# — Informatik I —
# Modul 2: Rechnerarithmetik


Universität Zürich[UZH]

CSG
Communication Systems Group





ifi

# Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung
- Grundrechenarten
- Zeichendarstellung

# Rechnerarithmetik

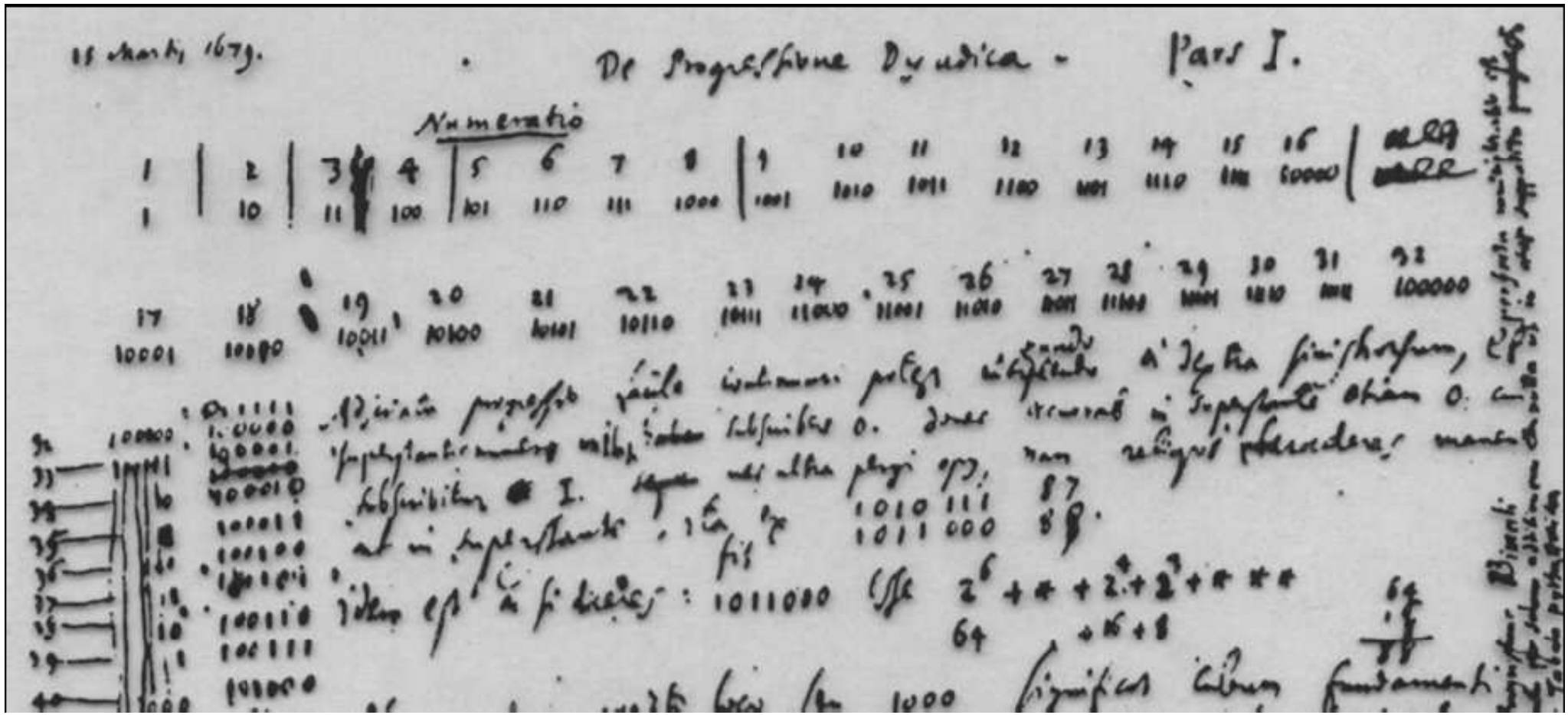
- Die Rechnerarithmetik soll als Beispiel eingeführt werden, wie größere Informationseinheiten elektronisch verarbeitet werden.
- Hierzu werden zunächst die formalen Grundlagen erarbeitet:
  - Zahlensysteme
  - Zahlendarstellungen
  - Grundrechenarten
  - Zeichendarstellungen
  - Boole‘sche Algebra (Modul 3)
- Die Rechnerartithmetik bildet gleichzeitig die entscheidende Grundlage, beliebige Informationen und Informationseinheiten zu behandeln, sprich zu berechnen, umzuwandeln, zu speichern oder zu kommunizieren.

# Zahlensysteme – Römische Zahlen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | X | 10 | C | 100 |
| II | 2 | XX | 20 | CC | 200 |
| III | 3 | XXX | 30 | CCC | 300 |
| IV | 4 | XL | 40 | CD | 400 |
| V | 5 | L | 50 | D | 500 |
| VI | 6 | LX | 60 | DC | 600 |
| VII | 7 | LXX | 70 | DCC | 700 |
| VIII | 8 | LXXX | 80 | DCCC | 800 |
| IX | 9 | XC | 90 | CM | 900 |
| | | | | M | 1000 |

# Zahlensysteme – Leibniz‘sche Dualzahlen

- Leibniz-Traktat aus dem Jahre 1679
- Vermutlich kommen Ideen zum Dualzahlensystem aus China



# Formale Grundlagen

- Menschen rechnen gewöhnlich im Dezimalzahlensystem.
- Rechner rechnen gewöhnlich im Dualzahlensystem.

→ Eine Konvertierung ist erforderlich

- Daneben werden weitere Zahlensysteme wie Oktalzahlensystem oder Hexadezimalzahlensystem (eigentlich: Sedezimal) zur kompakteren Darstellung der sehr langen Dualzahlen verwendet.

→ Es ist notwendig, die Zusammenhänge und mathematischen Grundlagen dieser Zahlensysteme zu verstehen.

# Zahlensysteme (1)

- Gängigste Form: Stellenwertsysteme
- Zahlendarstellung in Form einer Reihe von Ziffern $z_i$, wobei das Dezimalkomma (-punkt) rechts von $z_0$ plaziert sei:

  $z_n\ z_{n-1}\ \ldots\ldots\ z_1\ z_0\ ,\ z_{-1}\ z_{-2}\ \ldots z_{-m}$ z.B. 1234,567

- Jeder Position i der Ziffernreihe ist ein Stellenwert zugeordnet, der eine Potenz $b^i$ der Basis b des Zahlensystems ist.
- Der Wert $X_b$ der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n\, b^n + z_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + z_1\, b + z_0 + z_{-1}\, b^{-1} + \ldots + z_{-m}\, b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

# Zahlensysteme (2)

- Interessante Zahlensysteme in der Informatik

| b | Zahlensystem | Zahlenbezeichnung |
|---|---|---|
| 2 | Dualsystem | Dualzahl |
| 8 | Oktalsystem | Oktalzahl |
| 10 | Dezimalsystem | Dezimalzahl |
| 16 | Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem) | Hexadezimalzahl (Sedezimalzahl) |

- Hexadezimalsystem: Die „Ziffern“ 10 bis 15 werden mit den Buchstaben A bis F dargestellt.
- Dualsystem: Wichtigstes Zahlensystem im Rechner
- Oktal- und Hexadezimalsystem: Leicht ins Dualsystem umwandelbar, besser zu verstehen als lange 0-1-Kolonnen.

# Zahlensysteme (3)

- Eine einzelne Binärstelle (0 oder 1), die ein Rechner speichert,wird als **Bit** bezeichnet. Das ist die Abkürzung für „*BInary digiT*“, also Binärziffer. Es handelt sich um die kleinste Informationseinheit, die ein Computer verarbeiten kann.
- Auch beim Dualsystem handelt es sich um ein Positionssystem. Der Wert einer Position ist hier jedoch eine Potenz von 2:

$$10011 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$
$$= 19 \text{ (im Zehnersystem)}$$

- Beispiele:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(10011)_2$ | = | $(19)_{10}$ | | oder: | $10011_{(2)}$ | = | $19_{(10)}$ |
| $(1011)_2$ | = | $(11)_{10}$ | | oder: | $1011_{2)}$ | = | $11_{(10}$ |
| $(11010110)_2$ | = | $(214)_{10}$ | | oder: | $11010110_{(2)}$ | = | $214_{(10)}$ |

# Zahlensysteme (4)

| Dual | Oktal | Dezimal | Hexadezimal | Zwölfersystem |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | **0** | 0 | 0 |
| 1 | 1 | **1** | 1 | 1 |
| 10 | 2 | **2** | 2 | 2 |
| 11 | 3 | **3** | 3 | 3 |
| 100 | 4 | **4** | 4 | 4 |
| 101 | 5 | **5** | 5 | 5 |
| 110 | 6 | **6** | 6 | 6 |
| 111 | 7 | **7** | 7 | 7 |
| 1000 | 10 | **8** | 8 | 8 |
| 1001 | 11 | **9** | 9 | 9 |
| 1010 | 12 | **10** | a | a |
| 1011 | 13 | **11** | b | b |
| 1100 | 14 | **12** | c | 10 |
| 1101 | 15 | **13** | d | 11 |
| 1110 | 16 | **14** | e | 12 |
| 1111 | 17 | **15** | f | 13 |
| 10000 | 20 | **16** | 10 | 14 |
| 10001 | 21 | **17** | 11 | 15 |

