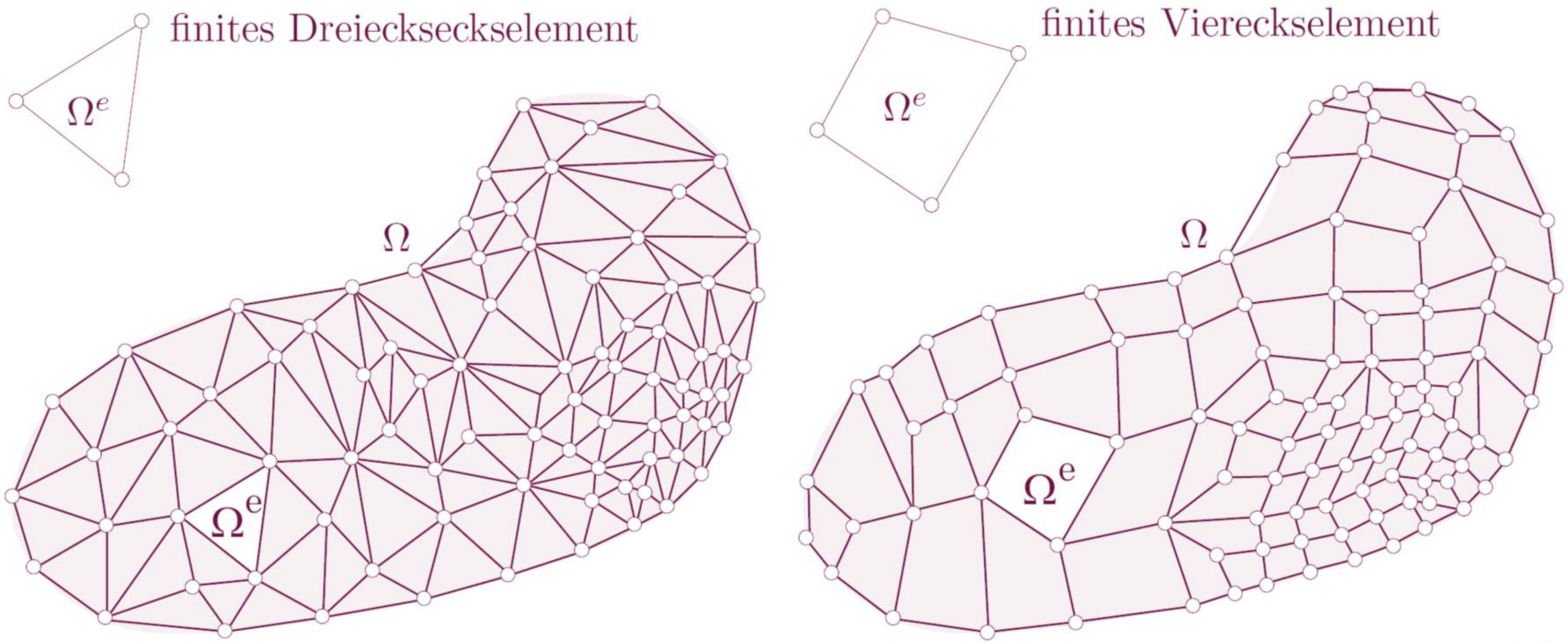
Elementierung und Diskretisierung

Im Gegensatz zum räumlichen Fachwerk, bei dem bereits vor der mathematischen Diskretisierung ein konstruktiv diskretes Tragwerk vorlag, soll nun ein zweidimensionales Kontinuum in finite Bereiche Ω^e unterteilt werden.

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega^e$$

Innerhalb dieser finiten Bereiche Ω^e oder finiten Elemente e werden die kontinuierlichen Feldgrößen mit Hilfe von Ansatzfunktionen und diskreten Knotengrößen approximiert.

