht, definiert man die

Profilverschiebung v = Abstand der Werkzeugmitte zur Wälzbahn



- Bezogen auf Modul ergibt sich der **Profilverschiebungsfaktor** $x = v / m$

Dabei wird unterschieden zwischen:

positiver Profilverschiebung

und

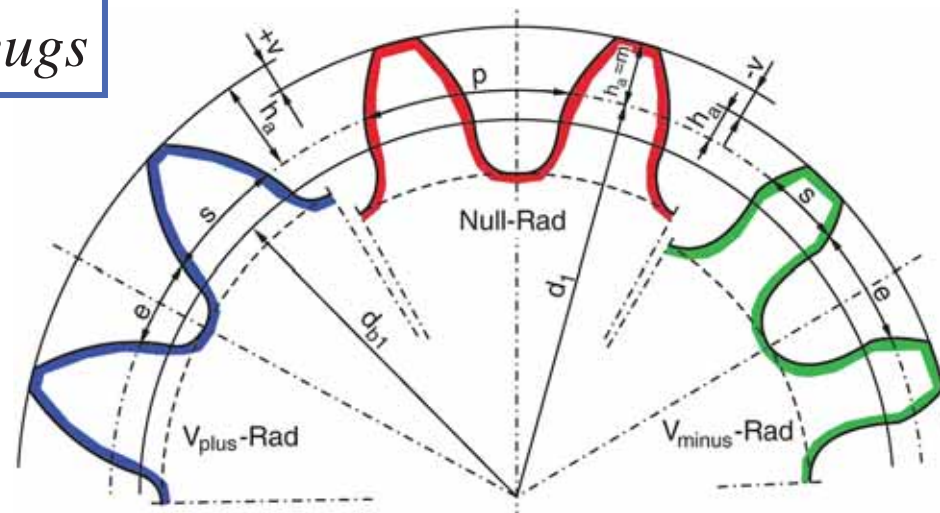
negativer Profilverschiebung

$$v = +x * m$$

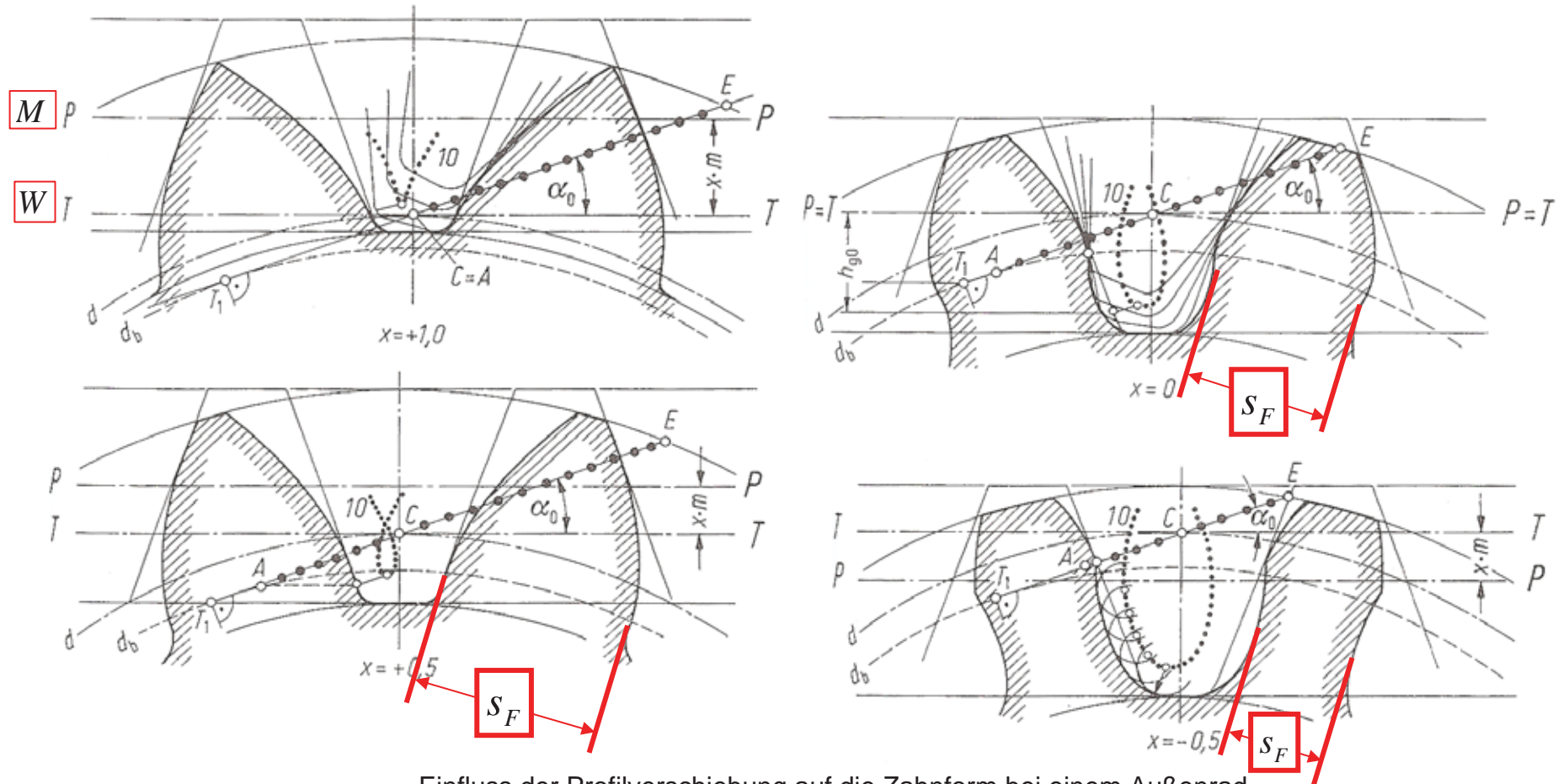
$$v = -x * m$$

*Herausziehen
des Werkzeugs*

*Hineindrücken
des Werkzeugs*



- Die Profilverschiebung bewirkt eine Veränderung der Zahnform und der Eingriffsverhältnisse. Sie wird gezielt zur Verbesserung der Tragfähigkeit eingesetzt.



Einfluss der Profilverschiebung auf die Zahnform bei einem Außenrad
 PP ... Profilbezuglinie des Werkzeugs, TT ... Wälzlinie des Werkzeugs

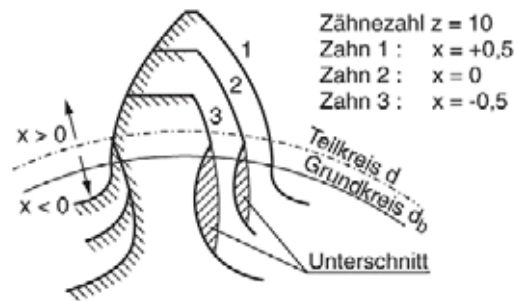
Einfluss der Profilverschiebung auf das Laufverhalten

- Das Laufverhalten (und auch die Tragfähigkeit) eines Zahnradpaares werden entscheidend durch die Zahngeometrie beeinflusst. So wird z.B. bei positiver Profilverschiebung

