4. EBENE FINITE ELEMENTE
4.5 BIQUADRATISCHES SERENDIPITY ELEMENT

Eigenschaften

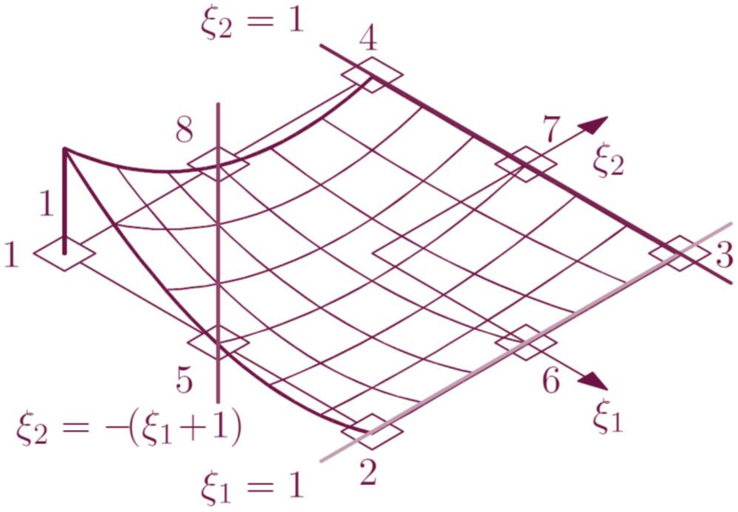
Der wesentliche Nachteil neunknotiger biquadratischer Lagrange Elemente ist die gegenüber dem bilinearen Element erhöhte Anzahl von Elementfreiheitsgraden. Insbesondere die beiden Freiheitsgrade des Mittelknotens vergrößern das zu lösende lineare Gleichungssystem des assemblierten Systems um zwei Gleichungen je diskretisiertem Lagrange Element.
Andererseits ist dieser Mittelknoten zur Wahrung der Kompatibilität zu Nachbarelementen nicht notwendig.
Das heißt, durch die Verwendung von Serendipity Elementen anstelle von Lagrange Elementen kann insbesondere auf Systemebene die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert werden.

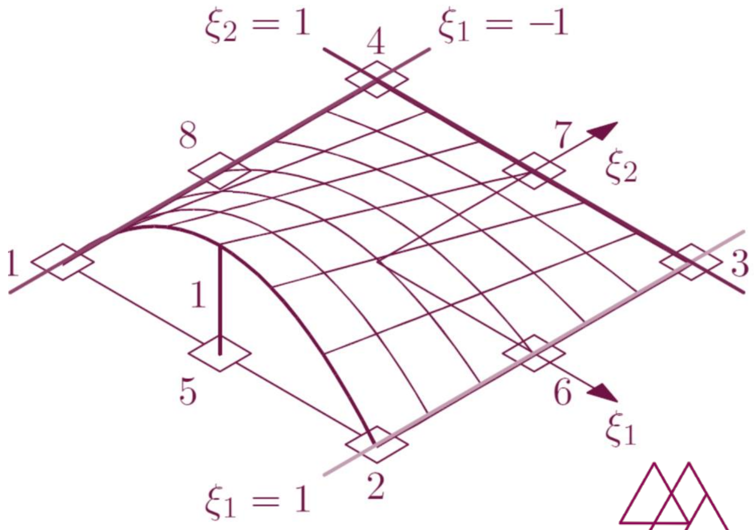
Auf den folgenden Folien werden die Ansatzfunktionen, die Approximation der Geometrie und des Verschiebungsfelds diskutiert.
Da die Entwicklung des Differentialoperators, der Elementmatrizen und -vektoren analog zum vier- oder neunknotigen Lagrange Element zu realisieren ist, wird auf die Darstellung dieser Prozedur verzichtet.

Ansatzfunktionen

Im Gegensatz zum biquadratischen Lagrange Element sind die Ansatzfunktionen des achtknotigen Serendipity Element nicht aus den eindimensionalen Lagrange Interpolationsfunktionen zu generieren.
Sie werden direkt mit Hilfe der Anforderungen an die Ansatzfunktion $N^i(\boldsymbol{\xi})$, am Knoten i den Wert Eins und an den Knoten $j \neq i$ den Wert Null anzunehmen, konstruiert.

Die Generierung der prinzipiell zu unterscheidenden Ansatzfunktionen von Eck- und Seitenmittenknoten ist exemplarisch am Eckknoten eins und am Seitenmittenknoten fünf dargestellt.





