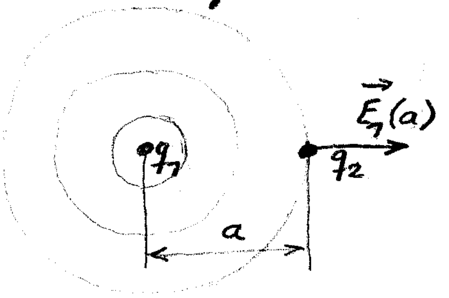
Energie und Kraft im elektrischen Feld

Kraft auf Punktladung

bekannt ist : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ (aus Def. der el. Feldstärke $\vec{E}$)

Für Kraft zwischen 2 Punktladungen folg. Denkansatz:

1. Ladung erzeugt im Abstand a die Feldstärke $E_1(a)$
2. Ladung erfährt die Kraftwirkung dort aus $E_1(a)$



Verschiebungsflußdichte aus 1. Ladung q_1 $\quad D_1 = \dfrac{q_1}{4\pi a^2}$

$$\Downarrow \quad \underline{\underline{E_1}} = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon a^2}$$

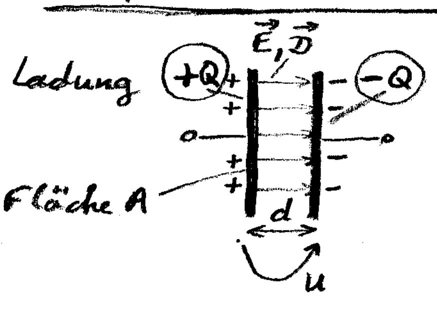
Damit Kraft auf 2. Ladung q_2 $\quad \boxed{F = q_2 \cdot E_1(a) = \dfrac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon \cdot a^2}}$

= Coulomb'sches Gesetz (nur für Pkt.ldg.)

$\overset{F}{\longleftarrow}\bullet \quad \bullet\overset{F}{\longrightarrow}$ für gleichartige Ladungen

$\bullet\overset{F}{\rightarrow} \; \overset{F}{\leftarrow}\bullet$ für ungleichartig Ldg. +, −

Kraft auf Plattenpaar (homogenes Feld)



wegen $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ wirkt auf ein diff. kleines Ladungselement dQ einer Platte die Kraft:

$$\overrightarrow{dF} = \vec{E} \cdot dQ$$

mit $dQ = C \cdot du$ (aus Def. Kapazität) und $E = \dfrac{u}{d}$

$$\Downarrow \quad dF = \frac{u}{d} C \cdot du$$

und die gesamte Kraft:

$$F = \frac{C}{d} \int_0^u u \cdot du = \frac{C}{d} \cdot \frac{u^2}{2}$$

nun mit $C = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{d}$ .... $E = \dfrac{u}{d}$ ... $D = \varepsilon E$ ... $D = \dfrac{Q}{A}$ jeweils umformen

$$\Downarrow \quad \boxed{F = \frac{\varepsilon A u^2}{2 d^2} = \frac{\varepsilon E^2 A}{2} = \frac{E D \cdot A}{2} = \frac{Q \cdot E}{2}}$$

Diese Kraft wirkt in Richtung Verringerung des Plattenabstandes.
Dabei wird Feldenergie verringert, dh. in mechanische Energie $W_{mech} = F \cdot dx$ umgewandelt ($\Rightarrow$ Platten ziehen sich an).

Im Plattenkondensator gespeicherte Energie

bekannt ist $W = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ (vgl. Seite 35)

Bem: Wenn Kapazität allg. bekannt ist, gilt dies für die Gesamtenergie eines jeden el. Feldes!

mit $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$ und $U = E \cdot d$ für homogenes Feld

$\Rightarrow \quad W = \frac{\varepsilon E^2 \cdot A \cdot d}{2}$ mit Volumen $V = A \cdot d$ und $D = \varepsilon E$

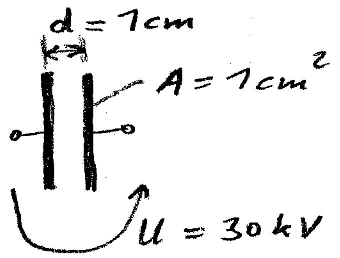
wird Gesamtenergie $$\boxed{W = \frac{\varepsilon E^2 \cdot V}{2} = \frac{D \cdot E \cdot V}{2}}$$

(!) Diese Energie ist im Dielektrikum (dh. im Feld) als Polarisationsenergie gespeichert, die Kondensatorplatten stellen nur die Begrenzung des el. Feldraumes dar!