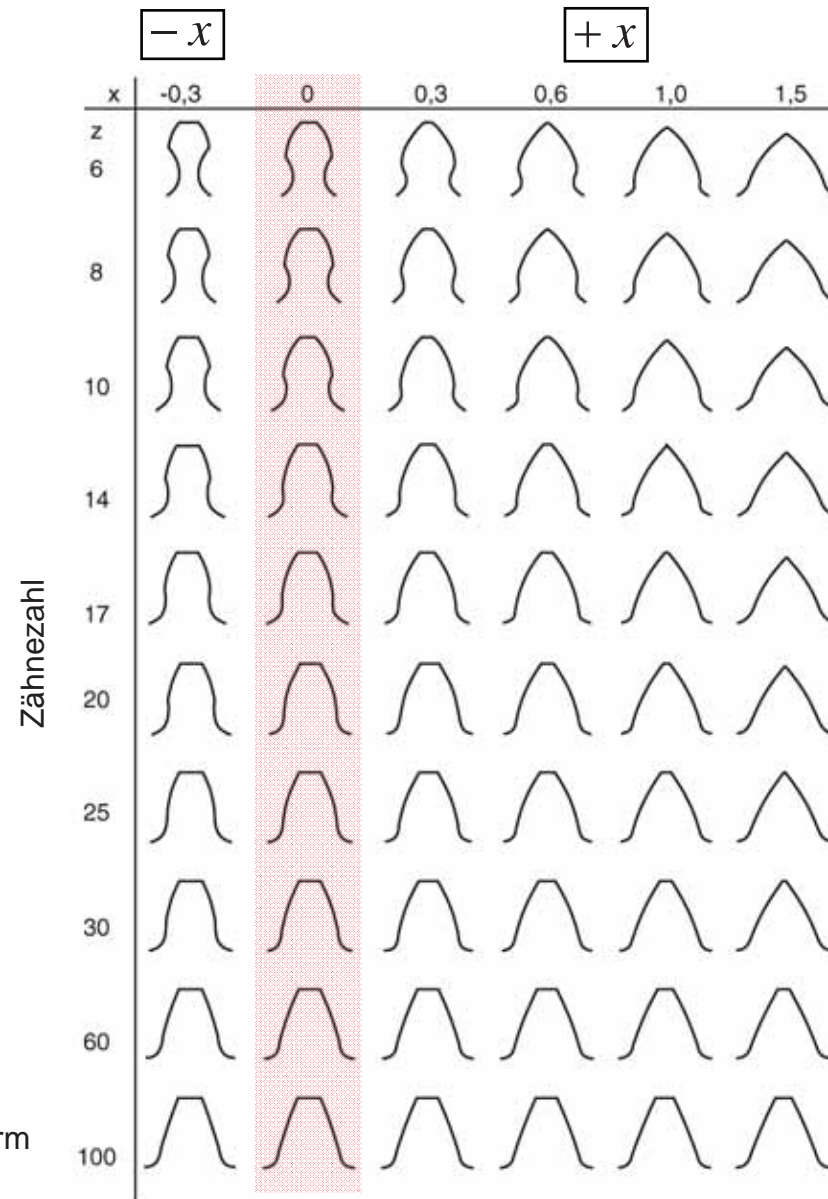
- der Zahnfuß dicker	z.T. auch Aushöhlung vermieden → Zahnfußfestigkeit steigt, da $s_F \uparrow$
- der Zahnkopf spitzer	Gefahr des Ausbrechens bei gehärteten Zähnen
- Eingriffslinie steiler	Eingriffsstrecke wird kürzer, $\varepsilon_\alpha \downarrow$

- Die Auswirkung auf die Profilverschiebung ist für kleinere Zähnezahlen stärker. Bei der Zahnstange ($z \rightarrow \infty$) bleibt die Zahnform unverändert.

Profilverschiebung hat größeren Effekt auf das Ritzel als auf das Zahnrad



Beeinflussung der Zahnform durch Profilverschiebung



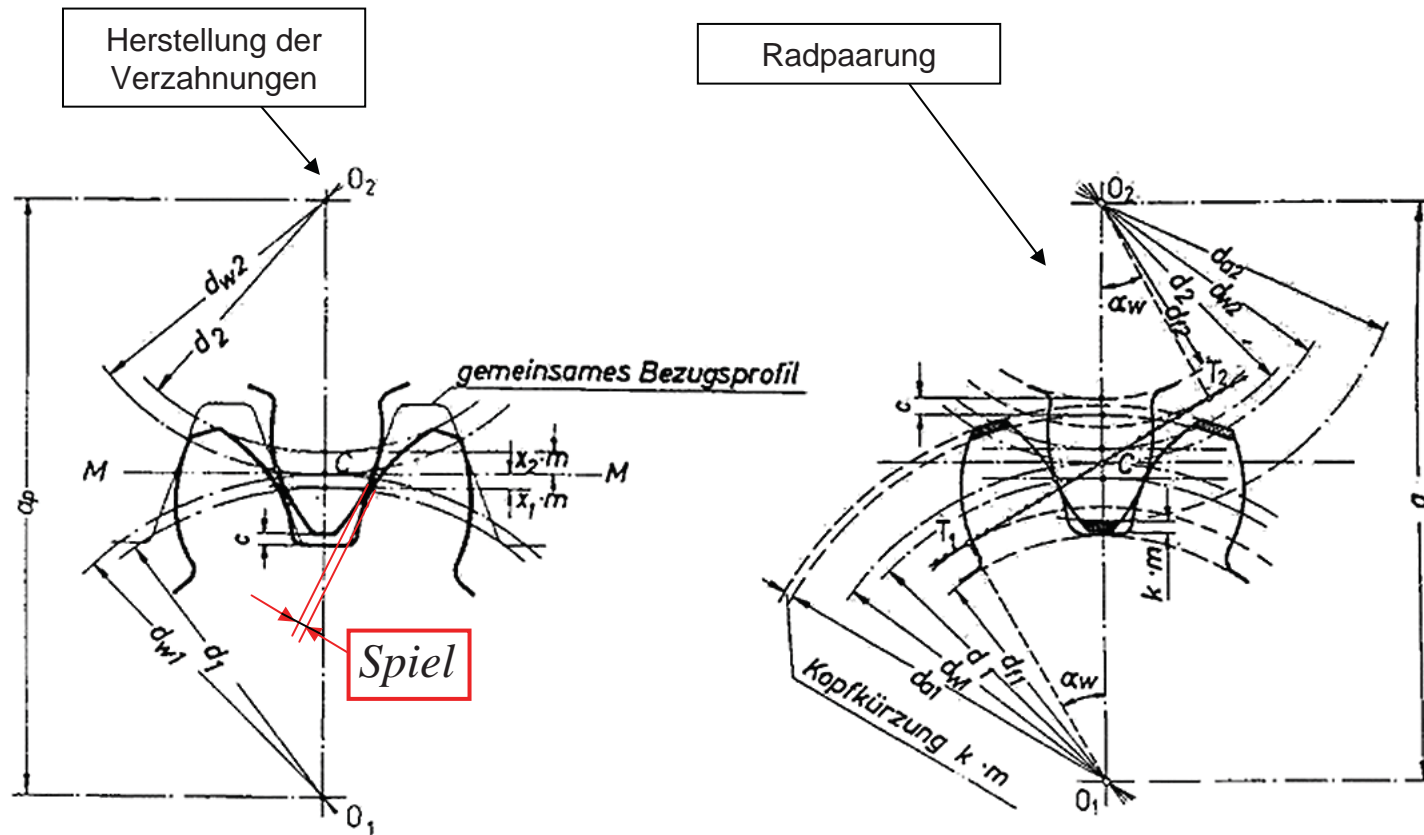
- Bei der Paarung von zwei Rädern können beide Verzahnungen mit Profilver-schiebung hergestellt werden, weshalb

$$x_1 \neq x_2 \neq 0 \quad \text{aber } m_1 = m_2 = m$$

Damit ist der Herstellungswälzkreis nicht mehr maßgebend für die Eingriffsbedingungen, wie es bei Rädern mit dem gleichen Bezugsprofil der Fall ist. Vielmehr stellt sich ein neuer Betriebswälzpunkt mit den neuen Betriebswälzkreisen r_{w1}, r_{w2} bei einer Betriebsteilung p_w ein.

$$p_w = s_{w1} + s_{w2} \quad s_w \dots \text{Zahndicken der Räder}$$

Die Bedingung, dass die Verzahnungen zueinander spielfrei sind, bestimmt die Eingriffsgrößen und den Achsabstand.



