

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

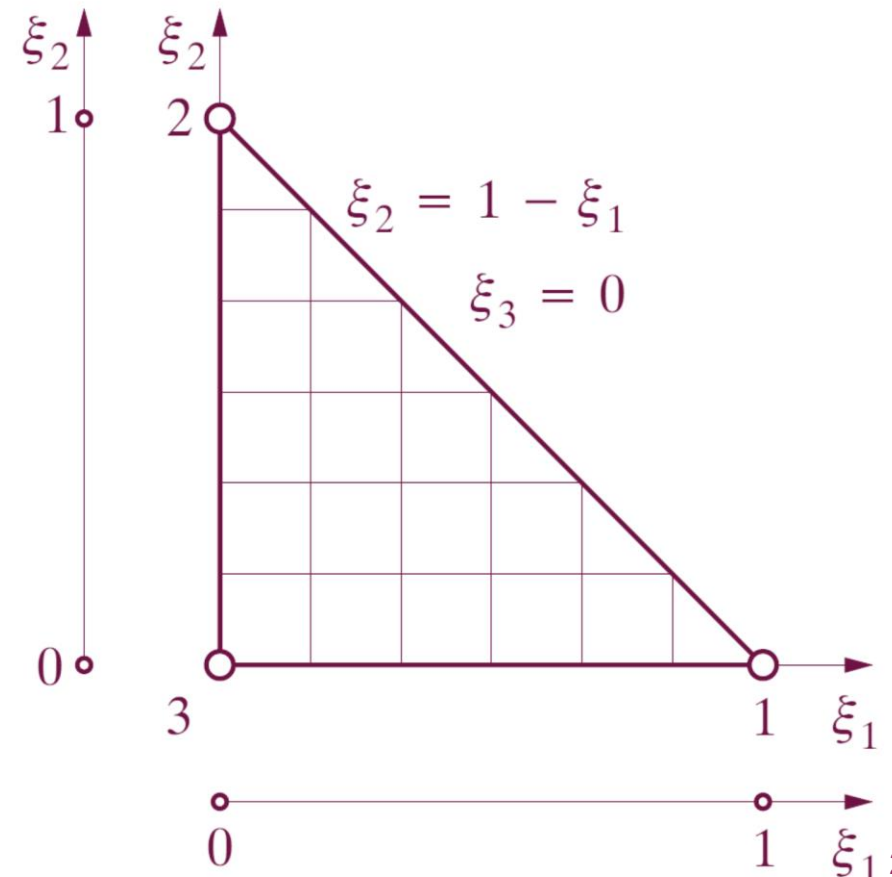
### Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Es bleibt das Intervall der natürlichen Koordinaten zu ermitteln. Für den Fall, dass der Punkt  $\mathbf{X}$  dem Ortsvektor  $\mathbf{X}^{ei}$ , also der Position des Knotens  $i$  entspricht, ist die Fläche  $A_i$  gleich der Fläche  $A$  und damit  $\xi_i = 1$ .

Ist der betrachtete materielle Punkt auf der dem Knoten  $i$  gegenüberliegenden Elementkante positioniert, wird die Teilfläche  $A_i$  und damit auch die natürliche Koordinate Null ( $\xi_i = 0$ ). Demnach kann das Dreieck komplett durch die natürlichen Koordinaten, die von Null bis Eins variieren, beschrieben werden.

Um nun  $1 \geq \xi_3 \geq 0$  nach unten zu beschränken, muss nach der Zwangsbedingung eine Bedingungsgleichung für die Intervallgrenzen der natürlichen Koordinaten  $\xi_1$  und  $\xi_2$  existieren.

$$\xi_i \in [0, 1] \quad \xi_1 + \xi_2 \leq 1$$



# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

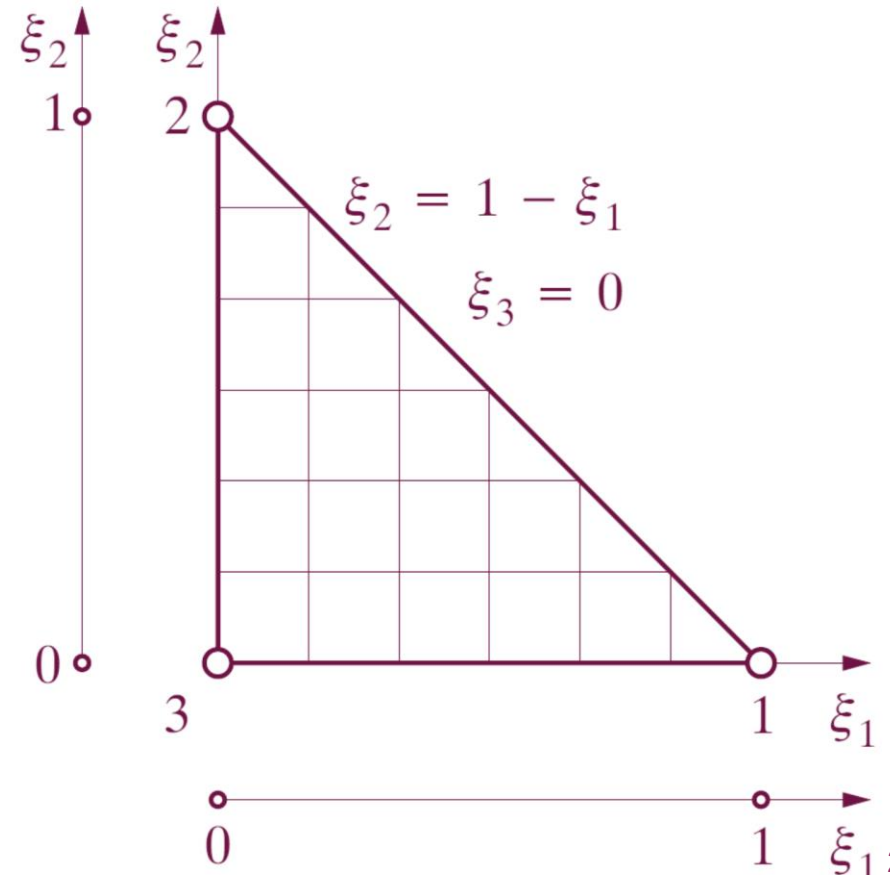
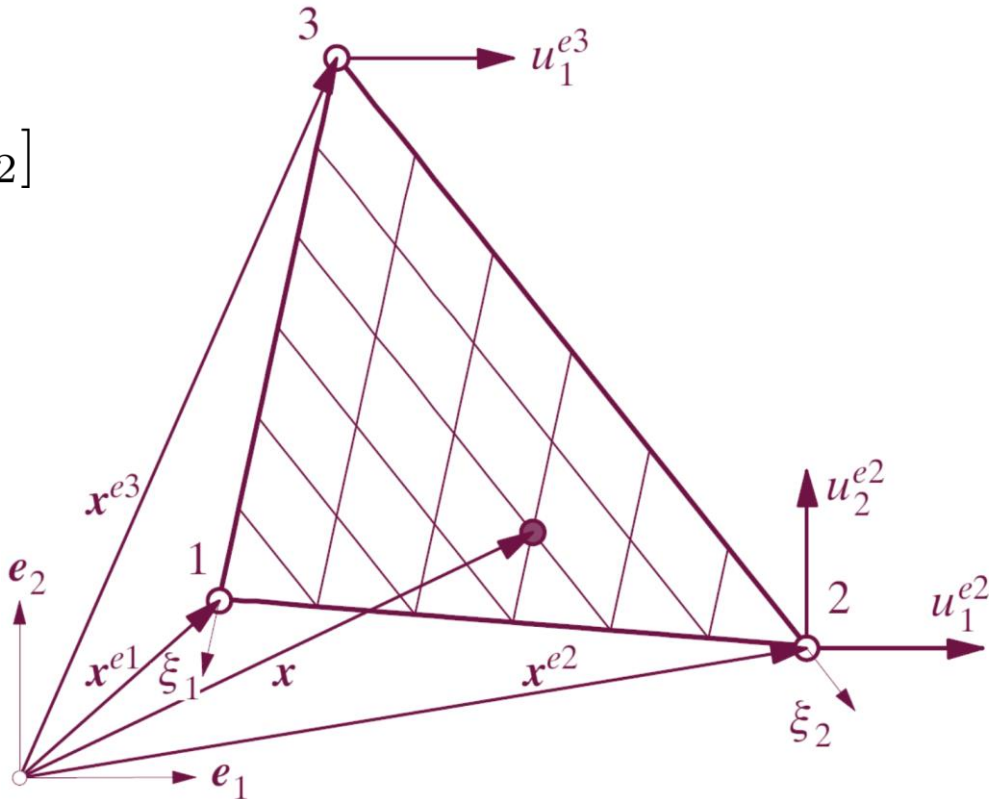
## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