# Zahlensysteme (5)

- Bei gebrochenen Zahlen trennt ein Punkt (Komma im Deutschen) in der Zahl den ganzzahligen Teil der Zahl vom gebrochenen Teil (Nachkommateil). Solche Zahlen lassen sich durch folgende Summenformel beschreiben:

$$n = \sum_{i=-M}^{N-1} b_i \cdot B^i \qquad \text{wobei Folgendes gilt:}$$

  - B = Basis des Zahlensystems ($B \in \mathbb{N}, B \geq 2$)
  - b = Ziffern ($b_i \in \mathbb{N}_0, 0 \leq b_i < B$)
  - N = Anzahl der Stellen vor dem Punkt (Komma)
  - M = Anzahl der Stellen nach dem Punkt (Komma)

# Konvertierung: Euklidischer Algorithmus

- Umwandlung vom Dezimalsystem in ein System zur Basis b
- 1. Methode: Euklidischer Algorithmus:

  $Z = z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + ... + z_1 10 + z_0 + z_{-1} 10^{-1} + ... + z_{-m} 10^{-m}$

  $= y_p b^p + y_{p-1} b^{p-1} + ... + y_1 b + y_0 + y_{-1} b^{-1} + ... + y_{-q} b^{-q}$

  Die Ziffern werden sukzessive, beginnend mit der höchst-wertigen Ziffer, berechnet.
- 1. Schritt: Berechne **p** gemäß der Ungleichung $\mathbf{b^p \leq Z < b^{p+1}}$ (setze i = p)
- 2. Schritt: Ermittle $\mathbf{y_i}$ und den Rest $\mathbf{R_i}$ durch Division von $\mathbf{Z_i}$ durch $\mathbf{b^i}$: $\mathbf{y_i = Z_i \text{ div } b^i;}$ $\mathbf{R_i = Z_i \text{ mod } b^i;}$
- 3. Schritt: Wiederhole 2. Schritt für i = p-1, … und ersetze dabei nach jedem Schritt **Z** durch $\mathbf{R_i}$, bis $\mathbf{R_i = 0}$ oder bis $\mathbf{b^i}$ (und damit der Umrechnungsfehler) gering genug ist.

# Euklidischer Algorithmus: Beispiel

## Umwandlung von $15741{,}233_{10}$ ins Hexadezimalsystem:

1. Schritt: $16^3 \leq 15741{,}233 < 16^4$ ➔ höchste Potenz $16^3$

| | | |
|---|---|---|
| 2. Schritt: | $15741{,}233 : 16^3 = 3$ | Rest 3453,233 |
| 3. Schritt: | $3453{,}233 : 16^2 = D$ | Rest 125,233 |
| 4. Schritt: | $125{,}233 : 16 = 7$ | Rest 13,233 |
| 5. Schritt: | $13{,}233 : 1 = D$ | Rest 0,233 |
| 6. Schritt: | $0{,}233 : 16^{-1} = 3$ | Rest 0,0455 |
| 7. Schritt: | $0{,}0455 : 16^{-2} = B$ | Rest 0,00253 |
| 8. Schritt: | $0{,}00253 : 16^{-3} = A$ | Rest 0,000088593 |
| 9. Schritt: | $0{,}000088593 : 16^{-4} = 5$ | Rest 0,000012299 (→ Fehler) |

➔ **$15741{,}233_{10} \approx 3D7D{,}3BA5_{16}$**

# Konvertierung: Horner Schema

- Umwandlung vom Dezimalsystem in ein Zahlensystem zur Basis b
- 2. Methode: Abwandlung des Horner Schemas
- Hierbei müssen der ganzzahlige und der gebrochene Anteil getrennt betrachtet werden.
- Umwandlung des ganzzahligen Anteils:
- Eine ganze Zahl $X_b = \sum_{i=0}^{n} z_i b^i$ kann durch fortgesetztes Ausklammern auch in folgender Form geschrieben werden:

$$X_b = ((...(((y_n\ b + y_{n-1})\ b + y_{n-2})\ b + y_{n-3})\ b\ ...\ )\ b + y_1)\ b + y_0$$

# Horner Schema: Beispiel

- Die gegebene Dezimalzahl wird sukzessive durch die Basis **b** dividiert.
- Die jeweiligen ganzzahligen Reste ergeben die Ziffern der Zahl $\mathbf{X_b}$ in der Reihenfolge von der niedrigstwertigen zur höchstwertigen Stelle.

  Wandle $15741_{10}$ ins Hexadezimalsystem um:

  $15741_{10} : 16 = 983$ Rest 13 $(D_{16})$

  $983_{10} : 16 = 61$ Rest 7 $(7_{16})$

  $61_{10} : 16 = 3$ Rest 13 $(D_{16})$

  $3_{10} : 16 = 0$ Rest 3 $(3_{16})$

  ➔ **$15741_{10} = 3D7D_{16}$**

# Umwandlung: Basis b → Dezimalsystem

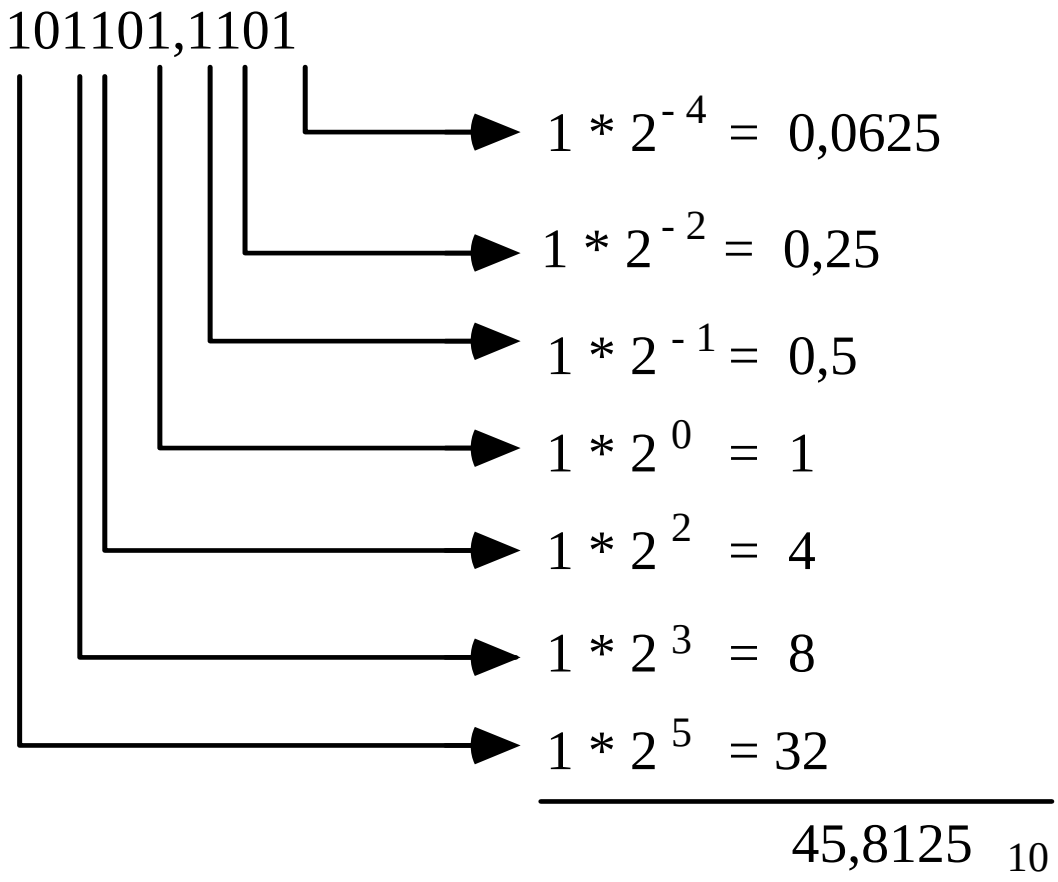
- Die Werte der einzelnen Stellen der umzuwandelnden Zahl werden in dem Zahlensystem, in das umgewandelt werden soll, dargestellt und nach der Stellenwertgleichung aufsummiert.

- Der Wert $X_b$ der Zahl ergibt sich dann als Summe der Werte aller Einzelstellen $z_i b^i$:

$$X_b = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_1 b + z_0 + z_{-1} b^{-1} + \ldots + z_{-m} b^{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i b^i$$

# Beispiel

Konvertiere $101101{,}1101_2$ ins Dezimalsystem

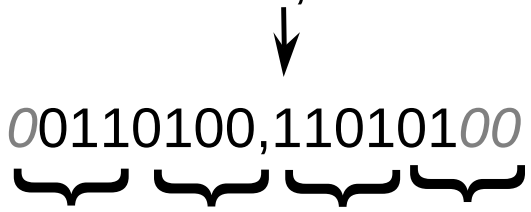


# Umwandlung beliebiger Stellenwertsysteme

- Man wandelt die Zahl ins Dezimalsystem um und führt danach mit Methode 1 oder 2 die Wandlung ins Zielsystem durch.
- Spezialfall:
  - Ist eine Basis eine Potenz der anderen Basis, können einfach mehrere Stellen zu einer Ziffer zusammengefasst werden oder eine Stelle kann durch eine Folge von Ziffern ersetzt werden.
- Wandlung von $0110100{,}110101_2$ ins Hexadezimalsystem
- $2^4 = 16 \Rightarrow$ 4 Dualstellen $\rightarrow$ 1 Hexadezimalstelle

dual

0110100,110101



*0*0110100,11010100

hexadezimal 3 4 , D 4

Ergänzen von Nullen zur Auffüllung auf Vierergruppen

# Spezialfall: Umwandlungen Dual-/Oktalsystem

- Konvertieren zwischen Dual- und Oktalsystem
  - Neben dem Dualsystem ist in der Informatik noch das Oktalsystem wichtig, da es in einer engen Beziehung zum Dualsystem steht. Es gilt nämlich: $2^3 = 8$ (Basis des Oktalsystems).
  - Um eine im Dualsystem dargestellte Zahl ins Oktalsystem zu konvertieren, bildet man von rechts beginnend so genannte *Dualtriaden* (Dreiergruppen).

```
110   111   001   110   010   |  Dualzahl
 6     7     1     6     2    |  Oktalzahl
```

- Konvertieren zwischen Dual- und Oktalsystem
  - Bei der Umwandlung einer Oktalzahl in ihre Dualdarstellung geht man den umgekehrten Weg.

```
 3     6     1     4    |  Oktalzahl
011   110   001   100   |  Dualzahl
```

    - Es ist offensichtlich, dass ein Mensch sich die Zahl $3614_{(8)}$ wesentlich leichter merken und damit umgehen kann, als $011110001100_{(2)}$.

# Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung
- Grundrechenarten
- Zeichendarstellung

# Darstellung negativer Zahlen

- Für die Darstellung negativer Zahlen in Rechnern werden vier verschiedene Formate benutzt :
- Darstellung mit Betrag und Vorzeichen
- Stellenkomplement-Darstellung (Einerkomplement-Darstellung)
- Zweierkomplement-Darstellung
- Offset-Dual-Darstellung / Exzeß-Darstellung

# Darstellung mit Betrag und Vorzeichen

- Eine Stelle wird als Vorzeichenbit benutzt.

- Ist das am weitesten links stehende Bit (MSB, most significant bit):

  MSB = 0 → positive Zahl
  MSB = 1 → negative Zahl

Beispiel:

0001 0010 = +18
1001 0010 = -18

- Nachteile:
  - Bei Addition und Subtraktion müssen die Vorzeichen der Operanden gesondert betrachtet werden.
  - Es gibt zwei Repräsentationen der Zahl 0 (mit positivem und mit negativem Vorzeichen)

# Stellenkomplement / Einerkomplement (1)

- Stellenkomplement der entsprechenden positiven Zahl.
- Um eine Zahl zu negieren, wird jedes Bit der Zahl komplementiert.
- Dies entspricht dem Einerkomplement:

*Komplementbildung*

$z_{ek} = (2^n - 1) - z$

Bsp: $4 = 0100_2$ ➔ $-4 = 1011_{ek}$

$-4 = 2^4 - 1 - 4 = 11_{10} = 1011_2$

- Negative Zahlen sind wiederum durch ein gesetztes Bit in der ersten Stelle charakterisiert.
- Vorteil gegenüber der Darstellung mit Vorzeichenbit:
  - Erste Stelle bei Addition und Subtraktion muß nicht gesondert betrachtet werden.
  - Aber: Es gibt weiterhin zwei Darstellungen der Null

# Stellenkomplement / Einerkomplement (2)

- Regeln für die Bildung eines Einerkomplements
  - Ist das 1. Bit mit 1 besetzt, so handelt es sich um eine negative Zahl (eventuell die negative Null 111…111).
  - Der Wert einer negativen Zahl wird dann im Einer-Komplement dargestellt. Einer-Komplement zu einem Wert bedeutet, dass zunächst jedes einzelne Bit invertiert (umgedreht) wird.
  - Führt die Addition des Komplements zum Überlauf einer 1, muß zum Ergebnis diese 1 hinzuaddiert werden („*Einer-Rücklauf* “).

**Einer-Komplement zu** $(13)_{10} = (01101)_2$**:**

Invertieren von 13 (−13): 10010

Dualdarstellung von 9: 01001

\+ −13: 10010

−−−−−−−−−−−−−−

= −4: 11011

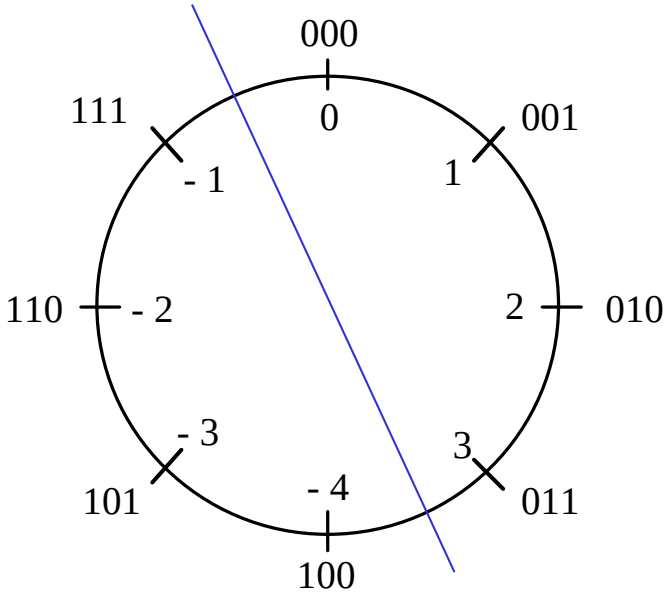
# Zweierkomplement-Darstellung (1)

- Man addiert nach der Stellenkomplementierung noch eine 1
- Man erhält so das Zweierkomplement: $z_{zk} = 2^n - z$

0 . . . 0 → Einerkomplement 1 . . . 1

→ Zweierkomplement 0 . . . 0

- Nachteil:
  - Unsymmetrischer Zahlenbereich. Die kleinste negative Zahl ist betragsmäßig um 1 größer als die größte positive Zahl




- 3-Bit-Zweierkomplementzahlen (Beispiel):

# Zweierkomplement-Darstellung (2)

- Alle anderen negativen Zahlen werden um 1 verschoben, das MSB bleibt aber gleich 1.

- Aus der ersten Stelle kann das Vorzeichen der Zahl abgelesen werden

- Aus dieser Konstruktion ergibt sich der Stellenwert des MSB einer Zweierkomplementzahl mit ***n+1*** Bit zu $-2^n$:

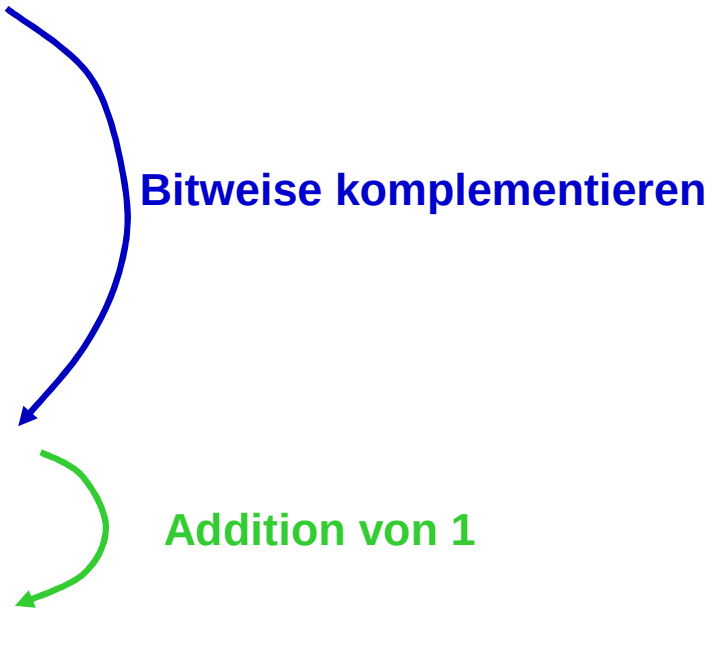
  $z_n\ z_{n-1}\ \ldots\ z_0$ hat den Wert:

$$Z = -z_n \cdot 2^n + z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + z_0$$

# Beispiel

Die Zahl $-77_{10}$ soll mit 8 Bit dargestellt werden

$$77_{10} = 0100\ 1101_2$$




Mit Vorzeichenbit : $-77 = 1100\ 1101_2$

Einerkomplement : $-77 = 1011\ 0010_2$

Zweierkomplement : $-77 = 1011\ 0011_2$

# Offset-Dual- (Exzeß-)Darstellung

- Wird hauptsächlich bei der Exponenten-Darstellung von Gleitkommazahlen benutzt.
- Die Darstellung einer Zahl erfolgt in Form ihrer Charakteristik (bias).
- Der gesamte Zahlenbereich wird durch Addition einer Konstanten (Exzeß, Offset) so nach oben verschoben, daß die kleinste (negative) Zahl die Darstellung **0…0** erhält.
- Bei ***n*** Stellen ist der Offset daher $2^{n-1}$

- Der Zahlenbereich ist hier auch asymmetrisch.