Energie bezogen auf das Volumen wird

Energiedichte $$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}}$$

ZB: geg:



Plattenkondensator in Luft: ε_0

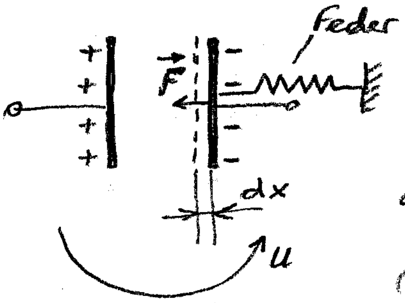
$E = \frac{U}{d}$

ges: Kraft auf Platten (anziehend)

$$F = \frac{\varepsilon \cdot E^2 \cdot A}{2} = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 \cdot 30 \cdot 10^3 \frac{V^2}{cm^2} \cdot 1\,cm^2 = 4\,mN$$

Bestimmung d. Kraft (auf Trennflächen) nach dem Prinzip der virtuellen Verrückung

Vorstellung: leitende Oberfläche grenzt an Isolator



Annahme:
Verrückung der Platte um dx!

dabei Energie (= verrichtete Arbeit) = Kraft · Weg

$\Downarrow$ differenziell: $dW_{mech} = F \cdot dx$

diff. Änderung der elektrischen Energie muß folgen aus

$$dW_{elekt} = \underset{\text{(elektr. Feld)}}{dW_{Feld}} + \underset{\text{(mechanisch)}}{dW_{mech}}$$

Jetzt Annahme, daß bei Verrückung der Platte um dx die Ladung $Q = const.$ bleibt (dh. $I = 0$, kein Ladungstransport; Quelle abgesch.)

$$dW_{elekt} = u \cdot i \cdot dt = 0$$

$$\Downarrow \quad 0 = dW_{Feld} + dW_{mech}$$

also gilt $dW_{mech} = -dW_{Feld}$

$$\underline{\underline{F \cdot dx = -dW_{Feld}}}$$

dh.: Änderung der mechan. Energie läßt sich auf gegenläufige Änderung der Feldenergie zurückführen!

mit bekannter Bez. $W_{Feld} = \frac{C \cdot u^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$ $\qquad Q = C \cdot U = const.$

und diff. wird $\frac{dW_{Feld}}{dC} = -\frac{Q^2}{2C^2} = -\frac{u^2}{2}$ $\qquad u = \frac{Q}{C}$

$$\Downarrow \quad \boxed{dW_{Feld} = -\frac{u^2}{2} \cdot dC}$$

Damit Gleichsetzen $dW_{mech} = -dW_{Feld}$

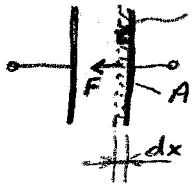
$$F \cdot dx = +\frac{u^2}{2} \cdot dC$$

$$\Downarrow \text{Kraft} \quad \boxed{F = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx}}$$

Kraft F auf Trennfläche versucht, Kapazität C zu vergrößern, wirkt stets <u>senkrecht</u> zur Trennfläche.

Darstellung von W_{Feld} und F über die Feldgrößen D, E:

$$dW = dF \cdot dx = \frac{U^2}{2} dC = \frac{\varepsilon E^2 \cdot A \cdot dx}{2}$$



$$dC = \frac{\varepsilon A}{dx}$$

$$D = \varepsilon \cdot E$$

Energie im Inhomogenen Feld

$$\boxed{dW = \frac{D \cdot E}{2} dV = \frac{D^2}{2\varepsilon} dV}$$

bzw. Energiedichte (auf Volumen bezogen)

$$\boxed{w = \frac{dW}{dV} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}}$$

bzw. Kraft dF aus $\frac{dW}{dx}$

$$\boxed{dF = \frac{D \cdot E}{2} \cdot dA = \frac{D^2}{2\varepsilon} dA}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dA \cdot \cancel{dx}}{\cancel{dx}} = dA$$