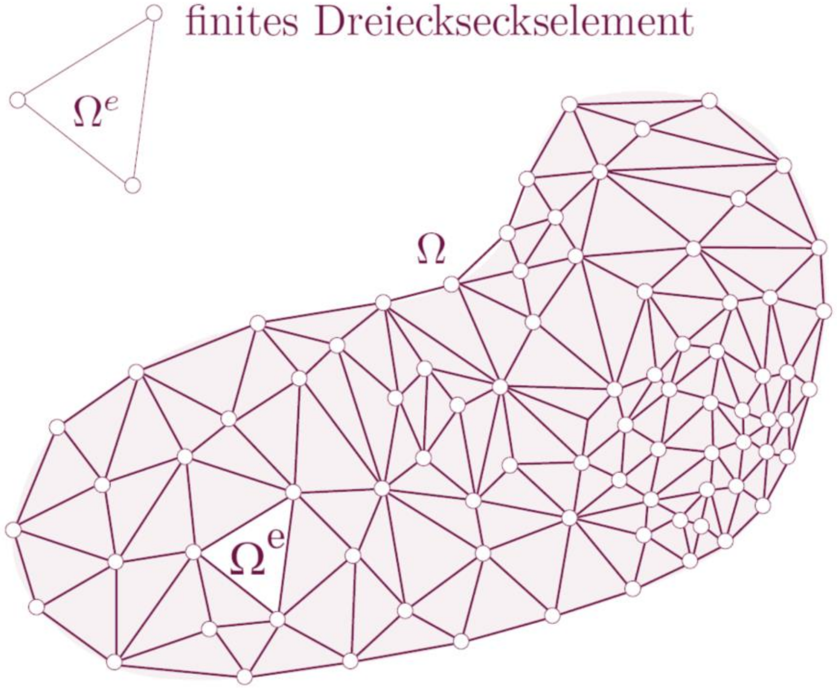


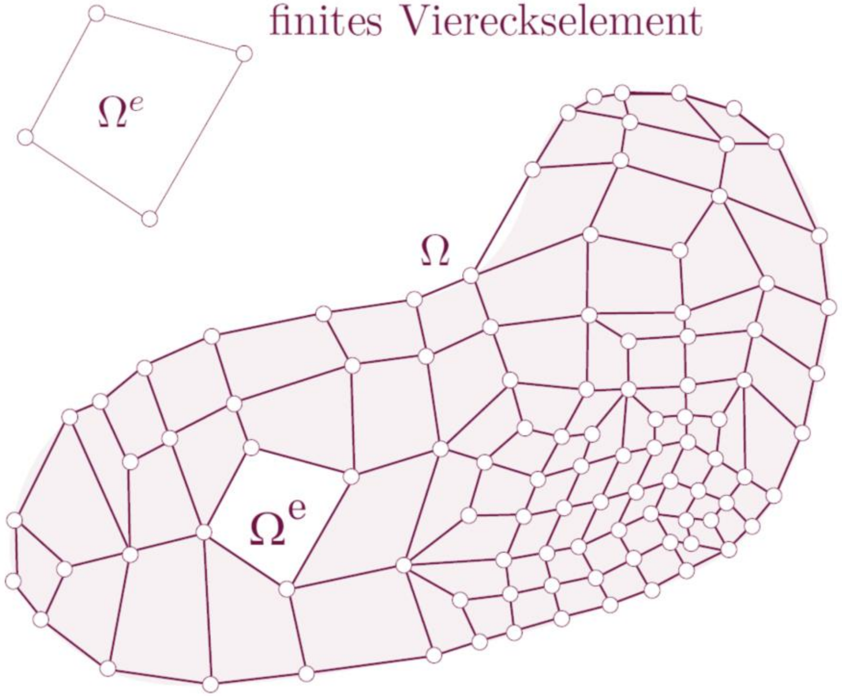
Elementierung und Diskretisierung

Die durch die Unterteilung in Bereiche e entstandene topologische Elementstruktur wird als Finite-Elemente Netz bezeichnet und der Vorgang deren Generierung ist die Vernetzung oder Netzgenerierung.