Profilverschobene Verzahnung

links: mit gemeinsamen Bezugsprofil

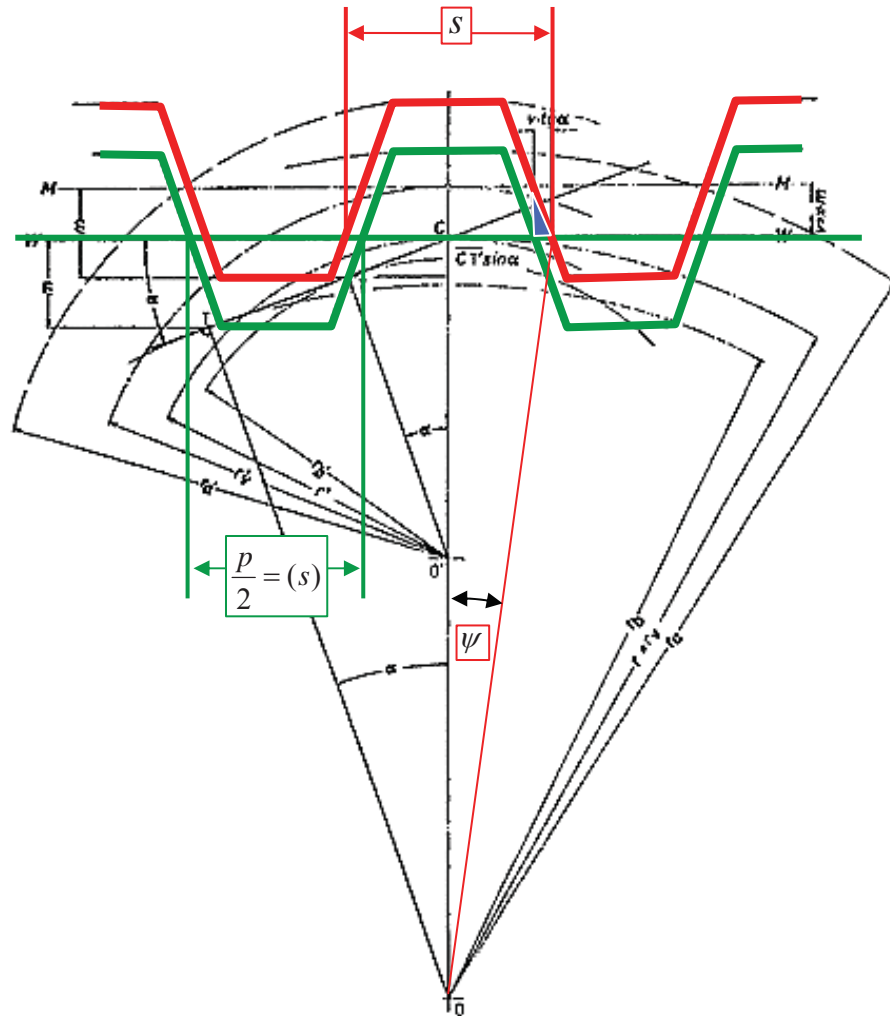
rechts: in der Betriebsstellung nach Zusammenschieben auf Spielfreiheit

- Als Grundlage für die Bestimmung des Betriebszustandes ist es notwendig, die Zahndicke s_y für einen beliebigen Radius r_y zu berechnen.
- Die Zahndicke bezogen auf den Herstellungswälzkreis (Teilkreis) ist:

$$s = \frac{p}{2} + 2 * v * \tan \alpha$$

$$s = \frac{m * \pi}{2} + 2 * x * m * \tan \alpha$$

$$s = m * \left(\frac{\pi}{2} + 2 * x * \tan \alpha \right)$$



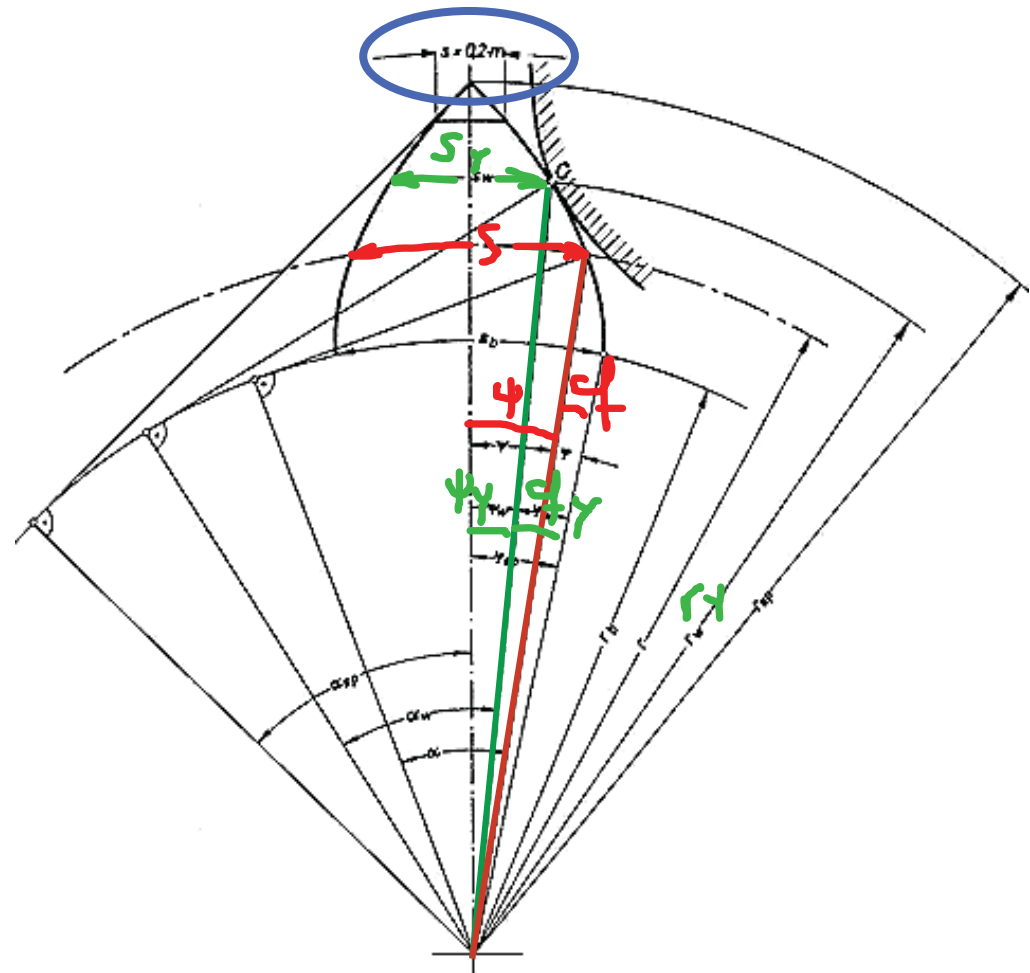
- Dieser Flankenpunkt hat den zugehörigen Winkel

$$\psi = \frac{s/2}{r}$$

- Mit Hilfe des Evolventengesetzes ist die Umrechnung des Winkels auf den jeweils zugehörigen Radius möglich.

$$s_y = 2 * r_y * \psi_y$$

$$s_y = 2 * r_y * (\psi + \varphi - \varphi_y)$$



$$\text{Mit } \varphi = \text{inv}\alpha \quad \Bigg| \quad \varphi_y = \text{inv}\alpha_y \quad \Bigg| \quad \cos\alpha_y = \frac{r_b}{r_y}$$

errechnet sich die Zahndicke zu:

$$s_y = 2 * r_y * \psi_y = 2 * r_y * \left[\frac{1}{z} * \left(\frac{\pi}{2} + 2 * x * \tan\alpha \right) + \text{inv}\alpha - \text{inv}\alpha_y \right]$$

φ φ_y

- Die obige Bedingung der Spielfreiheit führt zur Bestimmung des Betriebseingriffswinkels α_w und der Betriebswälzkreise r_w .

$$p_w = 2 * r_{w1} * \left[\frac{1}{z_1} * \left(\frac{\pi}{2} + 2 * x_1 * \tan \alpha \right) + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right] + 2 * r_{w2} * \left[\frac{1}{z_2} * \left(\frac{\pi}{2} + 2 * x_2 * \tan \alpha \right) + \text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w \right]$$

Einsetzen von:

$$2 * r_w * \pi = z * p_w \rightarrow r_w = \frac{z}{2 * \pi} * p$$

$$\pi \cdot p_w = 2 * \frac{z_1}{2 * \pi} * p_w * [\dots] + 2 * \frac{z_2}{2 * \pi} * p_w * [\dots] \quad \int \cdot \pi$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + 2 * x_1 * \tan \alpha + z_1 * (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w) + \frac{\pi}{2} + 2 * x_2 * \tan \alpha + z_2 * (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w)$$

$$0 = 2 * \tan \alpha * (x_1 + x_2) + (\text{inv} \alpha - \text{inv} \alpha_w) * (z_1 + z_2)$$

- Somit lässt sich der Betriebseingriffswinkel α_w berechnen.