- <u>Im inhomogenen Feld</u> damit Integration über Ortskoordinaten für dV und dA erforderlich!
- <u>Für homogenes Feld</u> vgl. Ergebnisse auf Seiten 38a: F
  und 38b: W, w

Energie und Kraft im magnetischen Feld

Kraft auf bewegte Ladung

bekannt ist: $\vec{F}_L = q\cdot(\vec{V}\times\vec{B})$ ← Lorenzkraft (Kraft auf mit Geschw. v bewegte Ladung q im Magnetfeld)

bzw:

$q = I\cdot t \rightarrow q\cdot v = I\cdot \underbrace{v\cdot t}_{l}$: $\vec{F}_L = I(\vec{l}\times\vec{B})$ ← Strom I in Richtung $\vec{l}$

wenn $\vec{v}\perp\vec{B}$, wird

$$F_L = q\cdot v\cdot B = I\cdot l\cdot B \qquad 1\,N = 1\,\frac{Ws}{m}$$

Daraus könnte die magnet. Feldstärke B definiert werden

$$B = \frac{F_L}{q\cdot v} = \frac{F_L}{I\cdot l} \qquad [B] = 1\,\frac{N}{As\,\frac{m}{s}} = 1\,\frac{V\cancel{As}}{\cancel{As}\,m\cdot\frac{m}{s}}$$

$$[B] = 1\,\frac{Vs}{m^2}$$

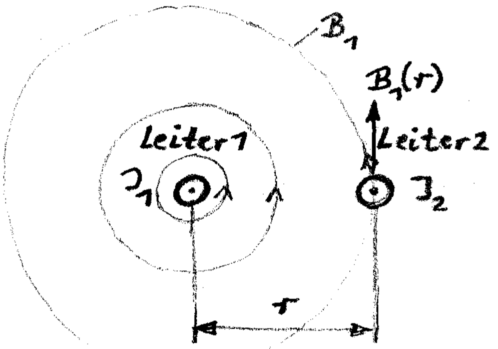
Kraft zwischen 2 parallelen Leitern

folg. Denkansatz:

Leiter 1 erzeugt im Abstand r die Feldstärke $H_1(r)$

Leiter 2 erfährt dort die Kraftwirkung aus Lorenzkraft

(bzw. umgekehrt)



Feldstärke des Leiters 1

$$\oint H_1\, ds = I_1 \qquad \text{Durchflut-Gesetz}$$

$$H_1\cdot 2\pi r = I_1$$

$$\Rightarrow H_1(r) = \frac{I_1}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B_1(r)}} = \mu H_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi r}$$

da $\vec{B}_1 \perp \vec{l}_2$ u. I_2 in Richtg. $\vec{l}_2$

folgt $$\boxed{F_L = I_2\cdot l_2\cdot B_1(r) = \frac{\mu\cdot I_1\cdot I_2}{2\pi r}\cdot l_2}$$

Richtung der Kräfte

I_1, I_2 gleichsinnig : F anziehend

I_1, I_2 gegensinnig : F abstoßend

zB: 2 Sammelschienen, vom gleichen Strom $J = 10\,kA$ durchflossen in Luft, Abstand $r = 0{,}25\,m$

Hier sinnvoll, längenbezogene Kraft F' (Länge $l \mathrel{\hat{=}} l_2$) einzuführen

$$\boxed{F' = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \cdot J^2}{2\pi r}}$$

(F zB. für $l = 1\,m$ angebbar)

$$F' = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,Vs \cdot 10^8\,A^2}{2\pi \cdot 0{,}25\,m\,Am}$$

$$\underline{\underline{F' = 80\,\frac{AVs}{m^2} = 80\,\frac{Ws}{m^2} = 80\,\frac{N}{m}}}$$

In einer Induktivität gespeicherte Energie

bekannt ist: $W = \dfrac{L \cdot J^2}{2}$ (vgl. Seite 53)

Bem: Wenn Induktivität allg. bekannt ist, gilt dies für die Gesamtenergie eines jeden magnet. Feldes!

mit $L = \dfrac{w^2}{R_m} = \dfrac{\mu \cdot A \cdot w^2}{l}$ und $\Theta = J \cdot w = H \cdot l$ für homogenes Feld
Durchflutung

$J = \dfrac{H \cdot l}{w}$

$$\Rightarrow W = \frac{\mu A w^2 J^2}{2l} = \frac{\mu \cdot H^2 A l}{2}$$

$A \cdot l = V$ Volumen des mgn. Feldes.

wird Gesamtenergie

$$\boxed{W = \frac{\mu H^2 \cdot V}{2} = \frac{B \cdot H \cdot V}{2}}$$

$B = \mu H$

Diese Energie ist im magnet. Kreis als magnet. Feldenergie, (verkoppelt mit L und erzeugendem Strom J) gespeichert.