### Natürliche Koordinaten des Dreiecks

Wird zum Beispiel die Koordinate  $\xi_2$  im Intervall  $[0, 1]$  gewählt, ergibt sich das Intervall der Koordinate  $\xi_1$  aus der Bedingung  $\xi_1 + \xi_2 \leq 1$ .

$$\xi_2 \in [0, 1]$$

$$\xi_1 \in [0, 1 - \xi_2]$$



## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktionen des linearen und des quadratischen ebenen Dreieckselements können mit Hilfe der gegebenen Interpolationseigenschaften

- die Ansatzfunktionen  $N^i(\xi) = 1$  am Knoten  $i$
- und die Ansatzfunktionen  $N^j(\xi) = 0$  an allen anderen Knoten  $j \neq i$

generiert werden.

Auch für die hier praktizierte Generierung der Ansatzfunktionen auf Basis der Interpolationseigenschaften kann ein generalisierter hierarchischer Zugang angegeben werden. Wie in den folgenden Folien noch gezeigt werden wird, sind die Ansatzfunktionen vollständige Polynome des Polynomgrads eins und zwei, wie sie im Pascal'schen Dreieck markiert sind.

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

### Lineare Ansatzfunktionen

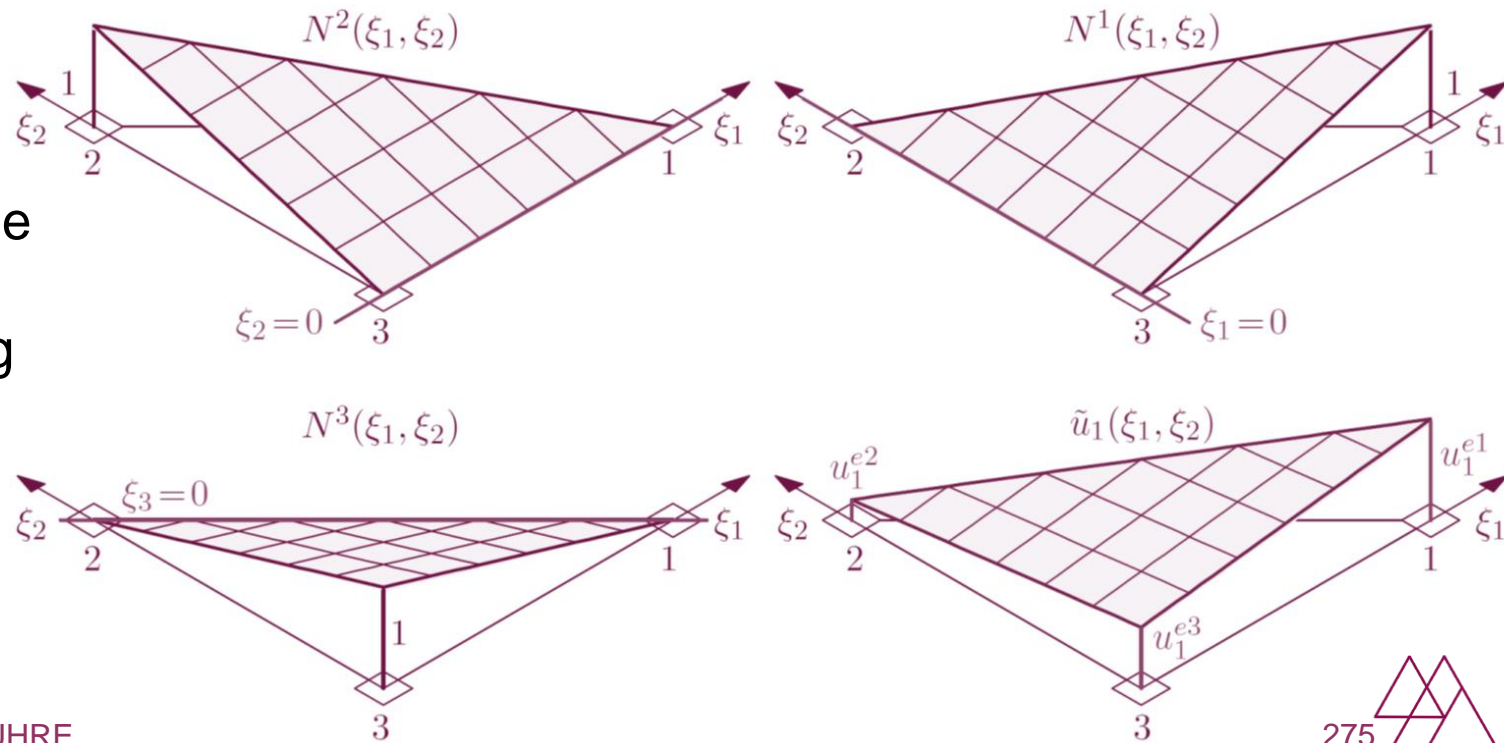
Die linearen Ansatzfunktionen über dem Einheits- oder Masterdreieck in natürlichen Koordinaten sind sehr einfach zu bestimmen. Zum Beispiel ergibt sich die in der Abbildung dargestellte Ansatzfunktion  $N^1(\xi)$  direkt als die natürliche Koordinate  $\xi_1$ .  $\xi_1$  ist am Knoten eins gleich Eins und an den anderen Knoten Null.