# Zusammenfassung der Möglichkeiten

| Darstellung mit | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dezimalzahl | Betrag + Vorzeichen | Einer-komplement | Zweier-komplement | Charakteristik |
| -4 | - - - | - - - | 1 0 0 | 0 0 0 |
| -3 | 1 1 1 | 1 0 0 | 1 0 1 | 0 0 1 |
| -2 | 1 1 0 | 1 0 1 | 1 1 0 | 0 1 0 |
| -1 | 1 0 1 | 1 1 0 | 1 1 1 | 0 1 1 |
| 0 | 1 0 0, 0 0 0 | 1 1 1, 0 0 0 | 0 0 0 | 1 0 0 |
| 1 | 0 0 1 | 0 0 1 | 0 0 1 | 1 0 1 |
| 2 | 0 1 0 | 0 1 0 | 0 1 0 | 1 1 0 |
| 3 | 0 1 1 | 0 1 1 | 0 1 1 | 1 1 1 |

# Fest- und Gleitkommazahlen

- Zahlendarstellung auf dem Papier:

  | | |
  |---|---|
  | Ziffern | 0 .. 9 |
  | Vorzeichen | + - |
  | Komma (Punkt) | , . |

- Zahlendarstellung im Rechner:

  | | |
  |---|---|
  | Binärziffern | 0, 1 |

➔ spezielle Vereinbarungen für die Darstellung von Vorzeichen und Komma/Punkt im Rechner sind erforderlich

- Darstellung des Vorzeichens:
  - Wurde im vorigen Abschnitt behandelt
- Darstellung des Kommas mit zwei Möglichkeiten:
  - Festkommadarstellung
  - Gleitkommadarstellung

# Festkomma-Zahlen (1)

- Vereinbarung:
  - Das Komma sitzt innerhalb des Maschinenwortes, das eine Dualzahl enthalten soll, an einer festen Stelle.
- Meist setzt man das Komma hinter die letzte Stelle.
- Andere Zahlen können durch entsprechende Maßstabsfaktoren in die gewählte Darstellungsform überführt werden.
- Negative Zahlen:
  - Meist Zweierkomplement-Darstellung.
- Festkomma-Darstellungen werden heute hardwareseitig nicht mehr verwendet, jedoch bei der Ein- oder Ausgabe!

# Festkomma-Zahlen (2)

- Datentyp "integer" (Ganzzahlen) ist ein spezielles Festkommaformat.
- Manche Programmiersprachen erlauben die Definition von Ganzzahlen unterschiedlicher Länge.
- Beispiel "C": "short int", "int", "long int", "unsigned"

| | DEC-VAX (einer der Urahnen) | | IBM-PC, Apple Macintosh | |
|---|---|---|---|---|
| Datentyp | Anzahl der Bits | Zahlenbereich | Anzahl der Bits | Zahlenbereich |
| short int | 16 | $-2^{15}$ ..$2^{15}-1$ | 16 | $-2^{15}$ ..$2^{15}-1$ |
| int | 32 | $-2^{31}$ .. $2^{31}-1$ | 16 | $-2^{15}$ ..$2^{15}-1$ |
| long int | 32 | $-2^{31}$ .. $2^{31}-1$ | 32 | $-2^{31}$ .. $2^{31}-1$ |

# Gleitkomma-Darstellung (1)

- Zur Darstellung von Zahlen, die betragsmäßig sehr groß oder sehr klein sind, verwendet man die Gleitkommadarstellung.

- Sie entspricht einer halblogarithmischen Form

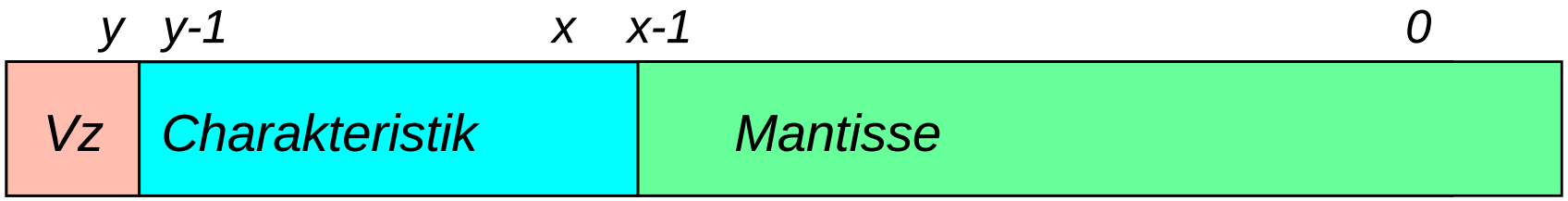
$$X = \pm \text{Mantisse} \cdot b^{\text{Exponent}}$$

- Die Basis b ist für eine bestimmte Gleitkomma-Darstellung fest (meist 2 oder 16) und braucht damit nicht mehr explizit repräsentiert zu werden.

- Gleitkommazahlen werden meist *nicht* im Zweierkomplement, sondern mit Betrag und Vorzeichen dargestellt.

# Gleitkomma-Darstellung (2)

- Bei der Mantisse ist die Lage des Kommas wieder durch Vereinbarung festgelegt (meist links vom MSB).
- Der Exponent ist eine ganze Zahl, die in Form ihrer Charakteristik dargestellt wird.
- Für die Charakteristik und die Mantisse wird im Rechner eine feste Anzahl von Speicherstellen festgelegt.
- Die Länge der Charakteristik y-x bestimmt die Größe des Zahlenbereichs.
- Die Länge der Mantisse x legt die Genauigkeit der Darstellung fest.




$$\text{Dezimalzahl} = (-1)^{Vz} * (0,\text{Mantisse}) * b^{\text{Exponent}}$$

$$\text{Exponent} = \text{Charakteristik} - b^{(y-1)-x}$$

# Normalisierung

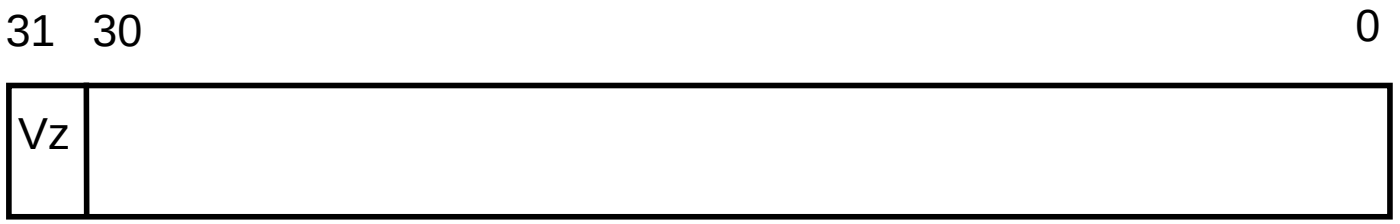
- Legt man für die Zahl 0 ein spezielles Bitmuster fest, ist die erste Stelle der Mantisse in normalisierter Form immer gleich 1.
- Die erste Stelle der Mantisse braucht im Maschinenformat gar nicht erst dargestellt zu werden, d.h. (0,1 . . . . .)
- Man spart ein Bit bei der Speicherung oder gewinnt bei gleichem Speicherbedarf ein Bit an Genauigkeit.
- Bei arithmetischen Operationen und bei der Konversion in andere Darstellungen darf diese Stelle natürlich nicht vergessen werden.

# Beispiel (1)

3 verschiedene Maschinenformate mit je 32 Bit und b = 2.

Die Zahl $7135_{10}$ wird in jedem dieser Formate dargestellt.

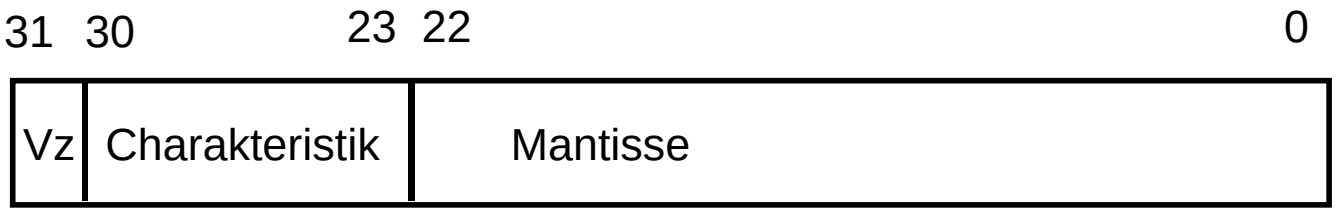
## a) Festkommadarstellung mit Zweierkomplement




0 000 0000 0000 0000 0001 1011 1101 $1111_2$ = 0000 $1BDF_{16}$

# Beispiel (2)

b) Gleitkommadarstellung, normalisiert:




$0\ 100\ 0110\ 1\ 110\ 1111\ 0111\ 1100\ 0000\ 0000_2 = 46EF\ 7C00_{16}$

c) Gleitkommadarstellung, normalisiert, erste "1" implizit:


$0\ 100\ 0110\ 1\ 101\ 1110\ 1111\ 1000\ 0000\ 0000_2 = 46DE\ F800_{16}$

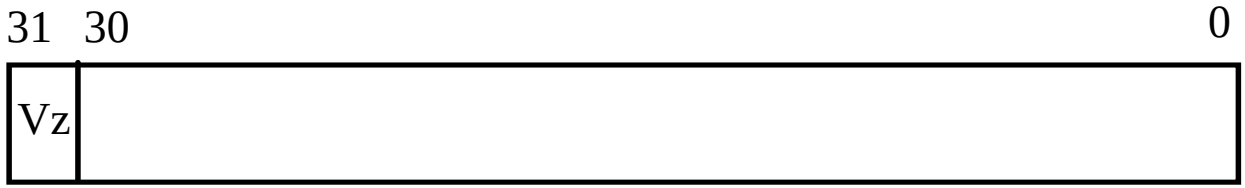
# Darstellbarer Zahlenbereich (1)

- Die Anzahl darstellbarer Zahlen (Bitkombinationen) ist zwar in allen drei Fällen gleich ($2^{32}$)

- Der Bereich und damit die Dichte darstellbarer Zahlen auf dem Zahlenstrahl ist aber sehr unterschiedlich.