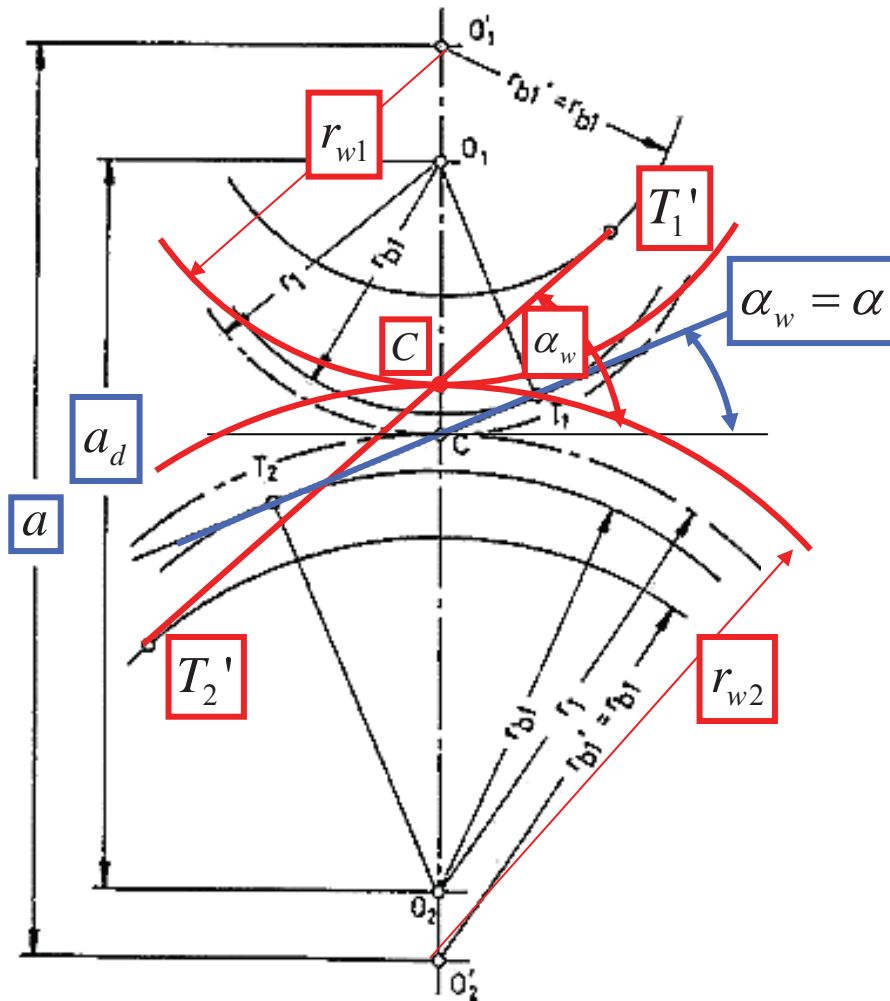
$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 * \tan \alpha * \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv} \alpha$$

$$\hat{\alpha}_w = \tan \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha_w$$

- Aus dem Betriebseingriffswinkel erhält man die Betriebswälzkreisradien r_{w1}, r_{w2}

$$r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} = \frac{1}{2} * z_1 * m * \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

$$r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w} = \frac{1}{2} * z_2 * m * \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$



- Damit bewirkt die Profilverziehung gegenüber der „Nullverzahnung“ die Veränderung einer Reihe von geometrischen Größen.

Grundkreise:	$r_b' = r_b$
Teilkreise:	$r = r$
Wälzkreise:	$r_w' > r_w$
Eingriffswinkel:	$\alpha_w' > \alpha_w = \alpha$
Achsabstand:	$a > a_d$

$$a = r_{w1}' + r_{w2}' = \frac{r_{b1} + r_{b2}}{\cos \alpha_w}$$

$$a = \frac{1}{\cos \alpha_w} * \left[\frac{m^* z_1}{2} * \cos \alpha + \frac{m^* z_2}{2} * \cos \alpha \right] = \frac{m}{2} * (z_1 + z_2) * \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

- In vielen Fällen ist der Achsabstand vorgegeben (Gehäusegeometrie, Normabstände etc.). Die vermittelten Zusammenhänge erlauben durch Profilverschiebung ein Räderpaar auf einen vorgegebenen Achsabstand anzupassen.

Betriebseingriffswinkel:

$$\cos \alpha_w = \frac{m}{2} * (z_1 + z_2) * \frac{\cos \alpha}{a}$$

Profilverschiebungssumme:

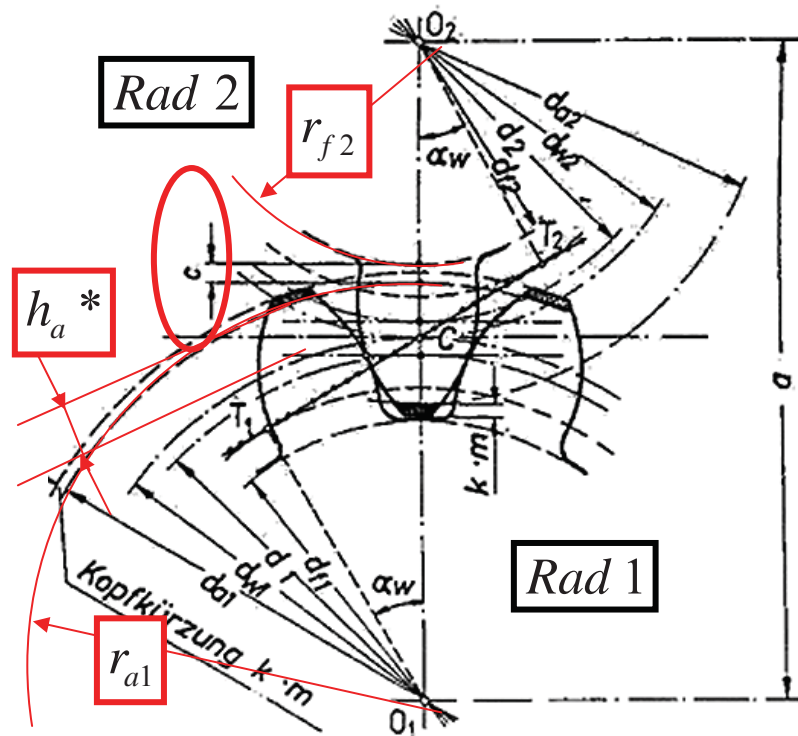
$$x_1 + x_2 = \frac{\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha}{2 * \tan \alpha} * (z_1 + z_2)$$

- Man unterscheidet zwischen:

V-Verzahnung:	$x_1 + x_2 \neq 0$	$a = r_{w1} + r_{w2} \neq a_d$	$\alpha_w \neq \alpha$
V-Nullverzahnung:	$x_1 + x_2 = 0$	$a = r_{w1} + r_{w2} = a_d$	$\alpha_w = \alpha$
Nullverzahnung:	$x_1 = x_2 = 0$	$a = r_1 + r_2 = a_d$	$\alpha_w = \alpha$

- Dabei gilt zu beachten, dass bei diesen Beziehungen die Summe der Profilverschiebungen von Ritzel und Rad maßgebend sind und nicht die Einzelverschiebungen.