$$N^1(\xi) = \xi_1$$

Analog ergeben sich die Ansatzfunktionen  $N^2(\xi)$  und  $N^3(\xi)$  direkt als die entsprechende natürliche Koordinate, wobei  $\xi_3$  mit Hilfe der Zwangsbedingung  $1 - \xi_1 - \xi_2$  ersetzt wird.

$$N^2(\xi) = \xi_2$$

$$N^3(\xi) = \xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$$



# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

### Lineare Ansatzfunktionen

Die Ansatzfunktionen beinhalten die im Pascal'schen Dreieck mit  $p = 1$  gekennzeichneten Terme, demnach handelt es sich bei dem Ansatz des dreiknotigen finiten Elements um ein vollständiges zweidimensionales Polynom des Polynomgrads eins. Die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den unabhängigen natürlichen Koordinaten ergeben sich zu:

$$N_{;1}^1(\boldsymbol{\xi}) = 1$$

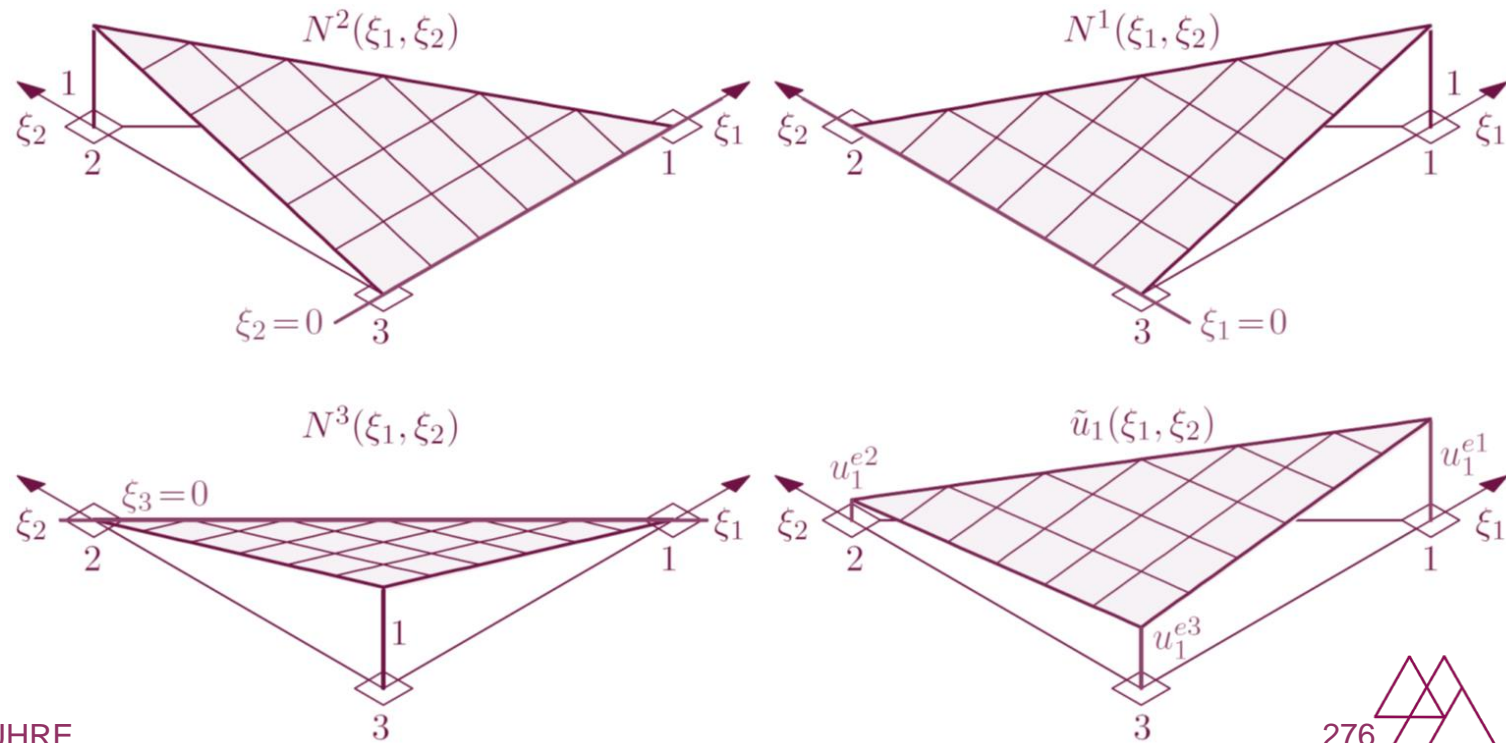
$$N_{;1}^2(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$N_{;1}^3(\boldsymbol{\xi}) = -1$$

$$N_{;2}^1(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$N_{;2}^2(\boldsymbol{\xi}) = 1$$

$$N_{;2}^3(\boldsymbol{\xi}) = -1$$





## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Quadratische Ansatzfunktionen