# Darstellbarer Zahlenbereich (2)

- Format a: Zahlen zwischen $-2^{31}$ und $2^{31}-1$




- Format b:


negative Zahlen: $-(1-2^{-23}) \cdot 2^{127}$ ... $-0{,}5 \cdot 2^{-128}$,

positive Zahlen $0{,}5 \cdot 2^{-128}$ ... $(1-2^{-23}) \cdot 2^{127}$,

und *Null*

# Darstellbarer Zahlenbereich (3)

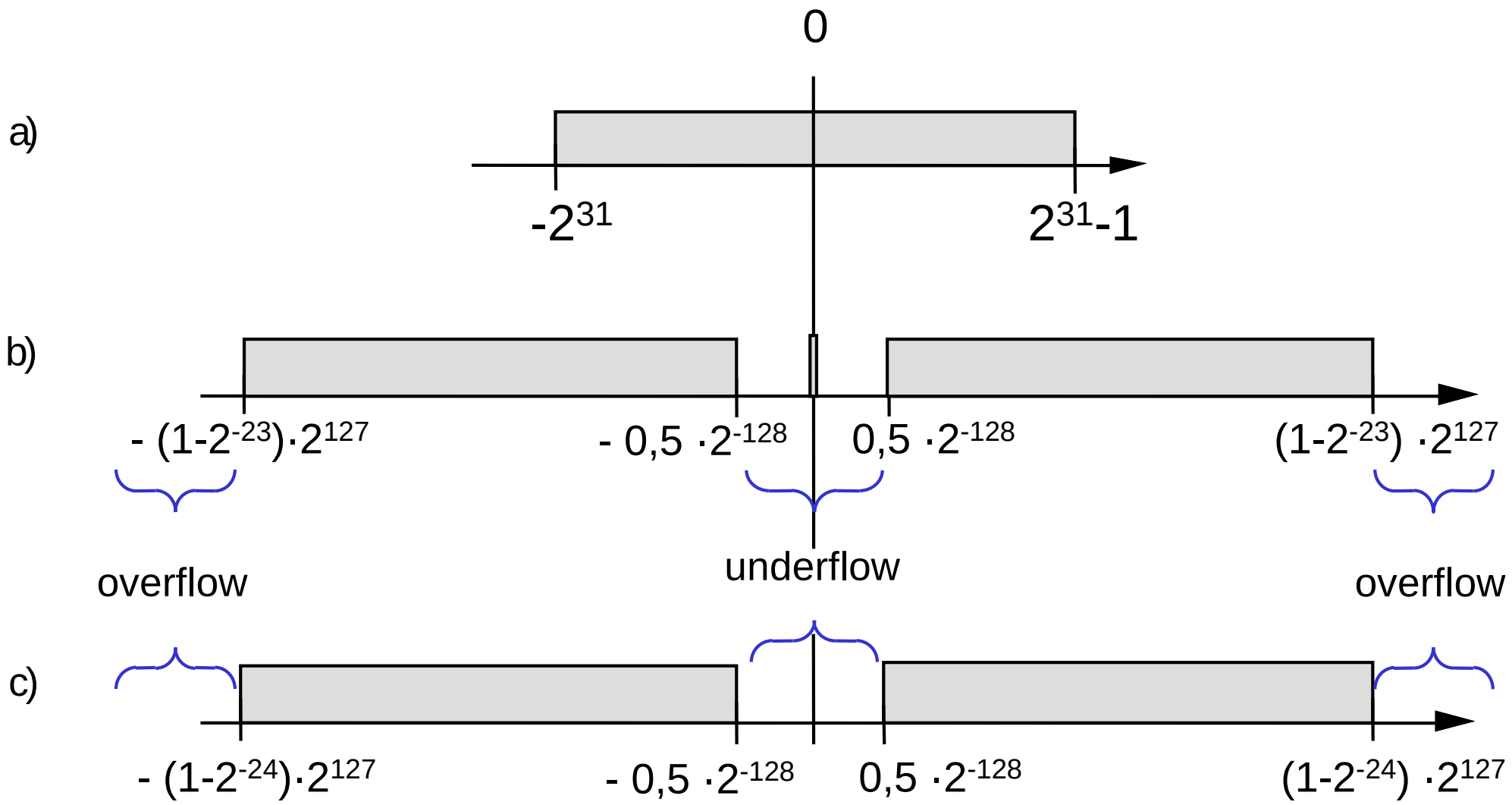
- Format c: normalisierte Gleitkommadarstellung


negative Zahlen: $-(1-2^{-24})\cdot 2^{127}$ ... $-0{,}5\cdot 2^{-128}$

positive Zahlen $0{,}5\cdot 2^{-128}$ ... $(1-2^{-24})\cdot 2^{127}$

Die Null kann nicht dargestellt werden!

# Darstellbarer Zahlenbereich (4)







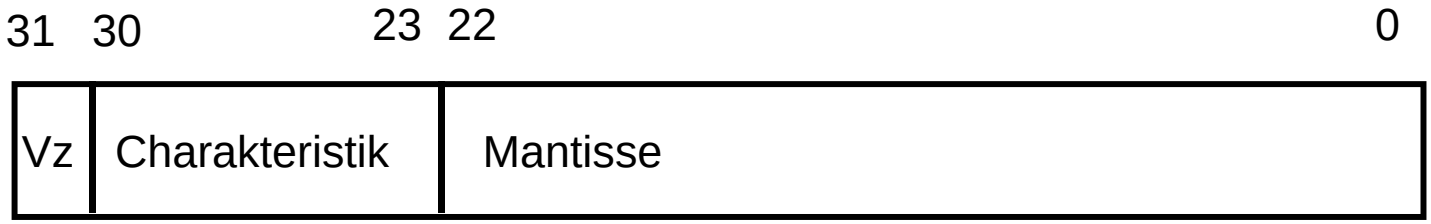

ifi

# Charakteristische Zahlen

- Um verschiedene Gleitkommadarstellungen miteinander vergleichen zu können, definiert man drei charakteristische Zahlen:
- maxreal ist die größte darstellbare normalisierte positive Zahl
- minreal ist die kleinste darstellbare normalisierte positive Zahl
- smallreal ist die kleinste Zahl, die man zu 1 addieren kann, um einen von 1 verschiedenen Wert zu erhalten.

# Beispiel

- In Format b) im letzten Beispiel




- maxreal = $(1 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$ minreal = $0{,}5 \cdot 2^{-128}$

- Die Zahl 1 wird normalisiert als $0{,}5 \cdot 2^{1}$ dargestellt.

- Die nächstgrößere darstellbare Zahl hat in der Mantisse zusätzlich zur 1 in Bit 22 eine 1 in Bit 0.

- smallreal = $0{,}00000000000000000000001_2 \cdot 2^{1}$,
  also smallreal = $2^{-23} \cdot 2^{1} = 2^{-22}$

# Ungenauigkeiten

- Die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen wächst bei Gleitkomma-Zahlen exponentiell mit der Größe der Zahlen, während sie bei Festkomma-Zahlen konstant ist.

- Bei der Darstellung großer Zahlen ergibt sich damit auch eine hohe Ungenauigkeit.

- Die Gesetzmäßigkeiten, die für reelle Zahlen gelten, werden für Maschinendarstellungen verletzt!

  Dies gilt insbesondere auch wenn diese Zahlen in einer höheren Programmiersprache oft `real` heißen.

# Beispiel

- Das Assoziativgesetz (x + y) + z = x + (y + z) gilt selbst dann nicht unbedingt, wenn kein overflow oder underflow auftritt.

z.B.: x = 1; y = z = smallreal/2

$$
\begin{aligned}
(x + y) + z &= (1 + \text{smallreal}/2) + \text{smallreal}/2 \\
&= 1 + \text{smallreal}/2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= 1 + (\text{smallreal}/2 + \text{smallreal}/2) \\
&= 1 + \text{smallreal} \\
&\neq 1
\end{aligned}
$$

Hinweis: smallreal ist die kleinste Zahl, die man zu 1 addieren kann, um einen von 1 verschiedenen Wert zu erhalten!

# Problematik unterschiedlicher Definitionen

- Es existieren beliebig viele Möglichkeiten, selbst mit einer festen Wortbreite unterschiedliche Gleitkommaformate zu definieren (unterschiedliche Basis b, Darstellung der Null, Anzahl der Stellen für Charakteristik und Mantisse).

- Es existierten (bis Mitte der 80er Jahre) viele verschiedene, herstellerabhängige Formate

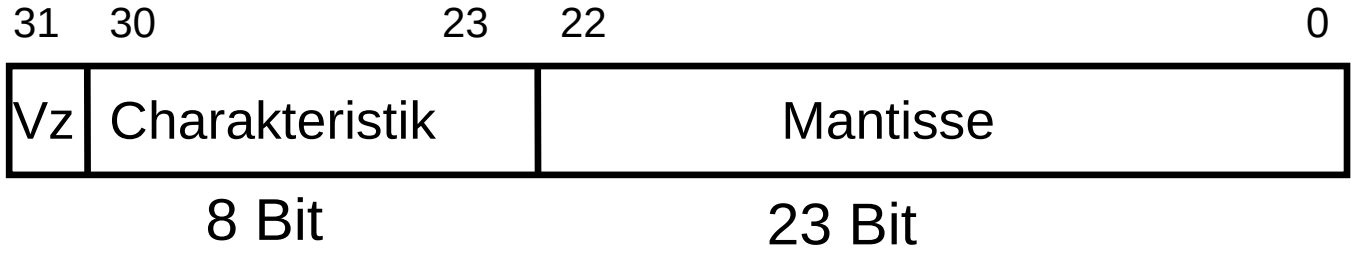
- Man konnte mit dem gleichen Programm auf unterschiedlichen Rechnern sehr unterschiedliche Ergebnisse erhalten!