- Das spielfreie Paaren von profilverschobenen Verzahnungen bedeutet, dass sich das Kopfspiel c verringert. Damit aber das Kopfspiel gemäß den DIN-Festlegung erhalten bleibt, müssen die Köpfe bei positiver Profilverschiebungssumme nachgedreht werden.



- Zur Überprüfung des zur Vermeidung von Eingriffsstörungen erforderliche Kopfspiel gilt:

$$c_1 = a - r_{f2} - r_{a1} \dots 0,1*m - 0,3*m$$

wobei:

$$\begin{aligned} r_{f1} &= r_{w1} - h_{f1} & r_{f2} &= r_{w2} - h_{f2} \\ r_{a1} &= r_{w1} + h_a^* & r_{a2} &= r_{w2} + h_a^* \end{aligned}$$

- Definition:** $h_a^* = h_a - k^* m$

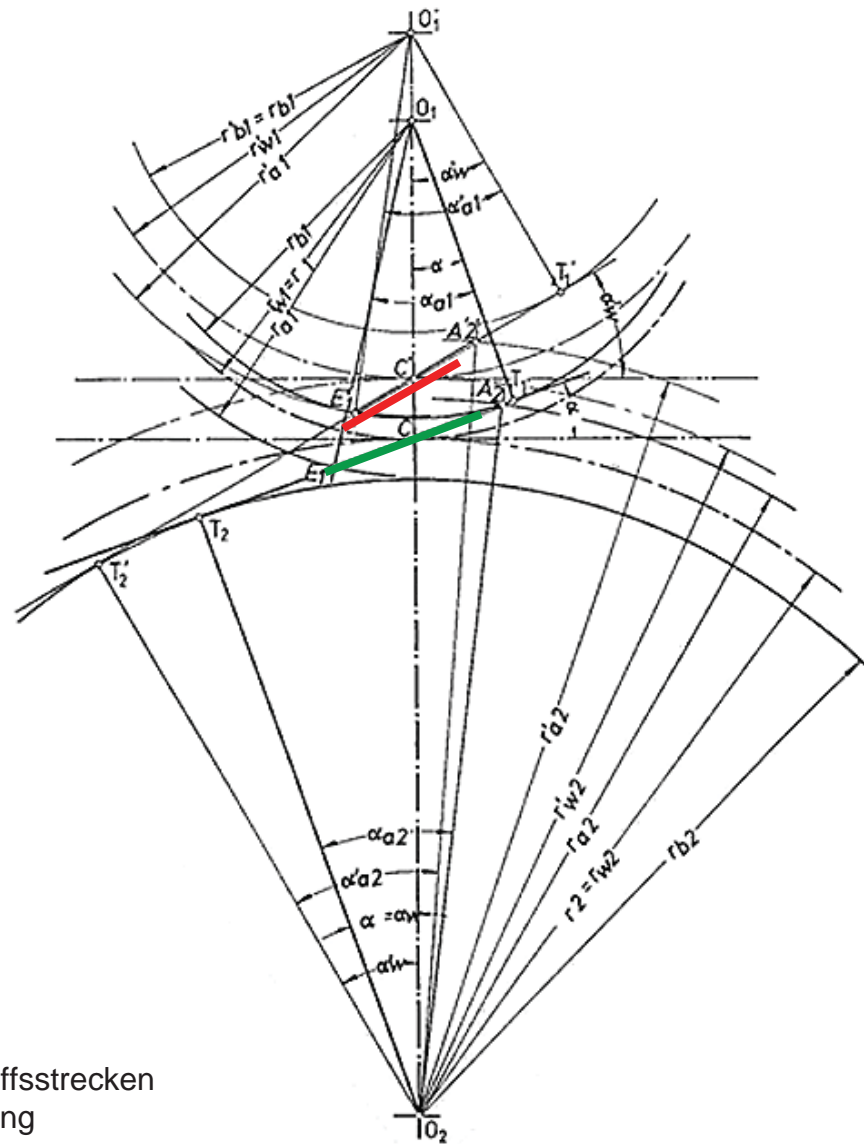
- Durch Einsetzen aller bekannten Werte und Umstellung nach k erhält man den

$$\boxed{\text{Kopfkürzungsfaktor:}} \quad k = (x_1 + x_2) - \frac{(z_1 + z_2)}{2} * \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_w}{\cos \alpha}$$

- Die Kopfkürzung ist nur von der Paarung abhängig, d.h. Aufgabe der Satzradereigenschaft. Weiterhin verkürzt sich die Eingriffsstrecke. Aus den errechneten Werten ergibt sich die Profilüberdeckung der profilverschobenen Verzahnung zu:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1}{2 * \pi} \left[(\tan \alpha_{a1}' - \tan \alpha_w) + i * (\tan \alpha_{a1}' - \tan \alpha_w) \right]$$

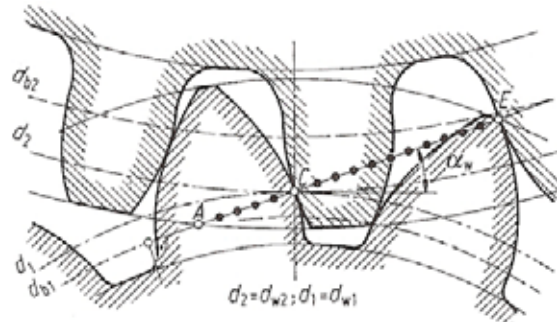
$$\text{mit } r_a' = \underbrace{r + m}_{r_{a0}} + \underbrace{x * m}_{\text{profil versch}} - \underbrace{k * m}_{\text{Kopf kürz}} \quad \text{und } \cos \alpha_a' = \frac{r_b}{r_a} = \frac{r * \cos \alpha}{r + m + x * m - k * m}$$



$$\overline{A'E'} < \overline{AE}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{\alpha}' < \varepsilon_{\alpha}$$

Vergleich der Eingriffsstrecken bei Profilverziehung

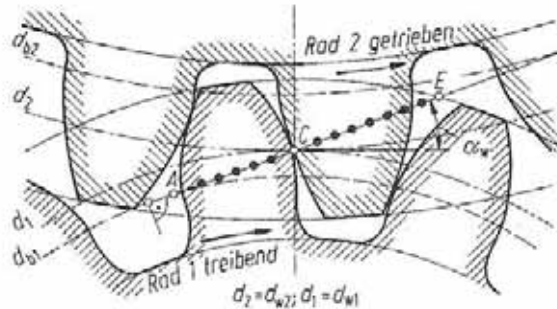


V – Null – Verzahnung

$$x_1 = -x_2 = 0,5$$

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ$$

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = 1,43}$$

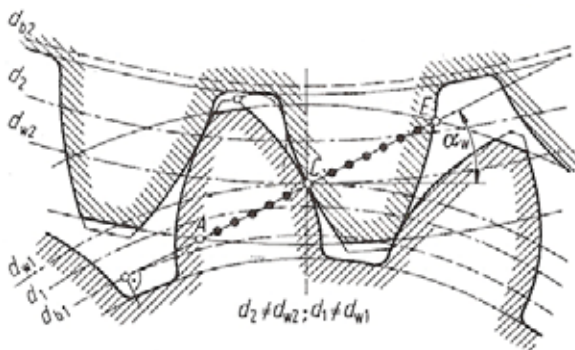


Null – Verzahnung

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$\alpha_w = \alpha = 20^\circ$$