Grundlage der Entwicklung ebener finiter Elemente bildet die Forderung, dass das Prinzip der virtuellen Verschiebung für jedes finite Element e erfüllt werden muss.

$$\delta\psi^e_{dyn} + \delta\psi^e_{int} = \delta\psi^e_{ext}$$





Klassifizierung ebener Elemente

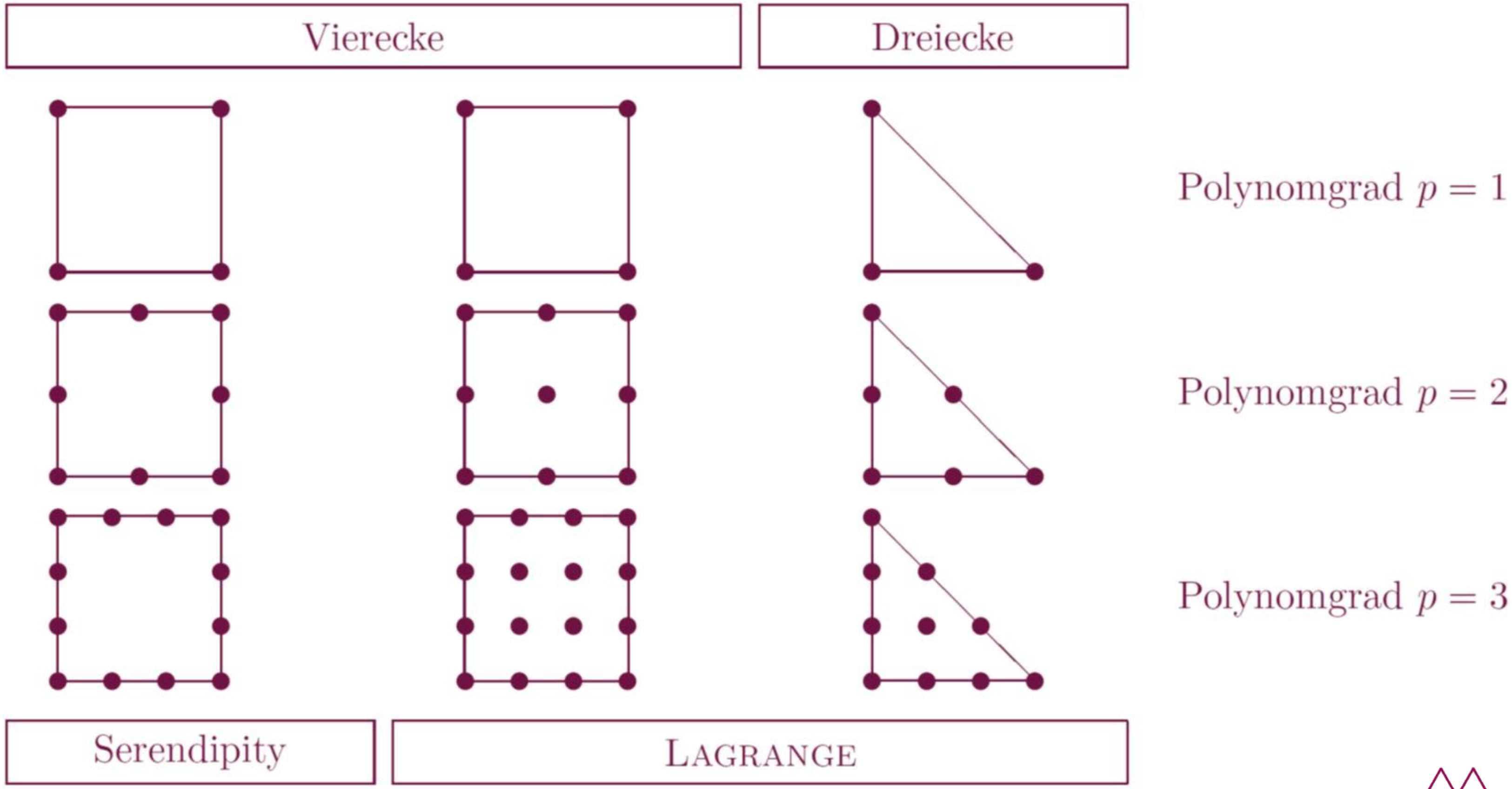
Ebene finite Elemente können nach ihrer Gestalt in

- Dreieckselemente
- und Viereckselemente,

nach dem Polynomgrad der Ansatzfunktion, sowie nach der Existenz innerer Knoten in