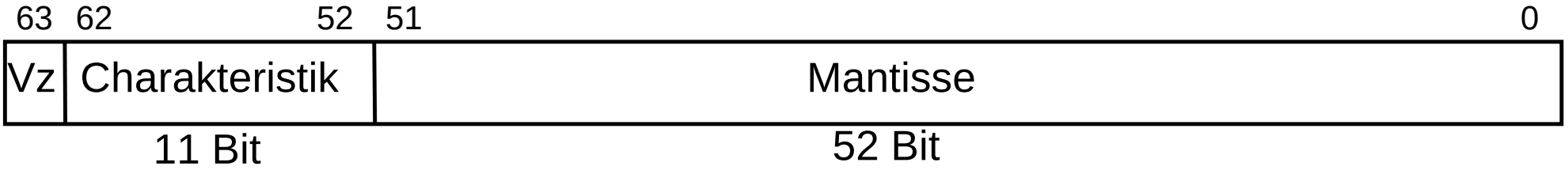
- Normierung erforderlich

# Normierung: IEEE-Standard (1)

IEEE: Institute of Electrical and Electronics Engineers

- IEEE-P 754-Floating-Point-Standard
- In vielen Programmiersprachen lassen sich Gleitkomma-Zahlen mit verschiedener Genauigkeit darstellen
  - z.B. in C: float, double, long double
- Der IEEE Standard definiert mehrere Darstellungsformen
  - IEEE single (einfach): 32 Bit
  - IEEE double (doppelt): 64 Bit
  - IEEE extended (erweitert): 80 Bit








ifi

# Normierung: IEEE-Standard (2)

| | einfach | doppelt |
|---|---|---|
| Vorzeichen-Bits | 1 | 1 |
| Exponenten-Bits | 8 | 11 |
| Mantissen-Bits | 23 | 52 |
| Bits insgesamt | 32 | 64 |
| BIAS | 127 | 1023 |
| Exponentenbereich | [−126,127] | [−1022,1023] |

| Biased Exponent | Mantisse | Bedeutung |
|---|---|---|
| 111..111(= 255 bzw. = 2047) | $\neq 0$ | *not a number* (keine gültige Zahl) |
| 111..111(= 255 bzw. = 2047) | 000..000(= 0) | $\pm\infty$ |
| 000..000(= 0) | 000..000(= 0) | $\pm 0$ |

# Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung
- Grundrechenarten
- Zeichendarstellung

# Addition von Dualzahlen

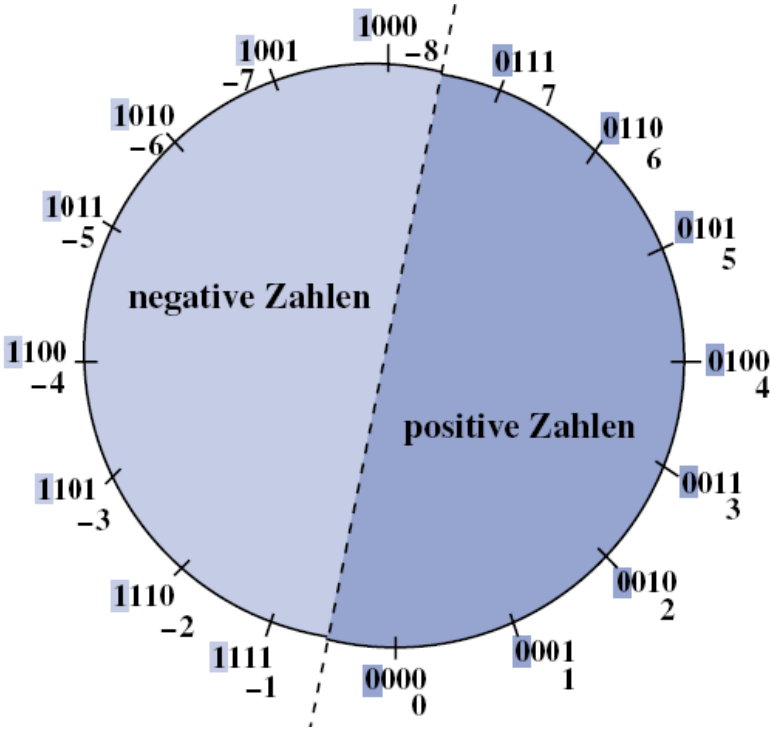
- Für die duale Addition gilt allgemein:

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 0 \text{ Übertrag } 1 \\
1 + 1 + 1 \text{ (vom Übertrag)} &= 1 \text{ Übertrag } 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
0\,1\,0\,1\,1\,0\,1 = 45 \\
0\,1\,1\,0\,1\,1\,0 = 54 \\
\hline
1\,1\,1\,1 \quad \text{= Übertrag} \\
\hline
1\,1\,0\,0\,0\,1\,1 = 99
\end{array}
$$

# Addition von Dualzahlen, negative Zahlen

- Negative Zahlen werden üblicherweise durch ihren Betrag mit vorangestelltem Minuszeichen dargestellt.
  - Diese Darstellung wäre auch rechnerintern denkbar, hat jedoch den Nachteil, daß man eine gesonderte Vorzeichenrechnung durchführen müßte und man ein Rechenwerk benötigt, das sowohl addieren als auch subtrahieren kann.
  - Man kann die Subtraktion auf eine Addition durch das Verfahren der Komplementbildung zurückzuführen
  - Zuordnung der Bitkombinationen zu positiven und negativen Zahlen
    - Zahlenring für vier Bits, erstes Bit ist Vorzeichenbit
  - Bei der Verwendung der Komplement-darstellung muß eine Maschine nicht subtrahieren können, sondern kann jede Subtraktion a - b durch eine Addition a + -b realis



# Überlauferkennung

- Allgemeine Überlauferkennung bei dualer Addition:
  - Korrekte Addition: beide Überträge sind gleich.
  - Überlauf: beide Überträge sind ungleich.
- Technische Realisierung z.B. durch ein Antivalenzgatter (siehe später)

# Subtraktion von Dualzahlen

- Basiert auf der Addition von Festkomma-Dualzahlen:
  - Grundlage für die Durchführung aller arithmetischen Verknüpfungen

- Denn:
  - Subtraktion ≙ Addition der negativen Zahl
  - X - Y = X + (-Y)

# Multiplikation und Division (1)

- Zweierkomplementzahlen erwiesen sich für Addition und Subtraktion als besonders günstig, weil bei dieser Darstellung das Vorzeichen nicht explizit betrachtet werden mußte.

- Bei der Multiplikation existiert dieser Vorteil nicht.

- Lösungen:
  - Zweierkomplementzahlen zunächst in eine Form mit Betrag und Vorzeichen umwandeln. Zahlen dann miteinander zu multiplizieren und das Ergebnis schließlich wieder in die Zweierkomplementdarstellung umzusetzen.

  - Spezielle Multiplikationsalgorithmen für Zweierkomplementzahlen verwenden (Booth-Algorithmus, hier nicht behandelt).

# Multiplikation und Division (2)

- Die ganzzahlige Multiplikation bzw. Division wird in einem Rechner allgemein mittels wiederholter Addition durchgeführt.

- In den Sonderfällen des Multiplikators bzw. Divisors von 2, 4, … kann die Multiplikation bzw. Division aber einfacher und schneller durch eine Verschiebung von entsprechend vielen Bits nach links bzw. rechts erfolgen:
  Bei 2 (21) um 1 Bit, bei 4 (22) um 2 Bit, bei 8 um 3 (23) Bit.

$$\begin{aligned} \text{dezimal} &: (20)_{10} \text{ x } (8)_{10} = 160_{10} \\ \text{dual} &: (10100)_2 \text{ x } (1000)_2 = (10100000)_2 \; [10100 \mid 000] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dezimal} &: (20)_{10} : (4)_{10} = 5_{10} \\ \text{dual} &: (10100)_2 : (100)_2 = (101)_2 \; [101 \mid 00] \end{aligned}$$

# Multiplikation

- Papier und Bleistift Methode:
  - Analog zur Multiplikation mit Papier und Bleistift im Dezimalsystem kann man auch im Dualsystem vorgehen.

- Beispiele:

```
13 · 11
   13
+  13
  143
```

```
1101 · 1011
   1101
   0000
  1101
+ 1101
 10001111
```

# Multiplikation von Vorzeichen-Betrags-Zahlen

- Bei Zahlen, die mit Betrag und Vorzeichen dargestellt sind, ergeben sich keine Probleme.
- Die Beträge der Zahlen werden wie positive Zahlen miteinander multipliziert.
- Das Vorzeichen des Ergebnisses ergibt sich aus der Antivalenzverknüpfung der Vorzeichen der beiden Faktoren.

# Vorzeichenbehaftete Multiplikation

- Vorzeichenbehaftete Zahlen können grundsätzlich in die Darstellung mit Vorzeichen und Betrag gebracht werden.

- Das Vorzeichen des Produkts wird dann nach der Regel

$$\text{sign}(X \bullet Y) = \text{sign}(X) \ \text{XOR} \ \text{sign}(Y)$$

aus den beiden Faktorenvorzeichen durch die Exklusiv-ODER-Verknüpfung gewonnen.

# Multiplikation von Gleitkommazahlen

- Zur Multiplikation von Gleitkommazahlen muß man Mantissen beider Zahlen multiplizieren und ihre Exponenten addieren:

$$m_1\, b^{e1} \cdot m_2\, b^{e2} = (m_1 \cdot m_2)\, b^{e1+e2}$$

- Ist die Mantisse mit Hilfe von Betrag und Vorzeichen dargestellt,

  $\rightarrow$ ist der übliche Multiplikationsalgorithmus anwendbar.