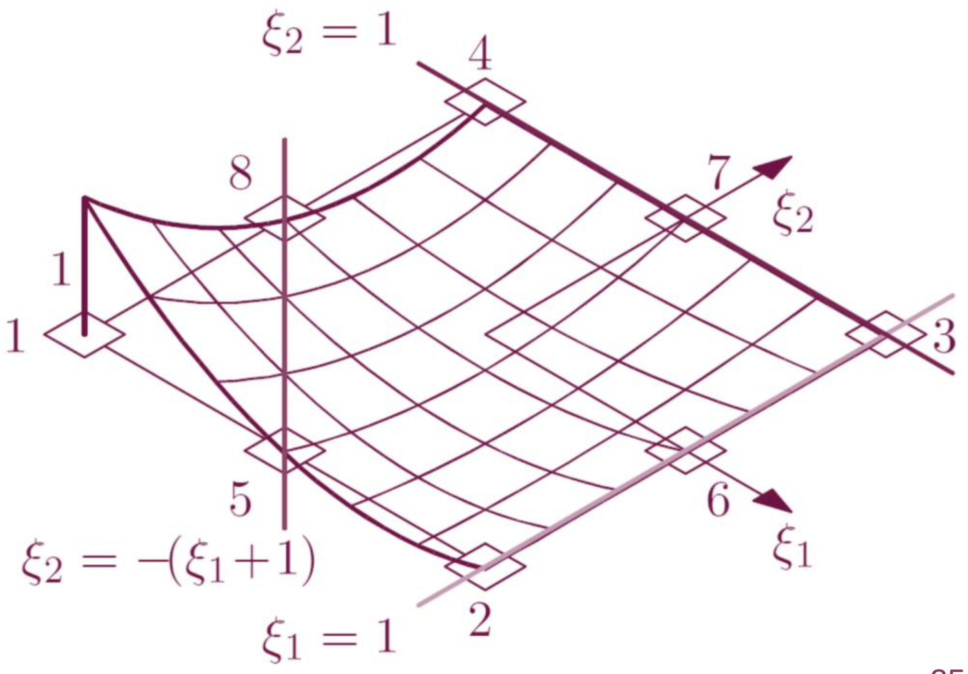
Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktion $N^1(\boldsymbol{\xi})$ hat an den durch $\xi_1 = 1$ und $\xi_2 = 1$ charakterisierten Elementkanten und den Elementknoten fünf und acht den Wert Null, am Knoten eins den Wert Eins. Wird die Forderung bezüglich der Elementknoten fünf und acht auf die diese Elementknoten verbindende Gerade $\xi_2 = -(\xi_1 + 1)$ erweitert, ist der Ansatz $N^1(\boldsymbol{\xi})$ bis auf einen Skalierungsfaktor c_1 eindeutig bestimmt.

$$N^1(\boldsymbol{\xi}) = c_1 \underbrace{(1-\xi_1)}_{\substack{\text{Kante}\\ \xi_1 = 1}} \underbrace{(1-\xi_2)}_{\substack{\text{Kante}\\ \xi_2 = 1}} \underbrace{(1+\xi_1+\xi_2)}_{\substack{\text{Gerade}\\ \xi_2 = -(\xi_1+1)}}$$

Der konstante Faktor c_1 ergibt sich aus der Forderung $N^1(-1,-1) = 1$ zu $c_1 = -1/4$ und somit

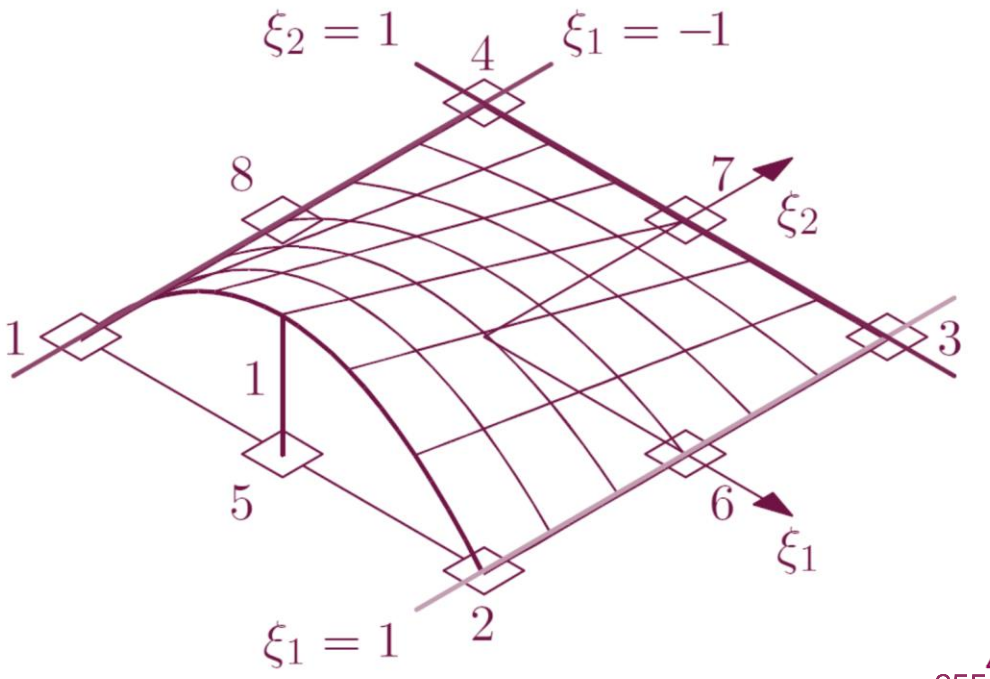
$$N^1(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(1-\xi_2)\,(1+\xi_1+\xi_2)$$



Ansatzfunktionen

$N^5(\boldsymbol{\xi})$ wird durch das Verschwinden der Ansatzfunktion an den drei Kanten $\xi_1 = 1$ und $\xi_2 = 1$ charakterisiert. Damit ist die Ansatzfunktion bis auf den konstanten Faktor c_1, der aus der Forderung $N^5(0, -1) = 1$ bestimmt werden kann, charakterisiert.

$$
\begin{aligned}
N^5(\boldsymbol{\xi}) &= c_1 \, (1-\xi_1)\,(1+\xi_1)\,(1-\xi_2) \\
&= \frac{1}{2}(1-\xi_1)\,(1+\xi_1)\,(1-\xi_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\xi_1^2\right)\,(1-\xi_2)
\end{aligned}
$$



Die Ansatzfunktion $N^8(\boldsymbol{\xi})$ gewinnt man aus $N^5(\boldsymbol{\xi})$ durch Vertauschen von ξ_1 und ξ_2.

$$
\begin{aligned}
N^8(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(1-\xi_1)\,(1+\xi_2)\,(1-\xi_2) \\
&= \frac{1}{2}(1-\xi_1)\left(1-\xi_2^2\right)
\end{aligned}
$$