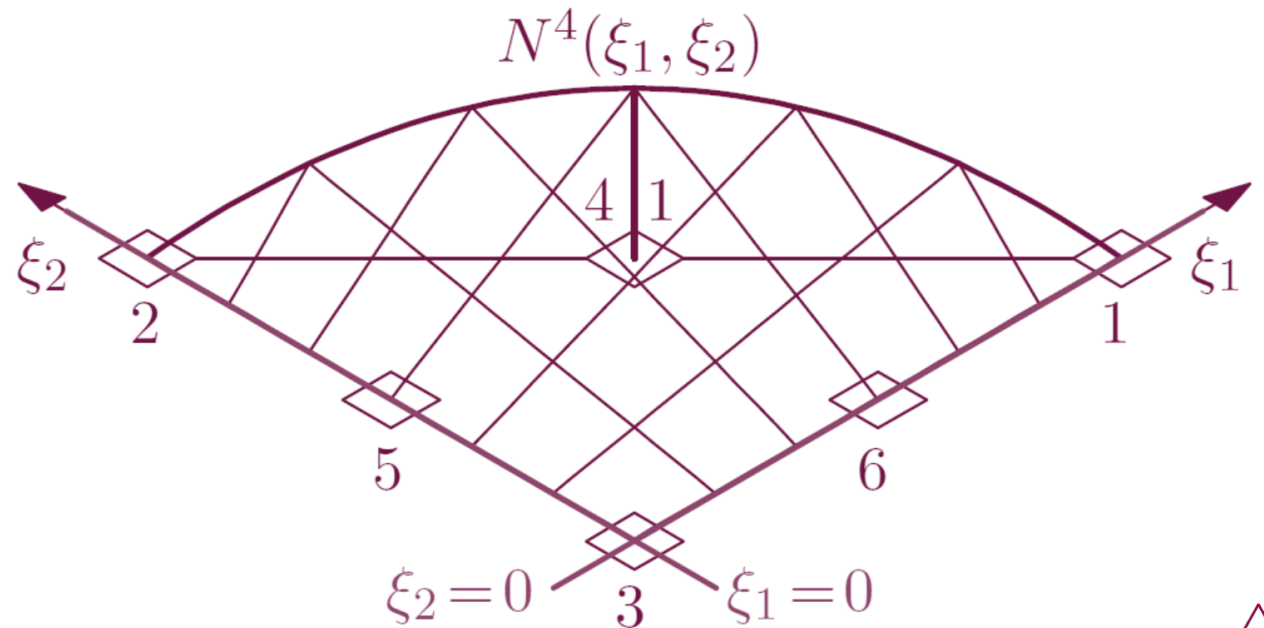
Die Konstruktion der quadratischen Ansatzfunktionen soll anhand der in der Abbildung exemplarisch dargestellten Ansatzfunktionen  $N^1(\xi)$  und  $N^4(\xi)$  demonstriert werden. Die Ansatzfunktion  $N^1(\xi)$  muss an den Knoten zwei bis sechs Null sein, das bedeutet die Erfüllung der Bedingungen  $N^1(0, \xi_2) = 0$  (Knoten 2, 3 und 5) und  $N^1(1/2, \xi_2) = 0$  (Knoten 4 und 6) muss gewährleistet sein. Diese Forderung kann mit dem Ansatz

$$N^1(\xi) = c_1 \xi_1 \left( \xi_1 - \frac{1}{2} \right) = \xi_1 (2\xi_1 - 1)$$

erfüllt werden, wobei der konstante Faktor  $c_1$  aus der Bedingung  $N^1(1, \xi) = 1$  zu  $c_1 = 2$  bestimmt werden konnte.

Die Ansatzfunktion  $N^4(\xi)$  muss an den Elementrändern  $\xi_1 = 0$  und  $\xi_2 = 0$  Null und für  $\xi_1 = \xi_2 = 1/2$  Eins sein.

$$N^4(\xi) = c_1 \xi_1 \xi_2 = 4 \xi_1 \xi_2$$



## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Quadratische Ansatzfunktionen

Analog können die weiteren Ansatzfunktionen konstruiert werden, wobei zu beachten ist, dass  $\xi_3$  durch die Zwangsbedingung  $1 - \xi_1 - \xi_2$  ersetzt wird.

$$N^1(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 (2\xi_1 - 1)$$

$$N^2(\boldsymbol{\xi}) = \xi_2 (2\xi_2 - 1)$$

$$N^3(\boldsymbol{\xi}) = \xi_3 (2\xi_3 - 1) = (1 - \xi_1 - \xi_2) (1 - 2\xi_1 - 2\xi_2)$$

$$N^4(\boldsymbol{\xi}) = 4 \xi_1 \xi_2$$

$$N^5(\boldsymbol{\xi}) = 4 \xi_2 \xi_3 = 4\xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2)$$

$$N^6(\boldsymbol{\xi}) = 4 \xi_3 \xi_1 = 4\xi_1 (1 - \xi_1 - \xi_2)$$



## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Quadratische Ansatzfunktionen

Die Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten sind folgendermaßen gegeben.

$$N_{;1}^1(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_1 - 1$$

$$N_{;2}^1(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$N_{;1}^2(\boldsymbol{\xi}) = 0$$

$$N_{;2}^2(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_2 - 1$$

$$N_{;1}^3(\boldsymbol{\xi}) = 4(\xi_1 + \xi_2) - 3$$

$$N_{;2}^3(\boldsymbol{\xi}) = 4(\xi_1 + \xi_2) - 3$$

$$N_{;1}^4(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_2$$

$$N_{;2}^4(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_1$$

$$N_{;1}^5(\boldsymbol{\xi}) = -4\xi_2$$

$$N_{;1}^5(\boldsymbol{\xi}) = 4(1 - \xi_1 - 2\xi_2)$$

$$N_{;1}^6(\boldsymbol{\xi}) = 4(1 - 2\xi_1 - \xi_2)$$

$$N_{;2}^6(\boldsymbol{\xi}) = -4\xi_1$$

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

### Hierarchische Ansatzfunktionen

Wie bereits beim Viereckselement erläutert, ist es auch zur Entwicklung einer Familie finiter Dreieckselemente günstig, die Ansatzfunktionen wie hier zusammengefasst hierarchisch zu formulieren.

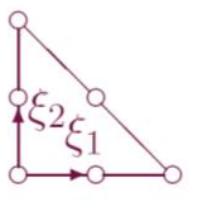
$N^1(\boldsymbol{\xi})$	$\xi_1$	$-\frac{1}{2}N^4(\boldsymbol{\xi})$		$-\frac{1}{2}N^6(\boldsymbol{\xi})$
$N^2(\boldsymbol{\xi})$	$\xi_2$	$-\frac{1}{2}N^4(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{2}N^5(\boldsymbol{\xi})$	
$N^3(\boldsymbol{\xi})$	$1 - \xi_1 - \xi_2$		$-\frac{1}{2}N^5(\boldsymbol{\xi})$	$-\frac{1}{2}N^6(\boldsymbol{\xi})$
$N^4(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_1 \xi_2$			
$N^5(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2)$			
$N^6(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_1 (1 - \xi_1 - \xi_2)$			

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

### Hierarchische Ansatzfunktionen

Die Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten sind folgendermaßen gegeben.