Dieser Ausdruck gilt auch allg. für diff. kleine, als homogen betrachtete Teilvolumina eines inhomogenen Feldes, dh:

$$dW = \int \frac{\mu H^2}{2}\,dV = \int \frac{BH}{2}\,dV$$

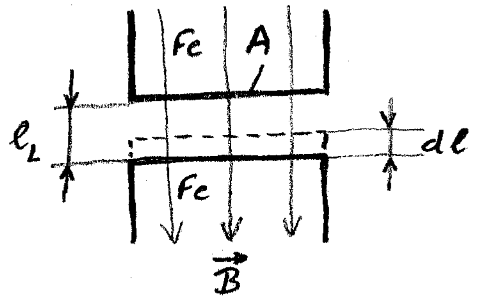
Sinnvoll ist hierbei der Bezug auf das (Teil-)Volumen:

Energiedichte

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{B^2}{2\mu}}$$

Bestimmung der Kraft (auf Trennflächen) nach dem <u>Prinzip der virtuellen Verrückung</u>

Vorstellung: Luftspalt im magnet. Kreis



bei Verringerung der Luftspaltlänge l_L um dl wird mechanische Arbeit

$$dW_{mech} = F \cdot dl$$

geleistet.
Um diese Arbeit muß sich die Energie des magnet. Feldes verringern!
(wenn Gesamtenergie = const.)

Wenn $B = \text{const.}$ vorausgesetzt wird, ändert sich die magnet. Feldenergie nur im Bereich $A \cdot dl$
(entspr. Änderung von H_L auf H_{Fe})

$$\text{um} \quad dW = \underbrace{w_L \cdot dV_L}_{\text{in Luft}} - \underbrace{w_{Fe} \cdot dV_{Fe}}_{\text{in Fe}} = \left(\int \frac{B}{\mu_0}\, dB - \int \frac{B}{\mu_0 \mu_r}\, dB \right) A\, dl$$

Gleichsetzen mit dW_{mech} liefert

$$F = \left(\frac{B^2}{2\mu_0} - \underbrace{\cancelto{0}{\int \frac{B}{\mu_0 \mu_r}\, dB}}_{\to 0\text{, wegen } W_{Fe} \ll W_L \text{ da } \mu_r \gg 1} \right) \cdot A$$

$$\Rightarrow \boxed{F \approx \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot A = \frac{\mu_0 H^2}{2} A = \frac{B \cdot H \cdot A}{2}}$$

Kraft F auf Trennfläche versucht Induktivität L zu vergrößern, wirkt stets <u>senkrecht</u> zur Trennfläche in Richtung zum Luftspalt hin.

(!) letztendlich spielen <u>nur</u> μ_0 und <u>H bzw. B im Luftspalt</u> für die Kraft- und Energieberechnung eine Rolle, da die im Eisen gespeicherte magn. Feldenergie gegenüber der im Luftspalt gespeicherten – vernachlässigbar ist!

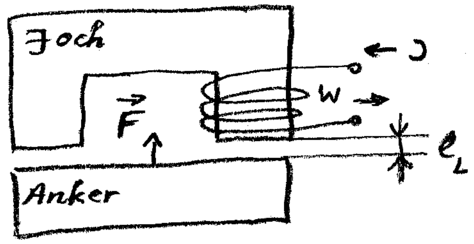
$$W_{Fe} \ll W_L$$

Oft erfolgt Angabe der mechanischen Zugspannung σ

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A} \approx \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2}} \qquad [\sigma] = 1\,\frac{N}{m^2}$$