Ansatzfunktionen

Die weiteren Ansatzfunktionen der quadratischen Serendipity Elements werden ohne Herleitung ergänzt.

$$N^1(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(1-\xi_2)\,(1+\xi_1+\xi_2) \qquad N^5(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\left(1-\xi_1^2\right)\,(1-\xi_2)$$

$$N^2(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(1-\xi_2)\,(1-\xi_1+\xi_2) \qquad N^6(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\,(1+\xi_1)\left(1-\xi_2^2\right)$$

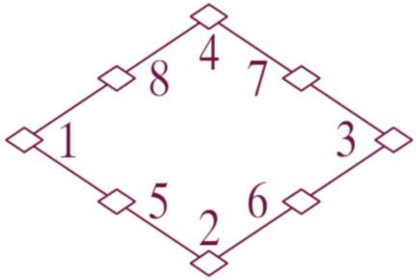
$$N^3(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(1+\xi_2)\,(1-\xi_1-\xi_2) \qquad N^7(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\left(1-\xi_1^2\right)\,(1+\xi_2)$$

$$N^4(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(1+\xi_2)\,(1+\xi_1-\xi_2) \qquad N^8(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\,(1-\xi_1)\left(1-\xi_2^2\right)$$

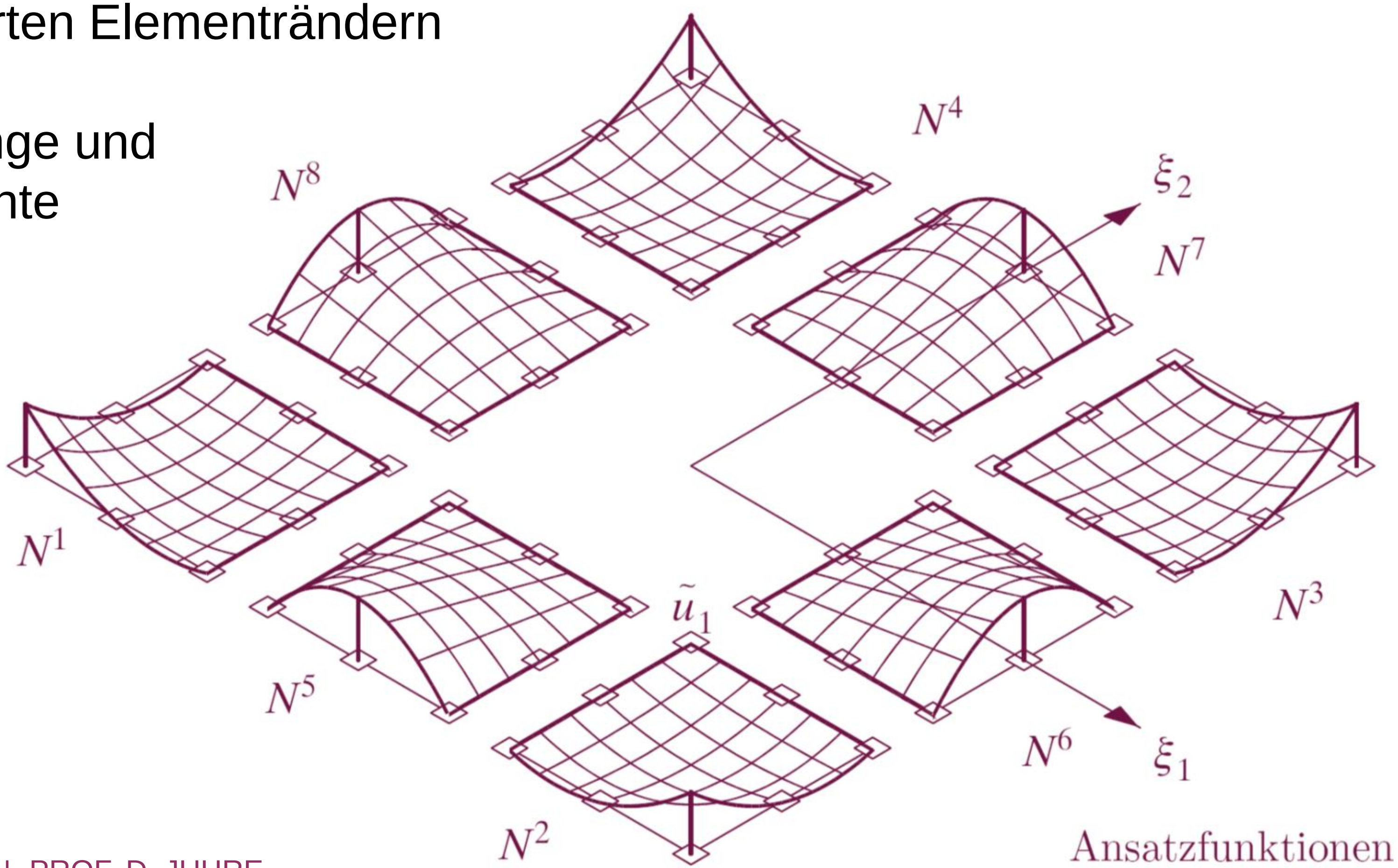
Auffällig ist, dass die Ansatzfunktionen der Seitenmittenknoten N^5, N^6, N^7 und N^8 nicht wie beim Lagrange Element biquadratisch, sondern in eine Richtung lediglich linear sind.

Ansatzfunktionen

Es ist weiterhin zu bemerken, dass die Lagrange und Serendipity Ansatzfunktionen an den durch $\xi_1 \pm 1$ und $\xi_2 \pm 1$ charakterisierten Elementrändern identisch sind.
Somit sind neunknotige Lagrange und achtknotige Serendipity Elemente kompatibel.