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = 1,28}$$



V – Verzahnung

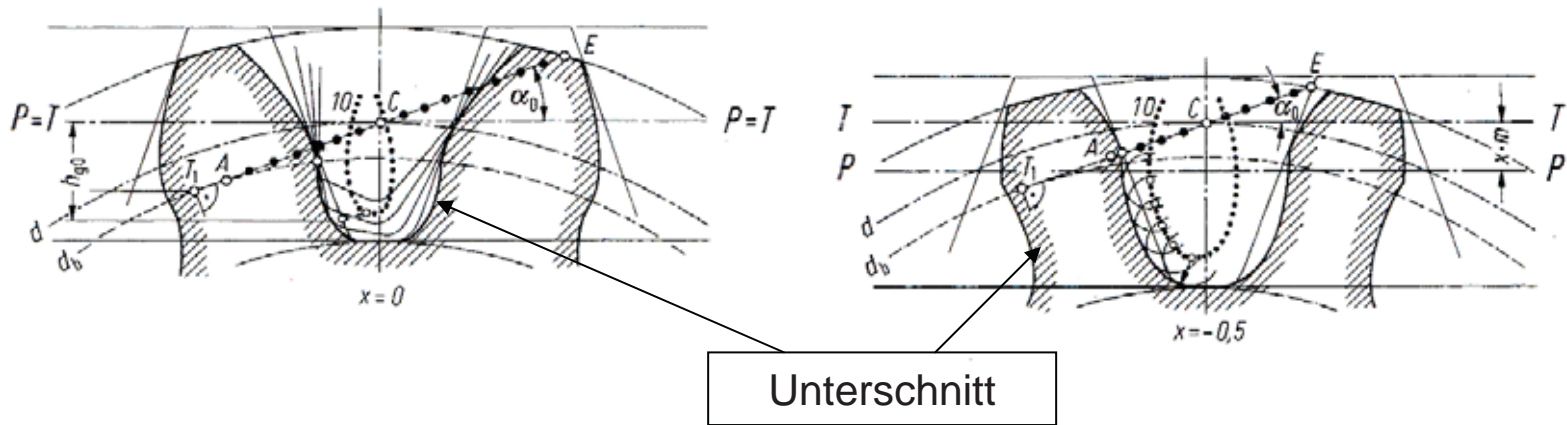
$$x_1 = x_2 = 0,5$$

$$\alpha_w = 25,15^\circ$$

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = 1,19}$$

2) der Zahnfuß

Negative Profilverschiebung $\rightarrow -x$



... wird durch Herstellungswerkzeug ausgehöhlt (= Unterschnitt),
Evolvente wird weggefräst.

- \rightarrow Schwächung des Zahnfußes S_y
- \rightarrow kleinere Profilüberdeckung ε_α

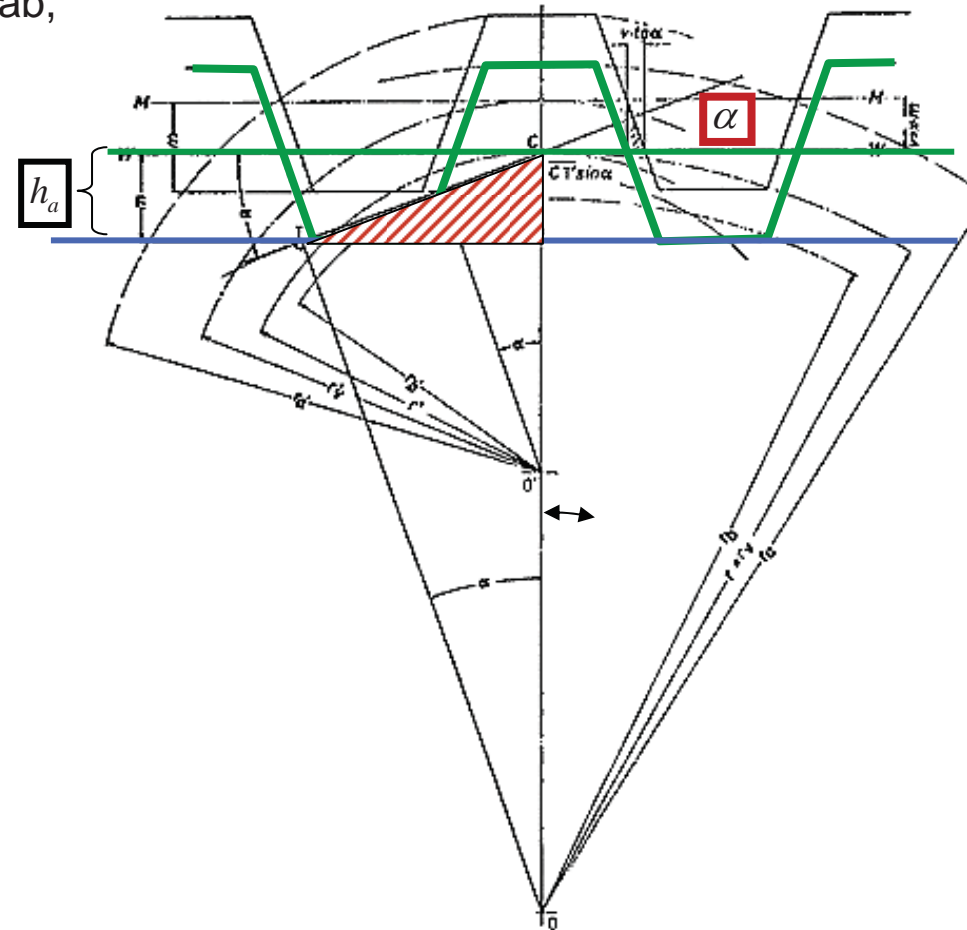
- Hieraus leitet sich die Grenzbedingung ab, dass die Kopflinie des Werkzeugs den Tangentenpunkt T schneidet. Das bedeutet für die **nicht profilverschobene Geradverzahnung**:

$$h_a = m = \overline{TC} * \sin \alpha = r * \sin^2 \alpha$$

$$h_a = m = \frac{1}{2} z * m * \sin^2 \alpha$$

- Durch Umstellung errechnet sich deren **Grenzzähnezahl** z_{gr}

$$z > z_{gr} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \quad \boxed{z \in \mathbb{N}}$$



- Für die **profilverschobene Geradverzahnung** ergibt sich indes:

$$h_a = m = \overline{T'C} * \sin \alpha_w + v$$

$$v = x * m$$

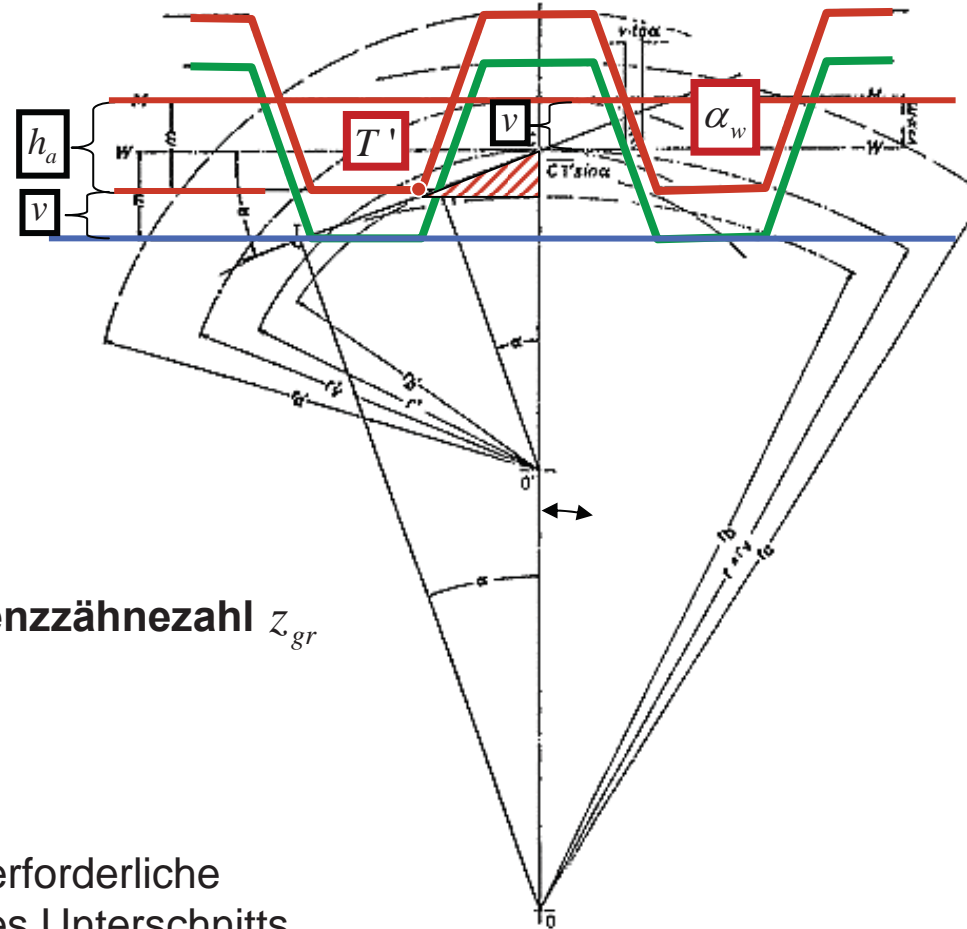
$$h_a = \cancel{m} = x * \cancel{m} + \frac{1}{2} z * \cancel{m} * \sin^2 \alpha_w$$