	$N^i(\boldsymbol{\xi})$	$N_{;1}^i(\boldsymbol{\xi})$	$N_{;2}^i(\boldsymbol{\xi})$
$N^1(\boldsymbol{\xi})$	$\xi_1$	1	0
$N^2(\boldsymbol{\xi})$	$\xi_2$	0	1
$N^3(\boldsymbol{\xi})$	$1 - \xi_1 - \xi_2$	- 1	- 1
$N^4(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_1 \xi_2$	$4 \xi_2$	$4 \xi_1$
$N^5(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2)$	- $4 \xi_2$	$4 (1 - \xi_1 - 2\xi_2)$
$N^6(\boldsymbol{\xi})$	$4 \xi_1 (1 - \xi_1 - \xi_2)$	$4 (1 - 2\xi_1 - \xi_2)$	- $4 \xi_1$

## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Isoparametrische Approximation kontinuierlicher Größen

Die Vorgehensweise zur Abbildung der Geometrie im physikalischen Raum und zur Approximation von Verschiebungen und Beschleunigungen ist im isoparametrischen Elementkonzept standardisiert.

Für ein Element der hierarchischen Elementfamilie mit  $NN$  Elementknoten erhält man:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X}(\xi) \approx \tilde{\mathbf{X}}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{X}^e & \mathbf{X}^e = \left[ X_1^{e1} \ X_2^{e1} \ \dots \ X_1^{eNN} \ X_2^{eNN} \right]^T \\ \mathbf{u}(\xi) \approx \tilde{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}^e & \mathbf{u}^e = \left[ u_1^{e1} \ u_2^{e1} \ \dots \ u_1^{eNN} \ u_2^{eNN} \right]^T \\ \delta \mathbf{u}(\xi) \approx \delta \tilde{\mathbf{u}}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \delta \mathbf{u}^e & \delta \mathbf{u}^e = \left[ \delta u_1^{e1} \ \delta u_2^{e1} \ \dots \ \delta u_1^{eNN} \ \delta u_2^{eNN} \right]^T \\ \ddot{\mathbf{u}}(\xi) \approx \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}(\xi) = \mathbf{N}(\xi) \ddot{\mathbf{u}}^e & \ddot{\mathbf{u}}^e = \left[ \ddot{u}_1^{e1} \ \ddot{u}_2^{e1} \ \dots \ \ddot{u}_1^{eNN} \ \ddot{u}_2^{eNN} \right]^T \end{array}$$

## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Isoparametrische Approximation kontinuierlicher Größen

Wobei die Matrix der Ansatzfunktionen ebenfalls allgemein formuliert ist.

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) = \left[ \mathbf{N}^1 \quad \dots \quad \mathbf{N}^{NN} \right] \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}^i(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} N^i(\boldsymbol{\xi}) & 0 \\ 0 & N^i(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}$$

## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Elementmatrizen und -vektoren

Mit den vorangehenden Entwicklungsschritten von Dreieckselementen ist ein Status erreicht, der nahezu standardisiert bis hin zur Berechnung der Elementmatrizen und -vektoren abgearbeitet werden kann.

Nachdem die physikalischen Koordinaten als Funktion der natürlichen Koordinaten beschrieben sind, können die Jacobi Matrix  $\mathbf{J}(\xi)$ , deren Inverse  $\mathbf{J}^{-1}(\xi)$  sowie die Jacobi Determinante  $|\mathbf{J}(\xi)|$  berechnet werden.

Mit den Komponenten der inversen Jacobi Matrix  $\mathbf{J}^{-1}(\xi)$  ist es anschließend möglich, den Differentialoperator  $D_{\varepsilon\xi}(\xi)$  in natürlichen Koordinaten zu bestimmen.

Die Anwendung dieses Differentialoperators auf die Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\xi)$  liefert den B-Operator  $\mathbf{B}(\xi)$  des generalisierten hierarchischen.

Einzig die Zusammenfassung der B-Operatoren  $\mathbf{B}_i(\xi)$  muss an die Anzahl der Elementknoten des Dreiecks angepasst werden.

$$\mathbf{B}(\xi) = \left[ \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{NN} \right]$$

## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Elementmatrizen und -vektoren

Damit sind die Voraussetzungen geschaffen, die Elementsteifigkeitsmatrix, die Elementmassenmatrix und die konsistenten Elementlastvektoren zu generieren. Im Vergleich zu viereckigen Elementen müssen zur Integration der Elementgrößen der Dreieckselemente die veränderten Intervalle der natürlichen Koordinaten berücksichtigt werden.

Demnach wird in  $\xi_2$ -Richtung von 0 bis 1 integriert und in  $\xi_1$ -Richtung wegen der Begrenzung der Dreiecksfläche durch  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = 0$  von 0 bis  $1 - \xi_2$  integriert.

Die entsprechende Modifikation der Integrationsgrenzen liefert schließlich die Elementsteifigkeitsmatrix des Dreieckselements.

$$\mathbf{k}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| h d\xi_1 d\xi_2$$

Die Elementmassenmatrix des generalisierten Dreieckselements entsteht analog durch Modifikation der Integrationsgrenzen.

## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Elementmatrizen und -vektoren

Die Elementmassenmatrix des generalisierten Dreieckselements entsteht analog durch Modifikation der Integrationsgrenzen.

$$\mathbf{m}^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| \rho h d\xi_1 d\xi_2$$

Entsprechend kann auch der Elementvektor der konsistenten Ersatzlasten als Resultat angreifender Volumenlasten gewonnen werden.

$$\mathbf{r}_p^e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) |\mathbf{J}(\boldsymbol{\xi})| \rho h d\xi_1 d\xi_2$$



## 4. EBENE FINITE ELEMENTE

### 4.6 DREIECKIGE FINITE ELEMENTE

#### Elementmatrizen und -vektoren

Die konsistenten Ersatzlasten einer Randlast an der beispielhaft ausgewählten Elementkante zwei (gegenüber dem mit  $\xi_2 = 0$  bestimmten Elementknoten zwei) können mit der Jacobi Determinante  $|\mathbf{J}(\xi_1, 0)|$  generiert werden.

$$\mathbf{r}_{n2}^e = \int_0^1 \mathbf{N}^T(\xi_1, 0) \cdot \mathbf{t}^*(\xi_1, 0) |\mathbf{J}_2(\xi_1, 0)| h d\xi_1$$

Wie schon bei den Integralen über der Elementfläche müssen die Integrationsgrenzen der natürlichen Dreieckskoordinaten berücksichtigt werden.