Element-Patch



Ansatzfunktionen

Ansatzfunktionen

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 ergeben sich wie folgt:

$$N^1_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_2)\,(2\,\xi_1+\xi_2) \qquad N^1_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(2\,\xi_2+\xi_1)$$

$$N^2_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_2)\,(2\,\xi_1-\xi_2) \qquad N^2_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(2\,\xi_2-\xi_1)$$

$$N^3_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_2)\,(2\,\xi_1+\xi_2) \qquad N^3_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(2\,\xi_2+\xi_1)$$

$$N^4_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_2)\,(2\,\xi_1-\xi_2) \qquad N^4_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(2\,\xi_2-\xi_1)$$

Ansatzfunktionen

Die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 ergeben sich wie folgt:

$$N^5_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1\ (1-\xi_2) \qquad N^5_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2}\ (1-\xi_1^2)$$

$$N^6_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\ (1-\xi_2^2) \qquad N^6_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_2\ (1+\xi_1)$$

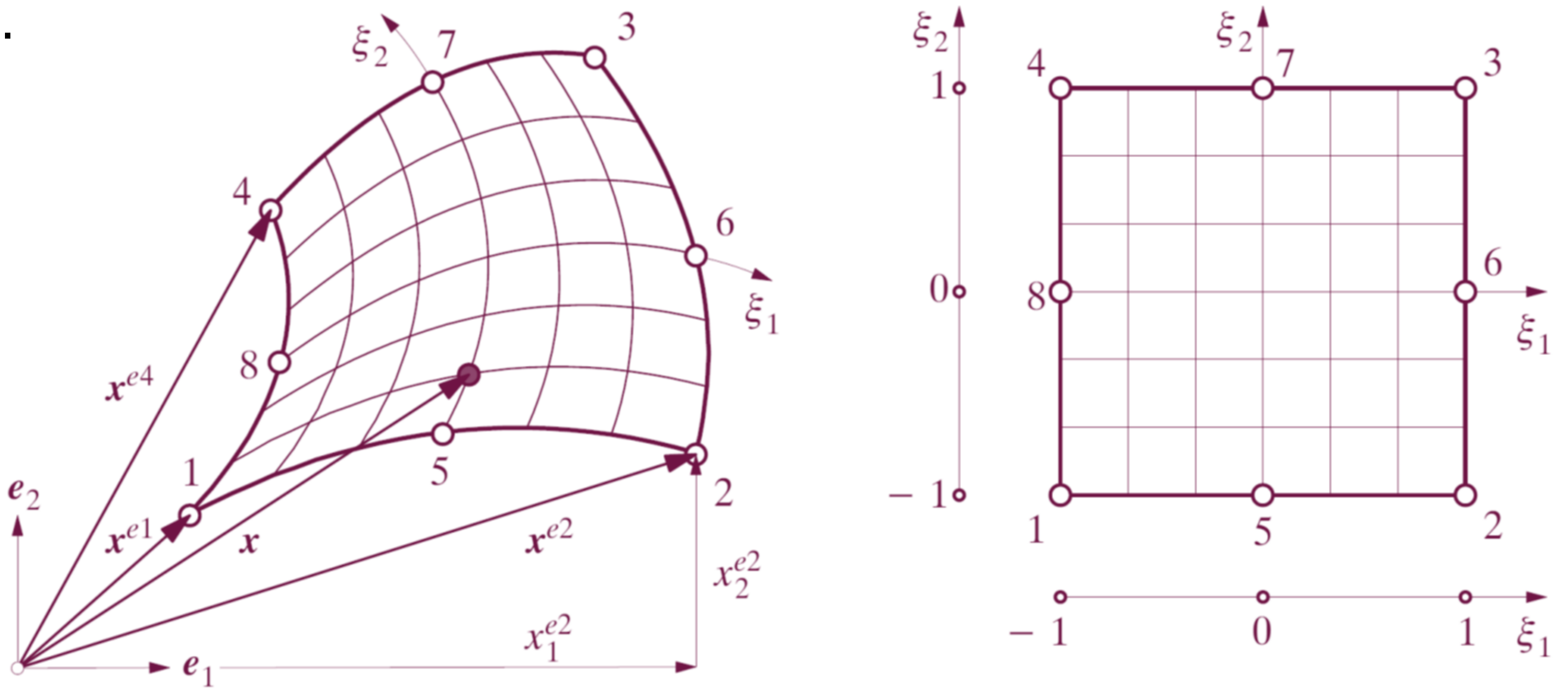
$$N^7_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1\ (1+\xi_2) \qquad N^7_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2}\ (1-\xi_1^2)$$

$$N^8_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2}\ (1-\xi_2^2) \qquad N^8_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_2\ (1-\xi_1)$$

Geometrie

Die Geometrie des achtknotigen Serendipity Elements im physikalischen und natürlichen Raum ist in der Abbildung dargestellt. Der Vektor der Elementknotenkoordinaten $\mathbf{X}^e$ ist gegenüber dem Vektor $\mathbf{X}^e$ des Lagrange Elements in der Dimension um zwei, was den Koordinaten des Mittelpunkts entspricht, reduziert.