- Durch Umstellung ergibt sich deren **Grenzzähnezahl** z_{gr}

$$z > z_{gr} = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \alpha_w} \quad z \in N$$

- Bei vorgegebener Zähnezahl kann die erforderliche Profilverschiebung zur Vermeidung eines Unterschnitts wie folgt berechnet werden:

$$x_{erf} = 1 - \frac{z}{2} * \sin^2 \alpha_w$$



Beispiel zur Ermittlung der theoretischen Grenzzähnezahl

1. $x = 0$ $\beta = 0$

$$z_{gr,th} = \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = 17,2 \rightarrow 17$$

2. $x = 0,5$ $\beta = 0$

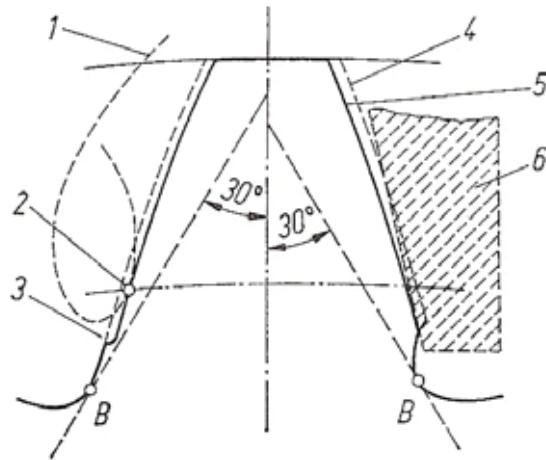
$$z > z_{gr} = \frac{2(1-0,5)}{\sin^2 20^\circ} 8,5 \rightarrow 8$$

Achtung:
Spitzer Zahnkopf

- Solange der Unterschnitt nicht die Eingriffsstrecke beeinflusst, lässt man diesen in der Praxis in geringem Maße zu. Hierbei definiert man die praktische Grenzzähnezahl:

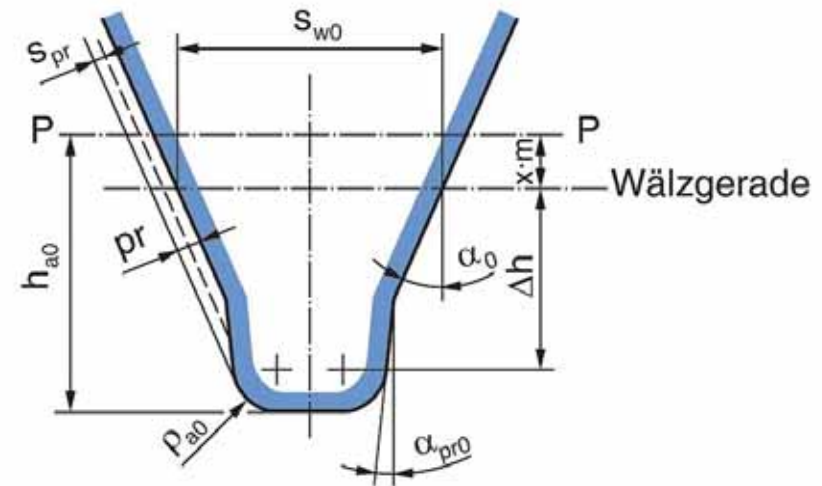
$$z_{gr,pr} > z_{gr,th} * \frac{14}{17}$$

- Ein geringer Unterschnitt begünstigt auch das Schleifen der Verzahnung. Aus dem gleichen Grund verwendet man zum Teil Werkzeuge mit Protuberanz.



Flankenform geschliffener Stirnräder

links) ohne Protuberanz
rechts) mit Protuberanz



Protuberanzwerkzeug mit allgemeinem Profilwinkel α_0
Protuberanzwerkzeug mit allgemeinem Profilwinkel

Erzeugung eines künstlichen Unterschnitts

- Werden Räder mit Unterschnitt verwendet, so ist zu beachten, dass die Eingriffslinie durch den Unterschnittpunkt verkürzt wird. Bei der Festigkeitsberechnung ist dann die entsprechende Zahnbruchsehne zu berechnen.

Auslegung des Zahnkopfes

- Die Verschiebung des Zahnprofils auf ein weiter außen liegendes Stück der Evolvente durch Profilverschiebung kann dazu führen, dass der Zahnkopf bereits unterhalb des vorgesehenen Kopfkreisdurchmessers spitz wird. Schrägverzahnung wirkt dieser Erscheinung durch die Verbreiterung des Werkzeugs im Stirnschnitt entgegen. Als Grenzbedingung gilt:

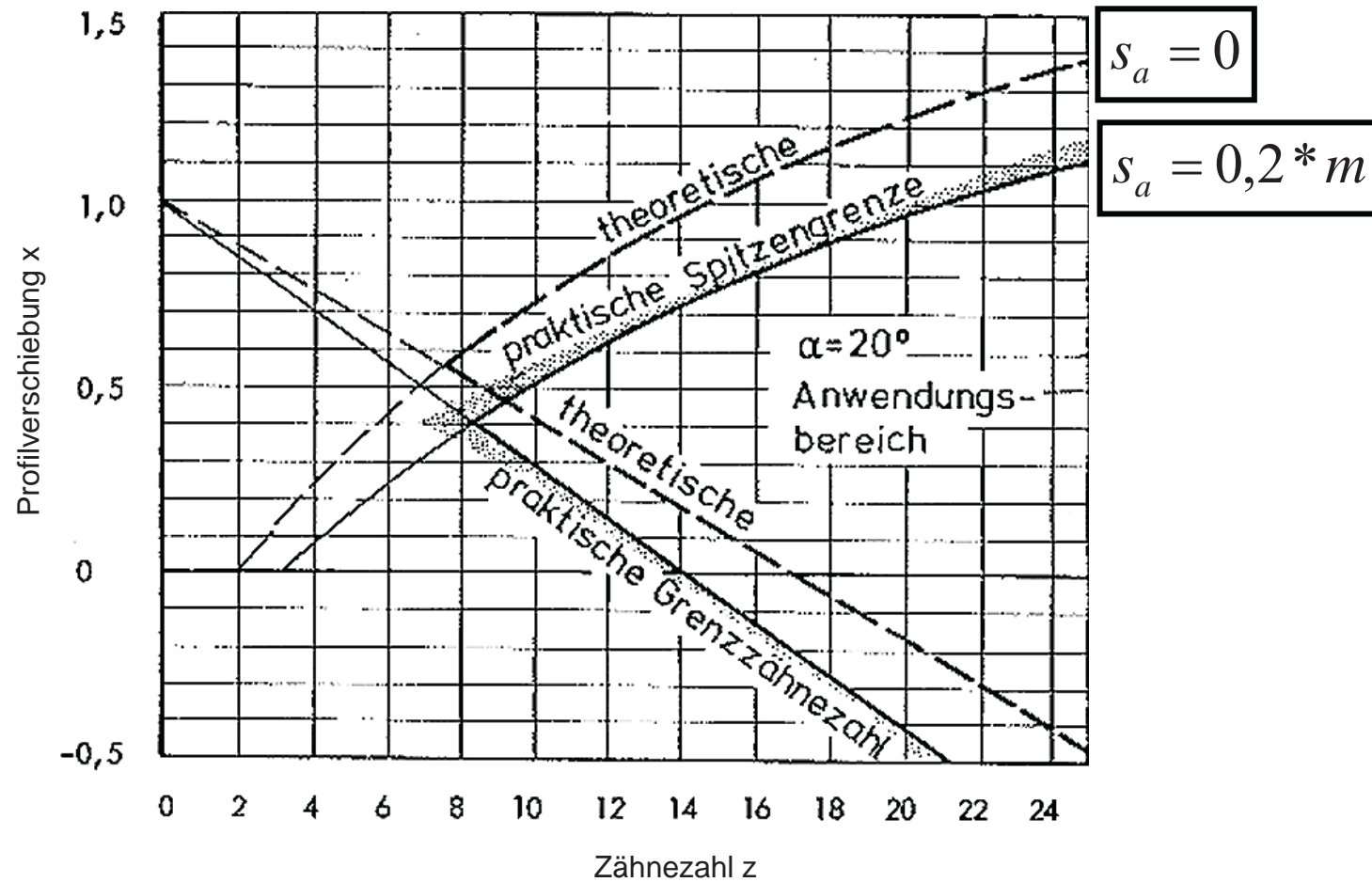
$$s_a = 0,2 * m \quad \dots \text{praktische Spitzengrenze}$$