1. Beispiel:

geg: Elektromagnet



$w = 1000$ Windungen

$J = 1A$

$\mu_{r\,Fe} >> 1$ ($\curvearrowright$ Feldenergie in Fe $W_{Fe} \to 0$)

l_L: 0…8 mm

ges: Zugspannung $\sigma = f(l_L)$

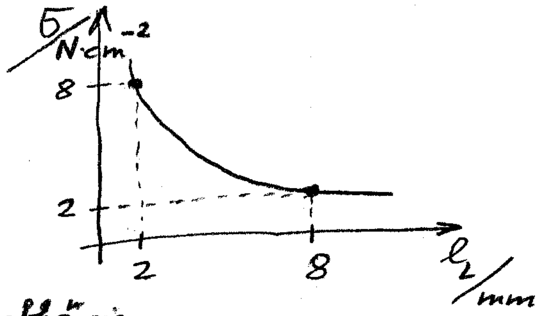
Durchflutungsgesetz $\oint H \cdot ds = J \cdot w$ wobei Feld in Fe vernachlässigt

$$H_L = \frac{J \cdot w}{\underset{\uparrow}{2} l_L} \quad \curvearrowright \quad B_L = \mu_0 \frac{J \cdot w}{2 l_L} = B$$

2 Luftspalte (in Reihenschaltung)

$$\curvearrowright \quad \sigma = \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\text{s. oben}} = \frac{\mu_0 (J \cdot w)^2}{8 l_L^2}$$

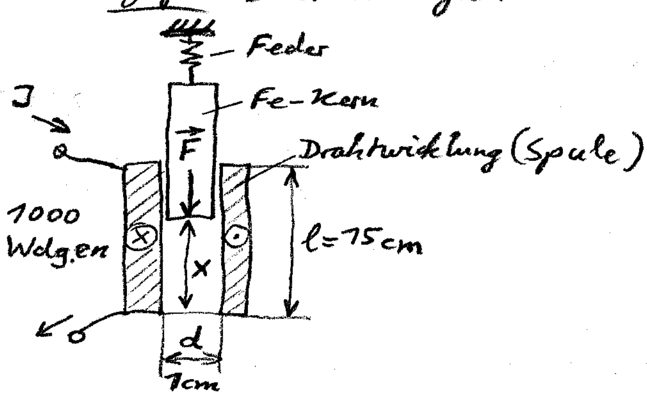
$$\sigma = \frac{\mu_0 \cdot J^2 \cdot w^2}{8 l_L^2}$$



Allg: Zugspannung σ nur von magn. Feldgrößen abhängig
Zur Angabe der Kraft F noch Multiplikation mit Querschnittsfläche A des Luftspalts erforderlich.

2. Beispiel

geg: Elektromagnet



Fe-Kern wird in Wickelkörper (Spule) hineingezogen

ges: Zugspannung $\sigma = f(x)$

Näherungen: $l >> d$,
d.h. „lange Spule"

$\curvearrowright$ nur Berücks. des Luft-Feldes in Spule!

Durchflut.- Gesetz $\oint H \cdot ds = J \cdot w$

liefert nur nennenswerten Beitrag für Feldstärke H_i im Inneren der Spule im nicht vom Fe-Kern ausgefüllten Luftbereich, dh. in x

$H = H_i$: $H_i \cdot x = J \cdot w$

$$\Downarrow \quad H_i = \frac{J \cdot w}{x}$$

$$\Downarrow \quad B_i = \frac{\mu_0 J \cdot w}{x} = B$$

Bem: Diese Näherung gilt nicht mehr für $x \to 0$, da dann das magn. Feld außerhalb der Spule deutlich überwiegt...

$$\text{damit} \quad \underbrace{\sigma = \frac{F}{A} = \frac{B^2}{2\mu_0}}_{\text{bekannt, s. oben}} = \frac{\mu_0 (J \cdot w)^2}{2 \cdot x^2}$$

Zahlenwerte: $J = 0{,}5\,A$
$w = 1000$
$0 < x < 15\,cm$

$$\sigma = \frac{1{,}26 \cdot 10^{-6}\,Vs \cdot 0{,}5^2\,A^2 \cdot 10^6}{Am \quad 2x^2} \qquad \frac{VAs}{m}$$

$$\sigma = \frac{0{,}156}{x^2}\,N \qquad [\sigma] = 1\frac{N}{cm^2}$$

Bem: tatsächlich geht $F \to 0$ für $x \to 0$ (Kern vollständig im Wickelkörper)
Ungenauigkeit infolge näherungsweisen Ansatzes!