- Das Ergebnis muß nach der Multiplikation unter Umständen noch normalisiert werden.
- Bei Addition der Charakteristiken $\mathbf{c_1 = e_1 + o}$ und $\mathbf{c_2 = e_2 + o}$ muß die Summe außerdem um den Offset **o** korrigiert werden, um die richtige Ergebniscarakteristik $\mathbf{c = (e_1 + e_2) + o}$ zu erhalten.

# Anmerkungen

- Bei vielen Anwendungen jedoch wechseln Addition und Multiplikation einander ständig ab.
- Umwandlung zwischen verschiedenen Zahlendarstellungen kann viel Zeit in Anspruch nehmen.
- Es wäre günstiger, wenn durchgängig (also auch bei der Multiplikation) im Zweierkomplement gerechnet wird, um die Vorteile bei der Addition nutzen zu können (z.B. Booth-Algorithmus).

# Division

- Die Division von Dualzahlen folgt denselben Prinzipien wie die Multiplikation.

- Auch hier stellt die Papier-und-Bleistift-Methode die Basis für verschiedene Algorithmen dar.

- Beispiel:

$$
\begin{array}{rl}
1224 & : \; 12 = 102 \\
-\,12 & \\
\hline
\;02 & \\
-\;0 & \\
\hline
\;024 & \\
-\;24 & \\
\hline
\;\;0 &
\end{array}
$$

# Manuelle Division

- Im Dualsystem sind als Ergebnis einer Teildivison nur die Werte

  0 $\rightarrow$ Divisor > augenblicklicher Dividend

  1 $\rightarrow$ Divisor $\leq$ augenblicklicher Dividend

möglich.

- Bei manueller Division erkennt man sofort, ob das Ergebnis 0 ist und „eine weitere Stelle gebraucht wird“.

# Maschinelle Division

- Drei Möglichkeiten:
  - 1. Komparatorschaltung, um den Divisor mit augenblicklichem Dividenden zu vergleichen.
  - 2. Subtraktion: Ergibt sich ein negatives Ergebnis, lädt man nochmals den alten Wert des Dividenden.
  - 3. Subtraktion: Bei einem negativen Ergebnis, addiert man den Divisor wieder (Rückaddition).

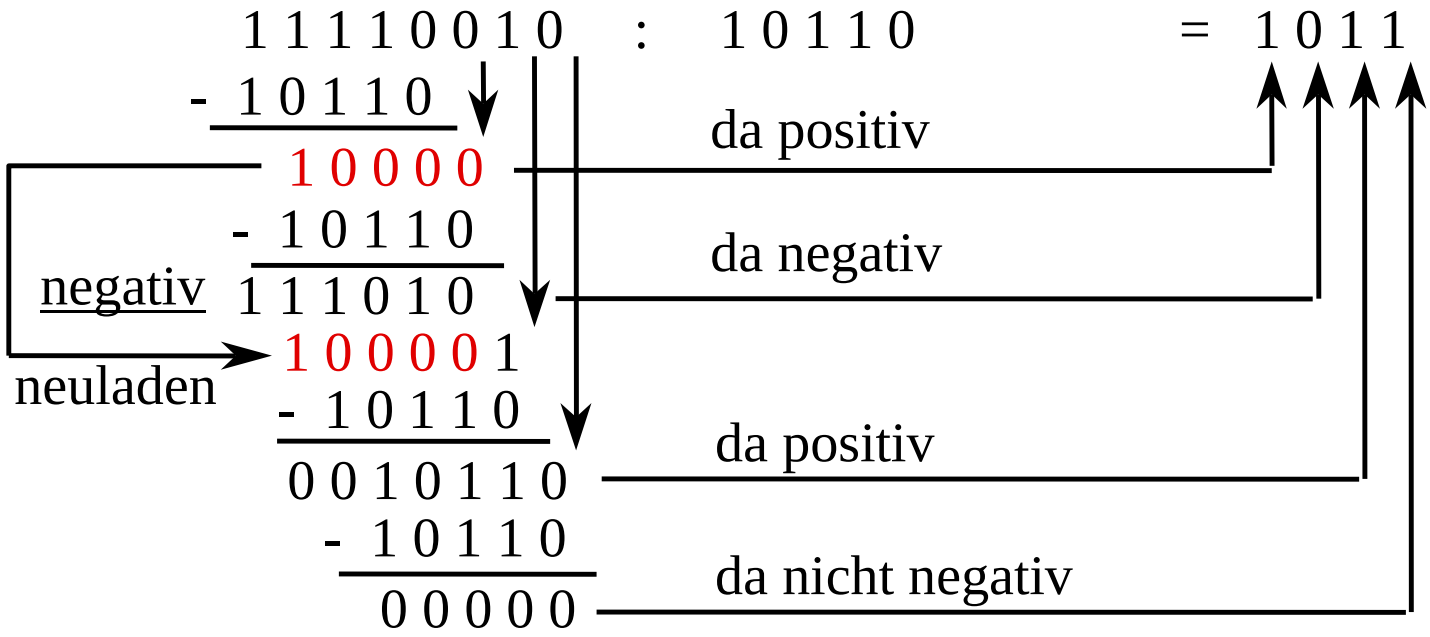
- Verkürzte Division: Rückaddition und Subtraktion des um eins nach rechts verschobenen Divisors zusammenziehen. Man addiert gleich den um eins verschobenen Divisor:

$$+ \text{Divisor} - \tfrac{1}{2}\,\text{Divisor} = + \tfrac{1}{2}\,\text{Divisor}$$

# Division

- Division durch Durchführung von Subtraktionen:
  - Direkte Subtraktion des Divisors
  - Addition des Divisor-Zweierkomplements.

## Direkte Subtraktion:



# Bemerkungen

- Bei Division durch 0 muß ein Ausnahmezustand erkannt werden und an die Steuereinheit (Prozessor) weitergemeldet werden.
- Die Division muß abgebrochen werden, wenn die vorhandene Bitzahl des Ergebnisregisters ausgeschöpft ist (periodische Dualbrüche).
- Die Schaltungen für die Multiplikation können nach Modifikation auch für den Grundalgorithmus der Division eingesetzt werden:
  - Linksschieben des Dividenden (statt Rechtsschieben des Multiplikanden)
  - Subtraktion des Divisors (statt Addition des Multiplikators)

# Modul 2: Rechnerarithmetik (1)

- Zahlensysteme
- Zahlendarstellung
- Grundrechenarten
- Zeichendarstellung

# ASCII Code zur Darstellung von Zeichen (1)

- ASCII-Code (American Standard for Coded Information Interchange) ist eine festgelegte Abbildungsvorschrift (Norm) zur binären Kodierung von Zeichen.
  - Der ASCII-Code umfasst Klein-/Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, (arabische) Ziffern und viele Sonderzeichen.
  - Die Kodierung erfolgt in einem Byte (8 Bits), so daß mit dem ASCII-Code 256 verschiedene Zeichen dargestellt werden können.
  - Da das erste Bit nicht vom Standard-ASCII-Code genutzt wird, können im Standard-ASCII-Code nur 128 Zeichen dargestellt werden.
  - Unterschiedliche, speziell normierte, ASCII-Code-Erweiterungen nutzen das erste Bit, um weitere 128 Zeichen darstellen zu können.

# ASCII Code zur Darstellung von Zeichen (2)

## ASCII-Code zu den darstellbaren Zeichen (Auszug)

| Zeichen | Dez. | Binär | Hexa | Oktal | Zeichen | Dez. | Binär | Hexa | Oktal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ! | 33 | 0010 0001 | 21 | 041 | P | 80 | 0101 0000 | 50 | 120 |
| " | 34 | 0010 0010 | 22 | 042 | Q | 81 | 0101 0001 | 51 | 121 |
| # | 35 | 0010 0011 | 23 | 043 | R | 82 | 0101 0010 | 52 | 122 |
| $ | 36 | 0010 0100 | 24 | 044 | S | 83 | 0101 0011 | 53 | 123 |
| % | 37 | 0010 0101 | 25 | 045 | T | 84 | 0101 0100 | 54 | 124 |
| & | 38 | 0010 0110 | 26 | 046 | U | 85 | 0101 0101 | 55 | 125 |
| ' | 39 | 0010 0111 | 27 | 047 | V | 86 | 0101 0110 | 56 | 126 |
| ( | 40 | 0010 1000 | 28 | 050 | W | 87 | 0101 0111 | 57 | 127 |
| ) | 41 | 0010 1001 | 29 | 051 | X | 88 | 0101 1000 | 58 | 130 |

# ASCII Code zur Darstellung von Zeichen (3)

- Zur Speicherung von Texten werden einzelne Bytes, die jeweils immer ein Zeichen kodieren, einfach hintereinander abgespeichert, so daß man eine Zeichenkette (*String*) erhält.

- Um das Ende der Zeichenkette zu identifizieren, werden (in den Programmiersprachen) unterschiedliche Verfahren verwendet.
  - Die Länge der Zeichenkette wird im ersten bzw. in den ersten Bytes vor der eigentlichen Zeichenkette gespeichert.
    Dieses Verfahren benutzt z. B. die Programmiersprache PASCAL.

  - Das Ende der Zeichenkette wird durch ein besonderes, nicht darzustellendes Zeichen gekennzeichnet.
    So verwendet z.B. die Programmiersprache C/C++ ein 0-Byte (Byte, in dem alle Bits 0 sind), um das Ende einer Zeichenkette zu kennzeichnen.