$$\mathbf{X}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{e1} \\ \mathbf{X}^{e2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{e7} \\ \mathbf{X}^{e8} \end{bmatrix}$$



physikalische Koordinaten

natürliche Koordinaten

Geometrie

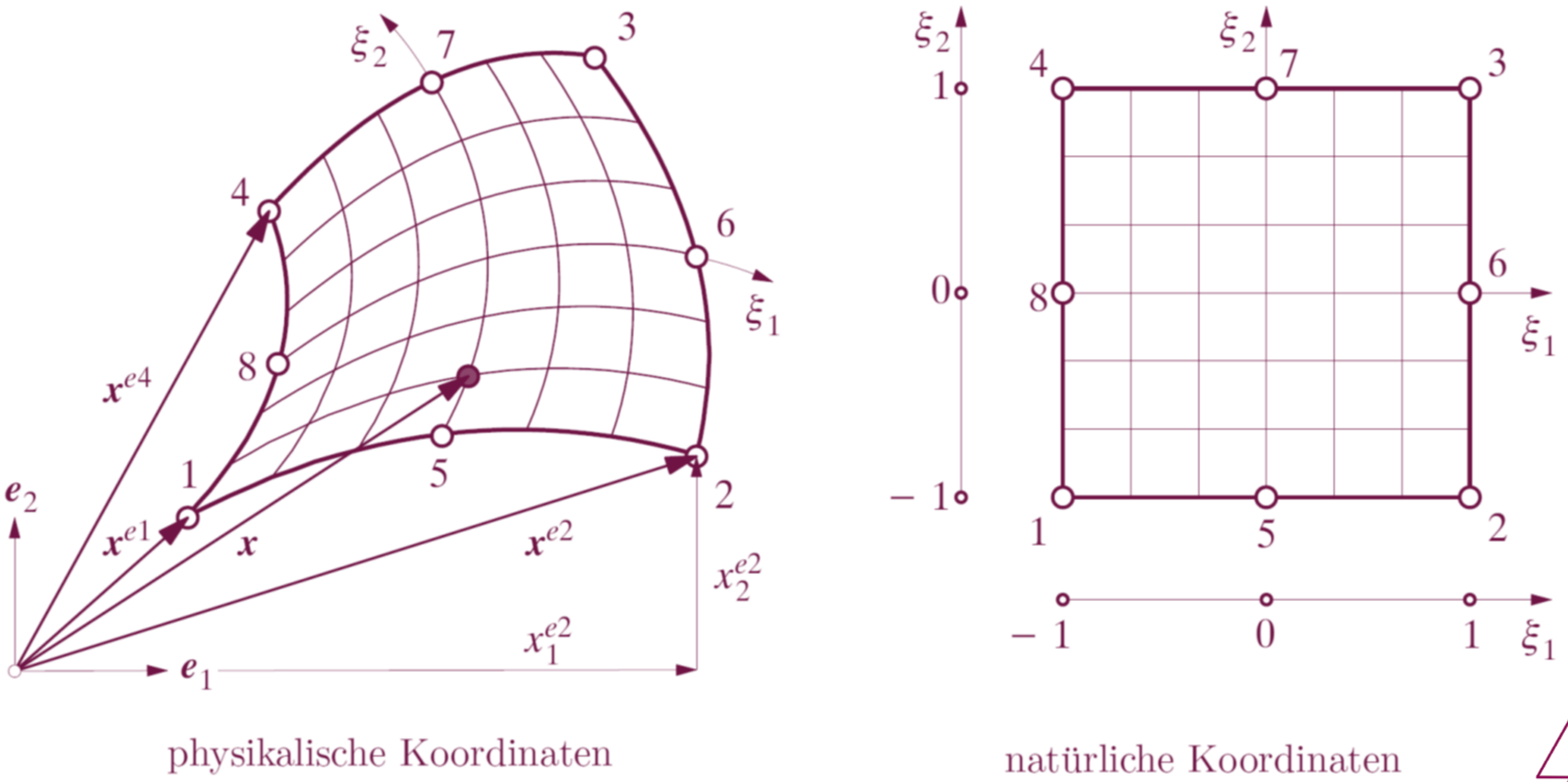
Die Geometrie des Serendipity Elements wird wie gewöhnlich mit der Matrix der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{N}^2(\boldsymbol{\xi}) & \dots & \mathbf{N}^7(\boldsymbol{\xi}) & \mathbf{N}^8(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^i(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N^i(\boldsymbol{\xi}) & 0 \\ 0 & N^i(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

als Funktion der natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ beschrieben.

$$\tilde{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{X}^e$$



Approximation der Elementgrößen

Die Elementgrößen, Verschiebungen, Beschleunigungen und die Variation der Verschiebungen, werden analog zum Lagrange Element approximiert.
Lediglich die Dimension der Elementvektoren ist um zwei niedriger als beim Element mit Mittelknoten. Die Elementvektoren $\mathbf{u}^e$, $\delta\mathbf{u}^e$ und $\ddot{\mathbf{u}}^e$ sind von der Dimension 16×1 und die Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}$ ist von der Dimension 2×16.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &\approx \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{u}^e \\
\delta\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) &\approx \delta\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})\,\delta\mathbf{u}^e \\
\ddot{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) &\approx \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})\,\ddot{\mathbf{u}}^e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} u_1^{e1} & u_2^{e1} & \dots & u_1^{e8} & u_2^{e8} \end{bmatrix}^T \\
\delta\mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} \delta u_1^{e1} & \delta u_2^{e1} & \dots & \delta u_1^{e8} & \delta u_2^{e8} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{u}^e &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1^{e1} & \ddot{u}_2^{e1} & \dots & \ddot{u}_1^{e8} & \ddot{u}_2^{e8} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