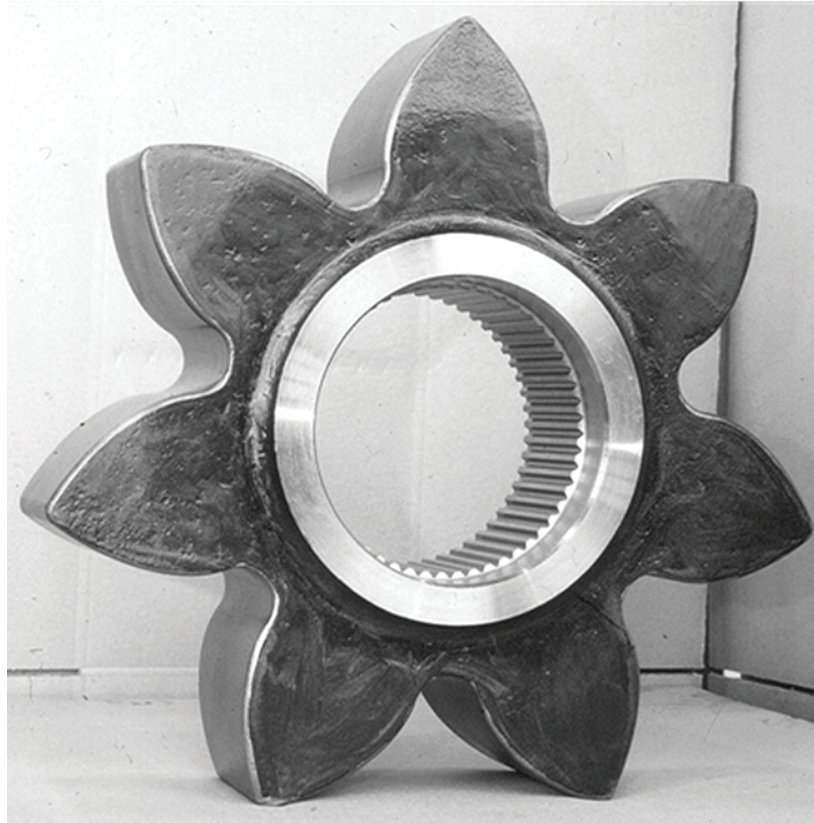
Berechnung der Zahndicke s. Folie 120

- Diese Grenze muss in der Praxis eingehalten werden, da folgende Gefahren drohen:

- Abplatzen von Härteschichten, Empfindlichkeit der Kopfkanten

- Die folgende Übersicht zeigt das Feld geometrisch möglicher Geradverzahnungen.





Geradverzahntes Zahnrad
mit 7 Zähnen

Zusammenfassende Aussagen zur Profilverchiebung

- Mit steigender Profilverchiebung x nimmt die Zahnfußdicke zu, weshalb

die statische Tragfähigkeit größer wird.

Zugleich sinkt jedoch der Krümmungsradius im Zahnfußbereich, weshalb

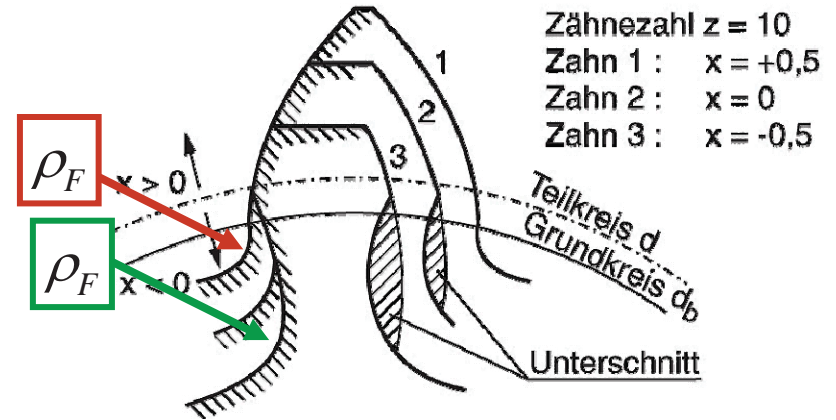
die dynamische Zahnfußtragfähigkeit infolge größerer Kerbwirkung abnimmt.

bei $x \approx +1 \rightarrow \rho_F = \rho_{a0}$

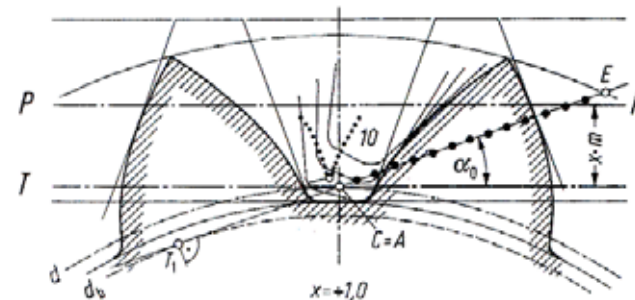
ρ_{a0} ...

Werkzeugkopfradius

Zusammenhang gilt bis etwa $z = 15$



Änderung der Zahnform durch Profilverchiebung für Außenverzählung



- Mit zunehmender Summe der Profilverschiebungsfaktoren, steigt der Betriebs-eingriffswinkel. Demzufolge werden im Wälzpunkt die Krümmungsradien der Zahnprofile größer.

→ Schmiegunq wird besser und somit kleinere Hertzsche Pressung

- Gleichzeitig nimmt mit wachsender Profilverschiebung und bei Kopfkürzung jedoch die Profilüberdeckung ab und die äußeren Einzeleingriffspunkte rücken näher zum Zahnkopf.

→ ungünstige Auswirkung auf Geräuschverhalten und Laufruhe

- Aufgrund der sich zueinander widersprechenden Einflussfaktoren hinsichtlich Geräuschverhalten, Laufruhe, statischer und dynamischer Tragfähigkeit liegt bei der Wahl der Größe der Profilverschiebungssumme der Fokus auf der dynamischen Tragfähigkeit. Daher verwendet man üblicherweise bei praktisch ausgeführten Getrieben Profilverschiebungssummen von:

$$\boxed{-0,5} \leq (x_1 + x_2) \leq \boxed{+1,5}$$

- Grundsätzliche Empfehlungen zur Wahl und Größe der Profilverschiebungssummen und ihre Aufteilung auf Ritzel und Rad sind der DIN 3992 zu entnehmen.
- Mit der Anwendung der Profilverschiebung bei der Fertigung im Wälzverfahren sind keine höheren Kosten verbunden.