# Unterscheidung von Ziffern und Zeichen

- *Ziffer als ASCII-Code $\longrightarrow$ Angabe des Zeichens (Ziffer) in Hochkomma:*

'0': 00110000 (Dezimal 48)
'4': 00110100 (Dezimal 52)
'5': 00110101 (Dezimal 53)
'8': 00111000 (Dezimal 56)

- *Ziffer als numerischer Wert $\longrightarrow$ Angabe einer Ziffer (ohne Hochkomma):*

0: 00000000 (Dezimal 0)
4: 00000100 (Dezimal 4)
5: 00000101 (Dezimal 5)
8: 00001000 (Dezimal 8)

# Beispiel: Speicherung von Ziffern und Zeichen

| Angabe | Dezimaler ASCII–Wert | Dualdarstellung im Rechner |
|---|---|---|
| 'a' | 97 | 01100001 |
| 'W' | 87 | 01010111 |
| '*' | 42 | 00101010 |
| '9' | 57 | 00111001 |

# UniCode zur Darstellung von Zeichen (1)

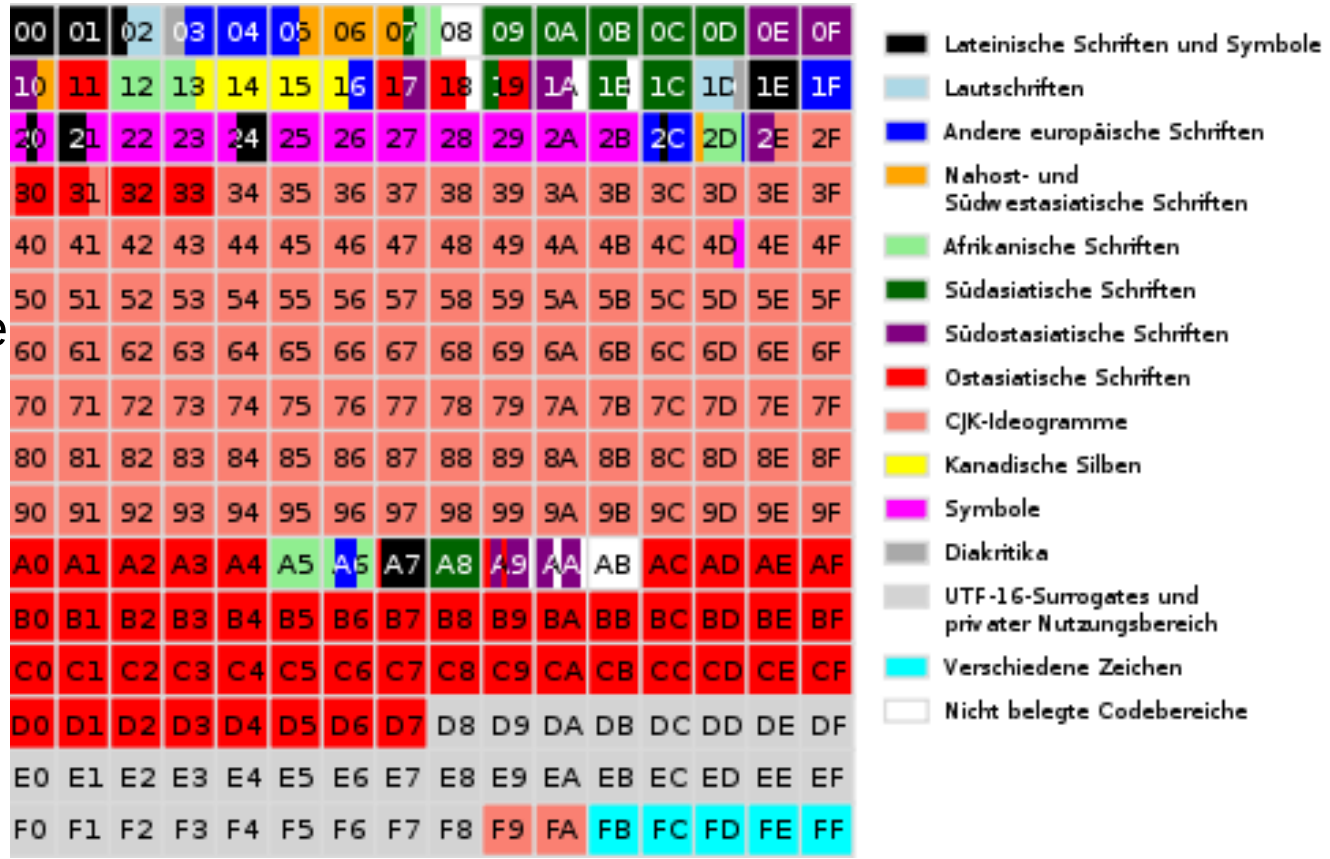
- Der ASCII-Code mit 256 (128) Zeichen ist sehr begrenzt.
- Unicode für Zeichen oder Elemente praktisch aller bekannten Schriftkulturen und Zeichensysteme kodierbar.

- Zeichenwerte der Zeichen bis Unicode Version 3.0 (September 1999) wurden ausschließlich durch eine zwei Byte lange Zahl ausgedrückt.
  - Auf diese Weise lassen sich bis zu 65 536 verschiedene Zeichen unterbringen (2 Byte = 16 Bit = $2^{16}$ Kombinationsmöglichkeiten).
  - *Bezeichnung des Zwei-Byte-Schemas: Basic Multilingual Plane (BMP)*

- In Version 3.1 (März 2001) sind 94.140 Zeichen aufgenommen, wobei die Zwei-Byte-Grenze durchbrochen wurde.
  - Das Zwei-Byte-Schema wird deshalb von einem Vier-Byte-Schema abgelöst.

# UniCode zur Darstellung von Zeichen (2)

- In Version 6.0 (Oktober 2010) sind 109.449 Zeichen enthalten.
  - Unicode in 17 Bereiche (planes) gegliedert, jeweils á 65.536 Zeichen
  - Basic Multilingual Plane: hauptsächliche Schriftsysteme
  - Supplementary Multilingual Plane: historische Schriftsysteme
  - Supplementary Ideographic Plane: Chinesische, Japanische und Koreanische Schrift
  - Supplementary Special-purpose Plane:
  - Supplementary Private Use Area-A und -B



# UniCode zur Darstellung von Zeichen (3)

- Die Notation lautet

  &#0000; für dezimale Notation bzw.

  &#x0000; für die hexadezimale Notation,

  wobei das 0000 die Unicode-Nummer des Zeichens darstellt.
- Formate für Speicherung und Übertragung unterschiedlich:
  - UTF-8 (Unicode Transformation Format) – Internet und in Betriebssystemen
  - UTF-16 – Zeichencodierung in Java

- Unicode wird in ostasiatischen Ländern kritisiert.
  - Schriftzeichen verschiedener nicht verwandter Sprachen sind vereinigt
  - Vor allem in Japan konnte sich der Unicode kaum durchsetzen
  - Japan mit zahlreichen Alternativen zu Unicode wie etwa der Mojiky -Standard
  - Antike Texte in Unicode aufgrund der Vereinheitlichung ähnlicher CJK-Schriftzeichen (chinesisch, japanisch, koreanisch) nicht originalgetreu wiederzugeben

# BCD-Code zur Darstellung von Zeichen

- BCD (Binary Coded Decimals) kodieren binär Zahlen Ziffern.
- Für jede Dezimalziffer werden mindestens vier, manchmal auch acht Bits verwendet.
  - Die Ziffern werden nacheinander immer durch ihren Dualwert angegeben.
  - Diese speicherplatzverschwendende Art der Speicherung von Dezimalzahlen erleichert aber manche Anwendungen.
  - Anwendungsbereiche:
    - Rechnen im Dezimalsystem
    - Speichern von Dezimalzahlen (Telefonnummern u.ä.)
    - Ansteuerung von LCD-Anzeigen, um Dezimalziffern einzeln anzuzeigen.

| Dezimalzahl | Dualzahl | Duale BCD-Darstellung |
|---|---|---|
| 294 | 100100110 | 0010.1001.0100<br>2 9 4 |
| 16289 | 11111110100001 | 0001.0110.0010.1000.1001<br>1 6 2 8 9 |

# Duale Größenangaben (1)

## Maßeinheiten für Bytes

| Maßeinheit | | Anzahl von Bytes | KBytes | MBytes |
|---|---|---|---|---|
| Byte | | 1 | | |
| Kilobyte (KByte) | $2^{10}$ | 1024 | 1 | |
| Megabyte (MByte) | $2^{20}$ | 1.048.576 | 1024 | 1 |
| Gigabyte (GByte) | $2^{30}$ | 1.073.741.824 | 1.048.576 | 1024 |
| Terabyte (TByte) | $2^{40}$ | 1.099.511.627.776 | 1.073.741.824 | 1.048.576 |
| Petabyte (PByte) | $2^{50}$ | 1.125.899.906.842.624 | 1.099.511.627.776 | 1.073.741.824 |
| Exabyte (EByte) | $2^{60}$ | 1.152.921.504.606.846.976 | 1.125.899.906.842.624 | 1.099.511.627.776 |

# Duale Größenangaben (2)

- Kilo entspricht dem Faktor $2^{10} = 1024$
- Mega entspricht dem Faktor $2^{10} * 2^{10} = 1024 * 1024 = 1.048.576$
- Giga entspricht dem Faktor $2^{10} * 2^{10} * 2^{10} = 2^{30}$

- Beispiel Festplattenherstellerangaben zur Speicherkapazität

- MB MByte
  - Faktor hier $10^3 = 1000$

- Folge:
  - 1 GB 1.073.741.824 Byte sondern 1.000.000.000 Byte
    - D.h., es „fehlen“ real 73 MegaByte!
  - 200 GB entsprechen damit nur 186 Gbyte!