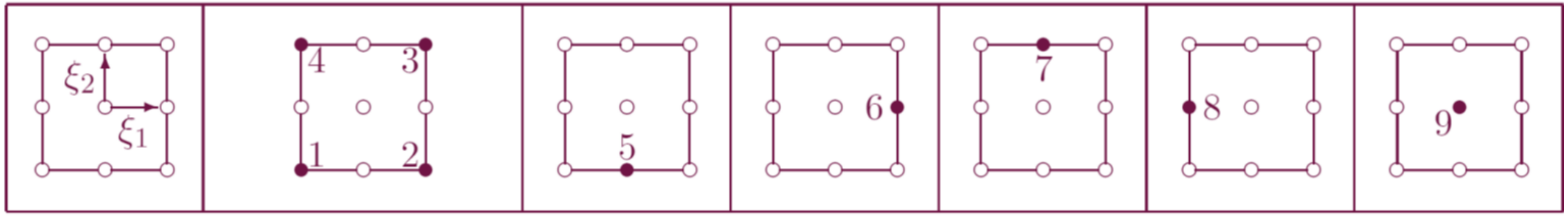
Eigenschaften

Alternativ zu den vorangegangenen Abschnitten können die bereits vorgestellten viereckigen finiten Elemente im Rahmen einer hierarchischen Elementfamilie generiert werden. Diese Elementfamilie beinhaltet unter anderem die bereits diskutierten Standard Elemente:

- bilineares Lagrange Element
- biquadratisches Lagrange Element
- biquadratisches Serendipity Element

Neben der Generierung dieser Standardelemente bietet die in der folgenden Tabelle zusammengefasste Palette von Ansatzfunktionen einer hierarchischen Elementfamilie die Möglichkeit, Elemente beliebiger Knotenanzahl zwischen der minimalen Knotenanzahl (vier) und der maximalen Knotenanzahl zu generieren. Dies erlaubt zum Beispiel, durch einfache Hinzunahme eines einzelnen Seitenmittenknotens und der entsprechenden Ansatzfunktion und Modifikationen der bereits generierten Ansatzfunktionen nach den Generierungsvorschriften, Übergangselemente von linearen zu quadratischen Vierknotenelementen zu erzeugen.

Eigenschaften



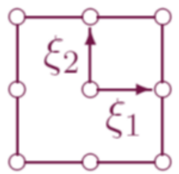
$N^1(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$	$-\frac{1}{2}N^5(\boldsymbol{\xi})$			$-\frac{1}{2}N^8(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{4}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^2(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)$	$-\frac{1}{2}N^5(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{2}N^6(\boldsymbol{\xi})$			$-\frac{1}{4}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^3(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)$		$-\frac{1}{2}N^6(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{2}N^7(\boldsymbol{\xi})$		$-\frac{1}{4}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^4(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$			$-\frac{1}{2}N^7(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{2}N^8(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{4}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^5(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)$					$-\frac{1}{2}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^6(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)$					$-\frac{1}{2}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^7(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2)$					$-\frac{1}{2}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^8(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2)$					$-\frac{1}{2}N^9(\boldsymbol{\xi})$
$N^9(\boldsymbol{\xi})$	$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)$					

Eigenschaften

Vor allem bei adaptiven Strukturanalysen mit der so genannten p-Methode (Erhöhung des Polynomgrads zur Qualitätsverbesserung) oder der hp-Methode (Kombination der p-Methode mit einer zusätzlichen Anpassung der Elementgröße) erweist sich diese Möglichkeit als vorteilhaft.

Die im Rahmen der Elemententwicklung erforderlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten können in Analogie zu den Ansatzfunktionen mit Hilfe der in der folgenden Tabelle zusammengestellten Ableitungen generiert werden.

Eigenschaften

	$\bar{N}^i(\boldsymbol{\xi})$	$\bar{N}^i_{;1}(\boldsymbol{\xi})$	$\bar{N}^i_{;2}(\boldsymbol{\xi})$
$\bar{N}^1(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$	$-\ \frac{1}{4}\,(1-\xi_2)$	$-\ \frac{1}{4}\,(1-\xi_1)$
$\bar{N}^2(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)$	$\frac{1}{4}\,(1-\xi_2)$	$-\ \frac{1}{4}\,(1+\xi_1)$
$\bar{N}^3(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)$	$\frac{1}{4}\,(1+\xi_2)$	$\frac{1}{4}\,(1+\xi_1)$
$\bar{N}^4(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$	$-\ \frac{1}{4}\,(1+\xi_2)$	$\frac{1}{4}\,(1-\xi_1)$
$\bar{N}^5(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)$	$-\ \xi_1(1-\xi_2)$	$-\ \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)$
$\bar{N}^6(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)$	$\frac{1}{2}(1-\xi_2^2)$	$-\ (1+\xi_1)\xi_2$
$\bar{N}^7(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2)$	$-\ \xi_1(1+\xi_2)$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)$
$\bar{N}^8(\boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2)$	$-\ \frac{1}{2}(1-\xi_2^2)$	$-\ (1-\xi_1)\xi_2$
$\bar{N}^9(\boldsymbol{\xi})$	$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)$	$2\,\xi_1\,(\xi_2^2-1)$	$(\xi_1^2-1)2\,\xi_2$