Die Berechnung der Integrale wird mit Hilfe der Gauß-Legendre Integration realisiert. Eine Sonderrolle nimmt dabei die Integration der konsistenten Ersatzlast von Randlasten  $\mathbf{r}_{ni}^e$  ein, die Integration ist eindimensional durchzuführen, was mit der bereits vorgestellten Gauß-Legendre Integration im eindimensionalen Fall geschehen kann, wobei zur Wahl der Gauß Punkte die veränderten Integrationsgrenzen der natürlichen Dreieckskoordinaten berücksichtigt werden müssen.

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Eigenschaften

Bisher endeten die Entwicklungen ebener finiter Elemente in den vorangehenden Abschnitte mit Integralausdrücken, die die Elementsteifigkeitsmatrix, die Elementmassenmatrix oder die konsistenten Elementlastvektoren definieren. Zur Realisierung der Finite-Elemente-Methode ist es erforderlich die entsprechenden Integralausdrücke zu lösen. Hierzu empfiehlt es sich, die numerische Integration anzuwenden, da die analytische Integration sehr aufwändig oder für die allgemeine Formenvielfalt eines Elementtyps gar nicht möglich ist.

Bereits bei den Ausführungen des räumlichen Stabs wurde die eindimensionale numerische Gauß-Legendre Integration vorgestellt, obwohl die dort vorkommenden Integrale durchaus analytisch zu lösen waren. Hier soll diese Methode nun zur Lösung zweidimensionaler Integrale erweitert werden. Speziell werden die Stützstellen und Wichtungsfaktoren der Gauß-Legendre Integration der Elementmatrizen und -vektoren

- viereckiger Elemente (mit  $\xi_1 \in [-1, 1]$  und  $\xi_2 \in [-1, 1]$ )
- und dreieckiger Elemente (mit  $\xi_2 \in [0, 1]$  und  $\xi_1 \in [0, 1 - \xi_2]$ )

verschiedener Genauigkeitsordnung und numerischen Aufwand vorgestellt.

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Viereckselemente

Zur Integration einer Funktion  $f(\xi_1, \xi_2)$  über dem Referenz- oder Einheitsquadrat ( $\xi_1 \in [-1, 1]$  und  $\xi_2 \in [-1, 1]$ ) ist es möglich, die eindimensionale Gauß-Legendre Quadratur sukzessive auf das Flächenintegral anzuwenden. Werden in  $\xi_1$ - und  $\xi_2$ -Richtung die gleiche Anzahl von Gaußpunkten  $n$  zur numerischen Integration verwendet, erhält man die folgende Approximation des Integrals.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{i=1}^n \alpha^i \int_{-1}^1 f(\xi_1^i, \xi_2) d\xi_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha^i \alpha^j f(\xi_1^i, \xi_2^j)$$

Entsprechend sind auch die Stützstellen  $\xi_1^i, \xi_2^j$  und die Wichtungsfaktoren  $\alpha^i, \alpha^j$  der Tabelle für die eindimensionale Gauß-Legendre Integration zu entnehmen.

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE





## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Viereckselemente

Eine Zusammenstellung dieser Gaußpunkte und Wichtungsfaktoren, speziell für die Integration über dem Einheitsquadrat, bei dem sich die natürlichen Koordinaten  $\xi_1$  und  $\xi_2$  im Intervall  $[-1, 1]$  befinden, ist in der Tabelle gegeben.

Die Integration einer der beiden natürlichen Koordinaten liefert bei Verwendung von  $n$  Gaußpunkten eine exakte Integration von Polynomen des Polynomgrads  $p = 2n - 1$ .

Soll nun über der Fläche des Masterquadrats numerisch integriert werden, sind  $n^2$  Gaußpunkte erforderlich, um ein Bispynom des Polynomgrads  $p = 2n - 1$  exakt zu analysieren.

$n \times n$	$2n - 1$	$f(\xi_1, \xi_2)$	$\xi_1^i$	$\xi_2^j$	$\alpha^i, \alpha^j$
$1 \times 1$	1		$\xi_1^1 = 0$	$\xi_2^1 = 0$	$\alpha^1 = 2$
$2 \times 2$	3		$\xi_1^1 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_1^2 = 1/\sqrt{3}$	$\xi_2^1 = -1/\sqrt{3}$ $\xi_2^2 = 1/\sqrt{3}$	$\alpha^1 = 1$ $\alpha^2 = 1$
$3 \times 3$	5		$\xi_1^1 = -\sqrt{3/5}$ $\xi_1^2 = 0$ $\xi_1^3 = \sqrt{3/5}$	$\xi_2^1 = -\sqrt{3/5}$ $\xi_2^2 = 0$ $\xi_2^3 = \sqrt{3/5}$	$\alpha^1 = 5/9$ $\alpha^2 = 8/9$ $\alpha^3 = 5/9$
$4 \times 4$	7		$\xi_1^1 = -0.86114$ $\xi_1^2 = -0.33998$ $\xi_1^3 = 0.33998$ $\xi_1^4 = 0.86114$	$\xi_2^1 = -0.86114$ $\xi_2^2 = -0.33998$ $\xi_2^3 = 0.33998$ $\xi_2^4 = 0.86114$	$\alpha^1 = 0.34785$ $\alpha^2 = 0.65241$ $\alpha^3 = 0.65241$ $\alpha^4 = 0.34785$

# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Viereckselemente

Die notwendige Anzahl von Gaußpunkten zur exakten numerischen Integration der Steifigkeitsmatrix verschiedener Elementtypen und Ansatzordnungen sind in der Abbildung zusammengefasst.

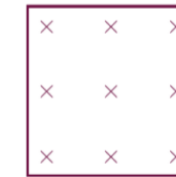
GAUSS  
Integrationspunkte



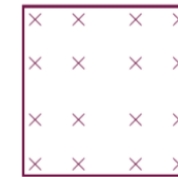
1 × 1



2 × 2

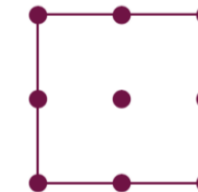
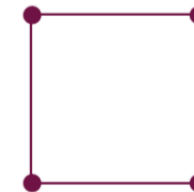


3 × 3



4 × 4

LAGRANGE  
Elemente



Serendipity  
Elemente



# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Viereckselemente

Nicht selten wird die in dieser Abbildung zusammengestellte inexakte Integration, die sogenannte Unterintegration oder reduzierte Integration, der Elemente durchgeführt.

Einer der Gründe ist sofort in der Reduzierung des numerischen Aufwands zu sehen.

Das Hauptargument sind allerdings ungewünschte Versteifungseffekte (locking) der Elemente, die bei der Lösung der Systemgleichung zu gering berechnete Verschiebungen zur Folge haben

GAUSS  
Integrationspunkte



1 × 1



2 × 2



3 × 3



4 × 4

LAGRANGE  
Elemente



Serendipity  
Elemente



# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

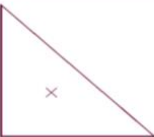
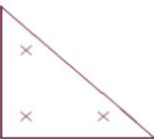
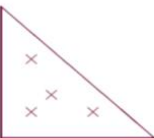
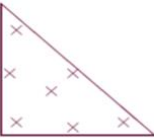
## 4.7 NUMERISCHE INTEGRATION

### Dreieckselemente

Der entscheidende Unterschied der numerischen Integration von Dreieckselementen im Vergleich zu den Viereckselementen ist die Tatsache, dass die Integrationsgrenzen der zweiten Integration die natürliche Dreiecksordinate  $\xi_2$  beinhaltet. Die Gauß-Legendre Quadratur

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha^i f(\xi_1^i, \xi_2^i)$$

wird mit den in der Tabelle zusammengestellten Gewichten  $\alpha^i$  und Gaußpunkten  $\xi_1^i, \xi_2^i$  durchgeführt.

$n$	$p$	$f(\xi_1, \xi_2)$	$\xi_1^i$	$\xi_2^j$	$\alpha^i$
1	1		$\xi_1^1 = 1/3$	$\xi_2^1 = 1/3$	$\alpha^1 = 1$
3	2		$\xi_1^1 = 1/6$ $\xi_1^2 = 2/3$ $\xi_1^3 = 1/6$	$\xi_2^1 = 1/6$ $\xi_2^2 = 1/6$ $\xi_2^3 = 2/3$	$\alpha^1 = 1/3$ $\alpha^2 = 1/3$ $\alpha^3 = 1/3$
4	3		$\xi_1^1 = 1/3$ $\xi_1^2 = 3/5$ $\xi_1^3 = 1/5$ $\xi_1^4 = 1/5$	$\xi_2^1 = 1/3$ $\xi_2^2 = 1/5$ $\xi_2^3 = 3/5$ $\xi_2^4 = 1/5$	$\alpha^1 = -27/48$ $\alpha^2 = 25/48$ $\alpha^3 = 25/48$ $\alpha^4 = 25/48$
7	5		$\xi_1^1 = 0.33333$ $\xi_1^2 = 0.10128$ $\xi_1^3 = 0.79742$ $\xi_1^4 = \xi_1^1$ $\xi_1^5 = 0.47014$ $\xi_1^6 = \xi_1^4$ $\xi_1^7 = 0.05971$	$\xi_2^1 = \xi_1^1$ $\xi_2^2 = \xi_1^2$ $\xi_2^3 = \xi_1^2$ $\xi_2^4 = \xi_1^3$ $\xi_2^5 = \xi_1^7$ $\xi_2^6 = \xi_1^5$ $\xi_2^7 = \xi_1^5$	$\alpha^1 = 0.22500$ $\alpha^2 = 0.12593$ $\alpha^3 = \alpha^2$ $\alpha^4 = \alpha^2$ $\alpha^5 = 0.13239$ $\alpha^6 = \alpha^5$ $\alpha^7 = \alpha^5$

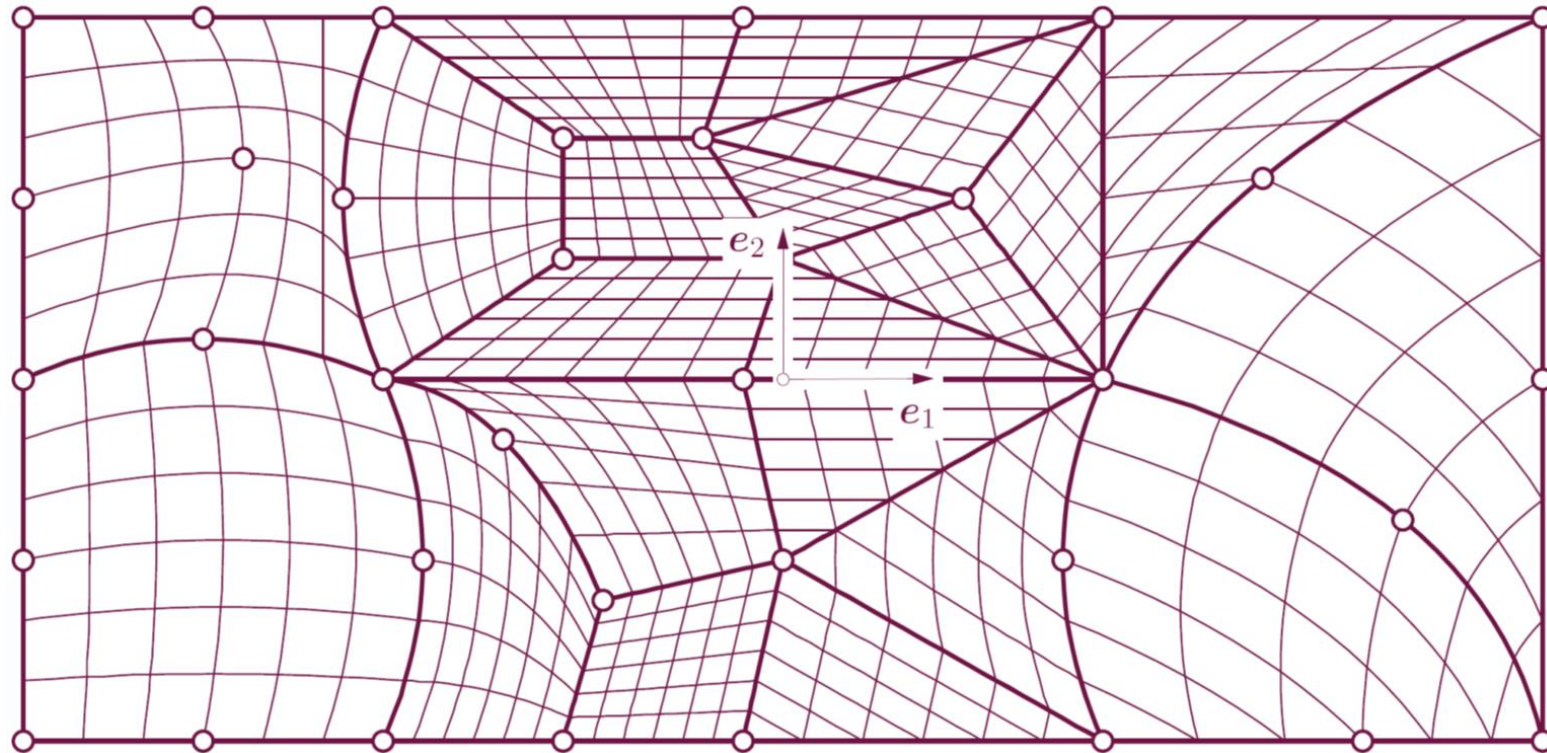
# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