Eigenschaften

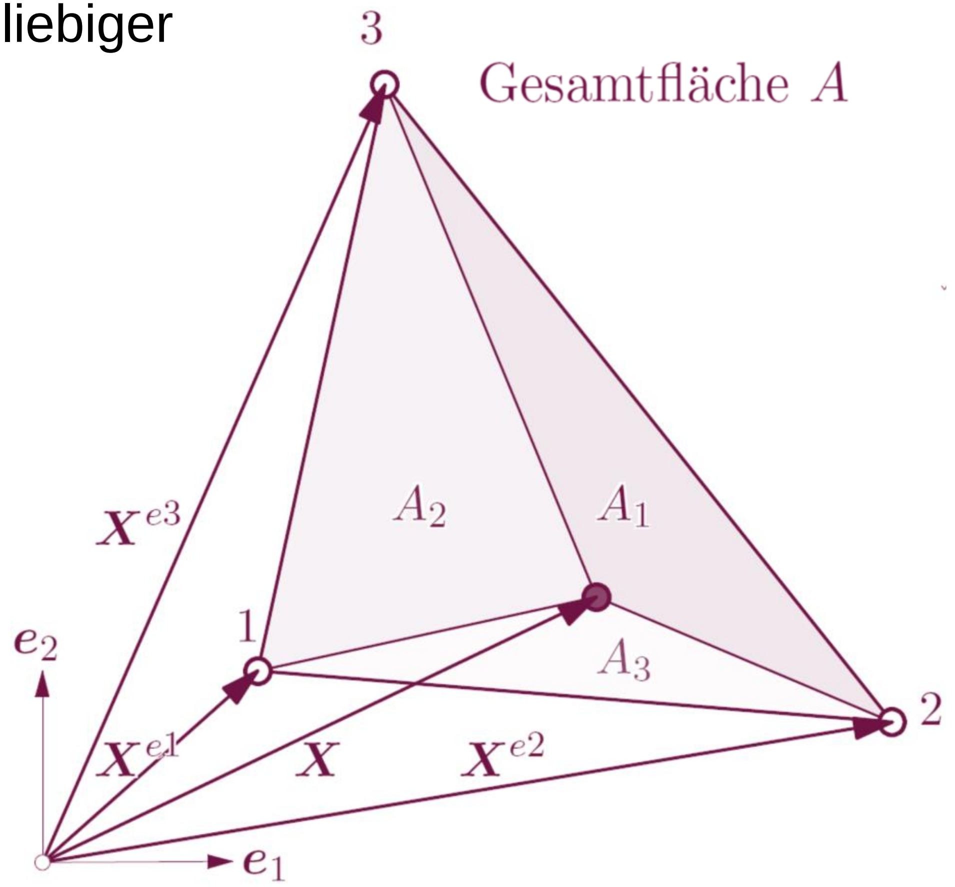
Für die Finite-Elemente-Methode von historischer Bedeutung ist das finite Dreieckselement mit drei Elementknoten. Das bereits 1956 von Turner, Clough, Martin und Topp vorgestellte Element wurde bis zum heutigen Tage weiterentwickelt, um die Qualität der Approximation zu verbessern oder die Grundidee des Dreieckselements auf andere Elementtypen (Platte oder Schale) anzuwenden. Die Qualitätsverbesserung im Bereich der hier behandelten ebenen Elemente ist durch die Erhöhung des Grads der Ansatzpolynome möglich.
Trotzdem kann bei äquivalenter Anzahl von Freiheitsgraden die Qualität von Viereckselementen nicht erreicht werden, was bei linearen Elementen sehr eindrucksvoll zu zeigen ist.
Die trotz dieses Nachteils ungebremste Nutzung von Dreieckselementen ist in der Tatsache begründet, dass beliebige Strukturen nicht ohne weiteres komplett mit Vierecken zu diskretisieren sind.
Die Entwicklung von Dreieckelementen ist ebenfalls standardisiert. Einzig der Kernpunkt der Dreieckselemententwicklung, die Generierung von natürlichen Dreieckskoordinaten und die Formulierung der Ansatzfunktionen auf Basis dieser Dreieckskoordinaten, macht das Dreieckselement zu einer Besonderheit.

Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Auch bei der Entwicklung von finiten Dreieckselementen ist es von Vorteil, die Ansatzfunktionen in natürlichen Koordinaten auf dem Master- oder Einheitsdreieck zu formulieren, da mit dieser Methode dieselben Ansatzfunktionen für Dreiecke beliebiger Gestalt und Größe eingesetzt werden können.
Natürliche Koordinaten ξ_i für $i = 1, 2, 3$ eines beliebig innerhalb des Dreiecks positionierten materiellen Punkts $\mathbf{X}$, sind die bei der Verbindung des Punkts mit den Ecken des Dreiecks entstehenden Flächeninhalte der Teildreiecke A_i bezogen auf die Fläche des gesamten Dreiecks A.

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} = \frac{A_i}{A_1 + A_2 + A_3}$$

mit $i = 1, 2, 3$



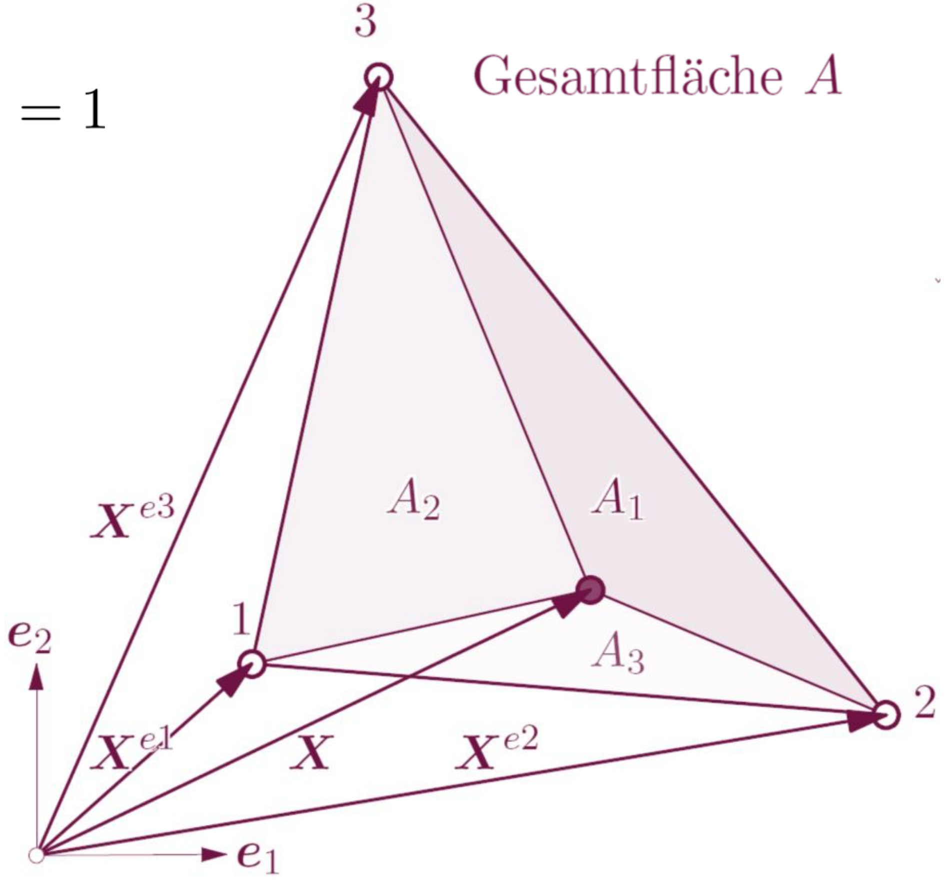
Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Dabei ist A_i die dem Elementknoten i gegenüberliegende Teilfläche des Dreiecks. Da die Summe der Teilflächen A_i die Dreiecksfläche A ergeben muss, existiert die Zwangsbedingung

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = \sum_{i=1}^{3} \xi_i\, A = A \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \xi_i = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

der natürlichen Koordinaten ξ_i.
Das bedeutet, die natürlichen Koordinaten des Dreiecks sind nicht unabhängig. Eine der Koordinaten kann durch die beiden anderen ersetzt werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird hier die Koordinate ξ_3 mit Hilfe der Koordinaten ξ_1 und ξ_2 substituiert.

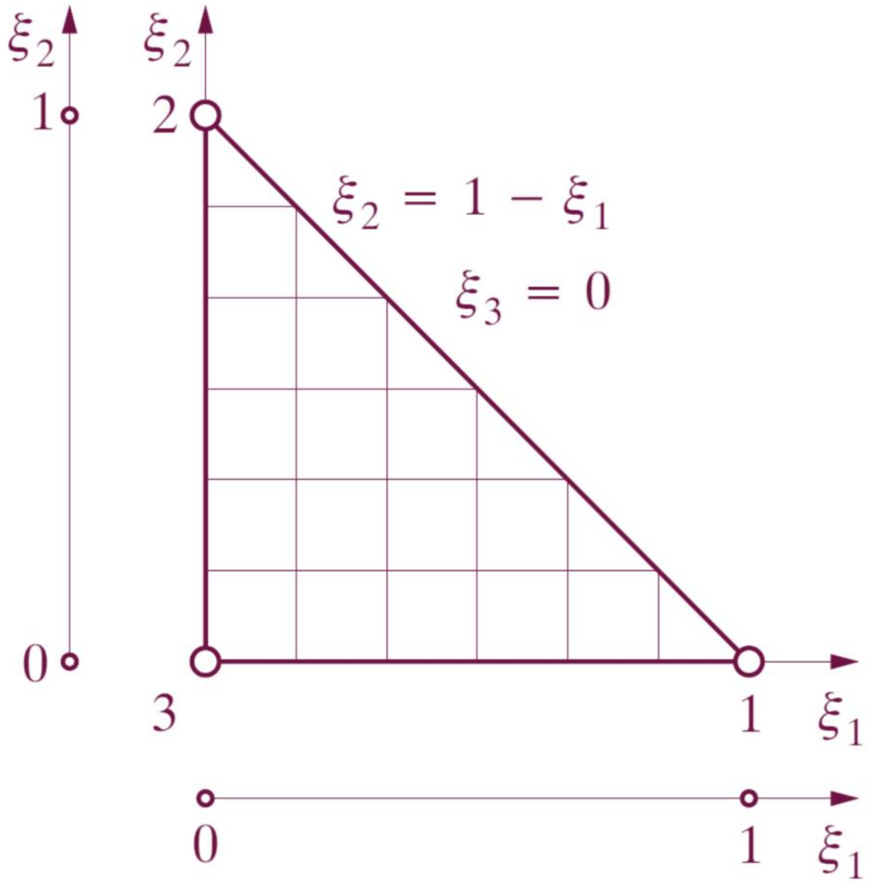
$$\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$$



Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Es bleibt das Intervall der natürlichen Koordinaten zu ermitteln. Für den Fall, da der Punkt $\mathbf{X}$ dem Ortsvektor $\mathbf{X}^{ei}$, also der Position des Knotens i entspricht, ist die Fläche A_i gleich der Fläche A und damit $\xi_i = 1$.
Ist der betrachtete materielle Punkt auf der dem Knoten i gegenüberliegenden Elementkante positioniert, wird die Teilfläche A_i und damit auch die natürliche Koordinate Null ($\xi_i = 0$). Demnach kann das Dreieck komplett durch die natürlichen Koordinaten, die von Null bis Eins variieren, beschrieben werden.
Um nun $1 \geq \xi_3 \geq 0$ nach unten zu beschränken, muss nach der Zwangsbedingung eine Bedingungsgleichung für die Intervallgrenzen der natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 existieren.

$$\xi_i \in [0, 1] \qquad \xi_1 + \xi_2 \leq 1$$



Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Wird zum Beispiel die Koordinate ξ_2 im Intervall $[0, 1]$ gewählt, ergibt sich das Intervall der Koordinate ξ_1 aus der Bedingung $\xi_1 + \xi_2 \leq 1$.

$$\xi_2 \in [0, 1]$$

$$\xi_1 \in [0, 1 - \xi_2]$$