## 4.8 KONTINUITÄT ISOPARAMETRISCHER EBENER ELEMENTE

### Eigenschaften

Sämtliche in den vorangehenden Abschnitten diskutierten ebenen finiten Elemente, drei- oder viereckiger Geometrie, können kombiniert werden, wenn die Anzahl der Knoten an benachbarten Seiten identisch sind.

Eine Illustration der Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten im Rahmen der hierarchischen Elementgenerierung ist in der Abbildung gegeben (Linien innerhalb der Elemente sind Isolinien der natürlichen Koordinaten  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , transformiert in physikalische Koordinaten).





# 4. EBENE FINITE ELEMENTE

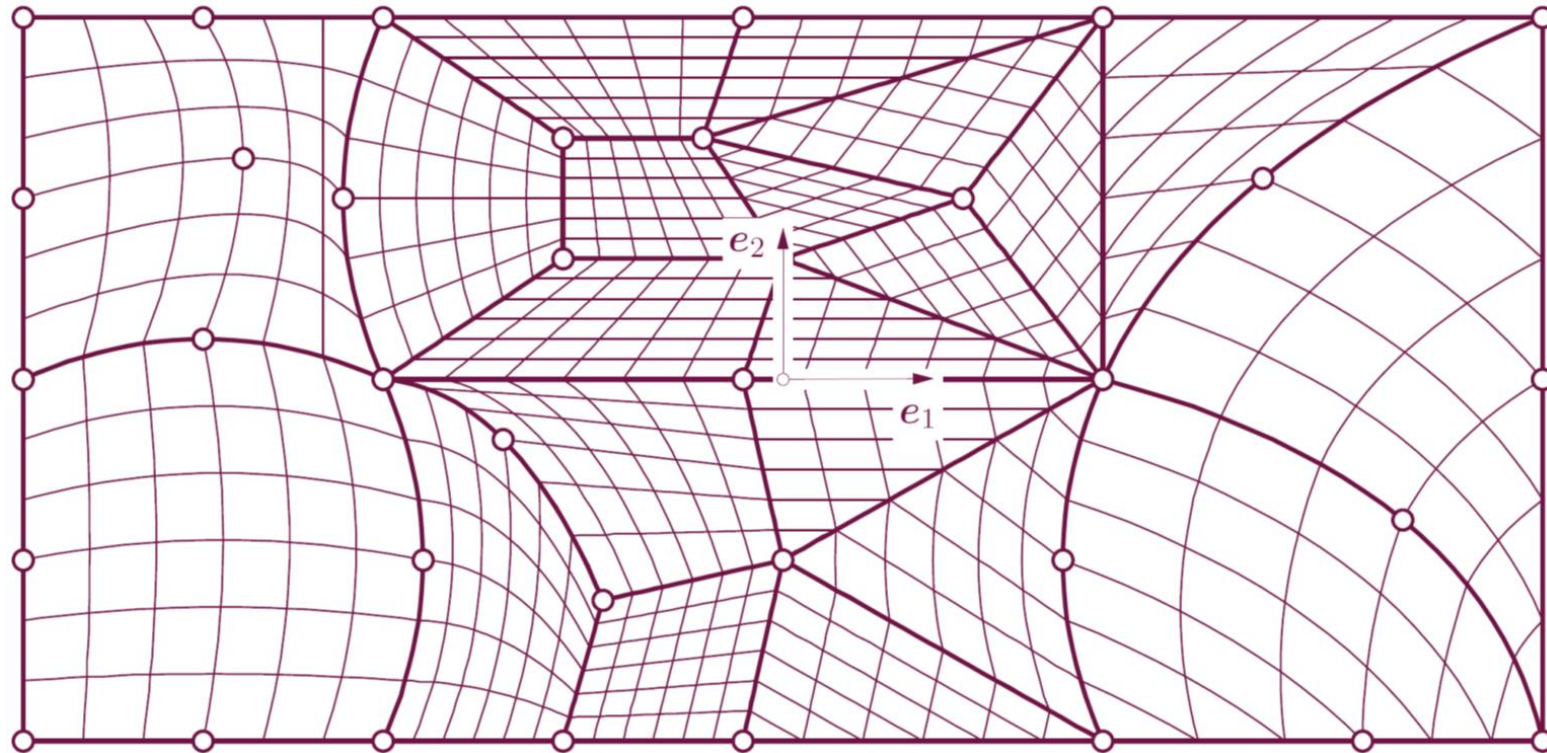
## 4.8 KONTINUITÄT ISOPARAMETRISCHER EBENER ELEMENTE

### Eigenschaften

Hier wird deutlich, dass die Ortsdiskretisierung zu keinen Überlappungen oder Spalten führt und demnach die Forderung nach  $C^0$ -Stetigkeit der Ortsbeschreibung erfüllt ist.

Da die Approximation des Verschiebungsfelds im isoparametrischen Elementkonzept analog zur

Ortsbeschreibung erfolgt, ist auch das Verschiebungsfeld  $C^0$ -stetig über die Elementgrenzen hinweg. An den Knicken der Isolinien an der Grenze benachbarter Dreiecks- oder Viereckselemente ist weiterhin auszumachen, dass keine Stetigkeit der ersten Ableitung der Verschiebungen besteht. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass das Verschiebungsfeld nicht  $C^1$ -kontinuierlich approximiert wird.



# 5. FINITE VOLUMENELEMENTE

## 5.1 EINFÜHRUNG



to be continued...