- Lagrange Elemente
- und Serendipity Elemente

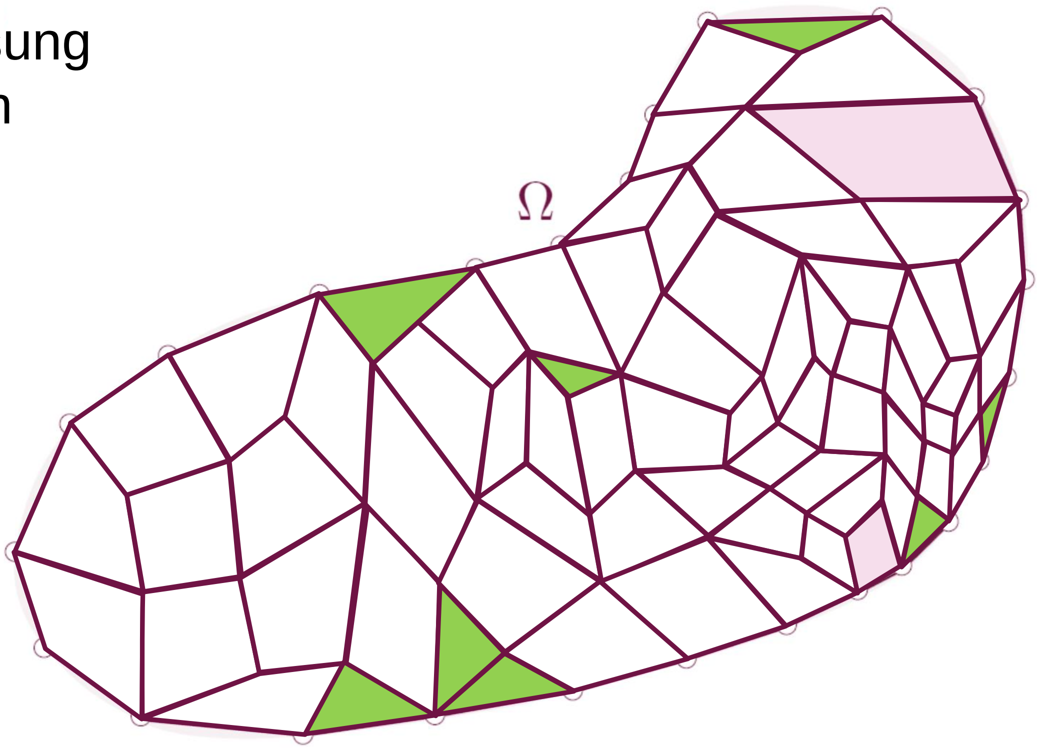
klassifiziert werden.



Klassifizierung ebener Elemente

Da mit Dreiecken beliebige ebene Geometrien problemlos diskretisiert werden können, erfreuen sich die Dreieckselemente trotz Nachteilen bei Betrachtung der Genauigkeit großer Beliebtheit.

Verecksnetze beliebiger Geometrien basieren auf der Vernetzung mit Dreiecken und der Zusammenfassung von jeweils zwei benachbarten Dreieckselementen zu einem Viereckselement.
Nach dieser Vernetzungsstrategie ist es möglich, dass mehrere singuläre Dreiecke bestehen bleiben, die nur sehr schwer durch Elementunterteilungsstrategien eliminiert werden können.



Ansatzfunktionen ebener Elemente

Im Rahmen der Entwicklung ebener finiter Elemente werden Ansatzfunktionen der veränderlichen natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 verwendet. Diese Ansatzfunktionen stellen Polynome im zweidimensionalen Raum der Form

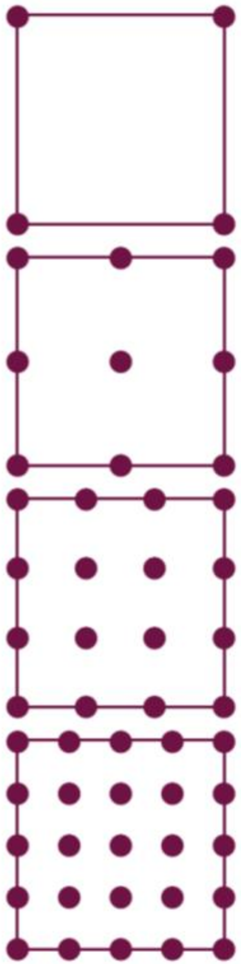
$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) \approx \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \alpha^{ij} \; (\xi_1)^i \; (\xi_2)^j$$

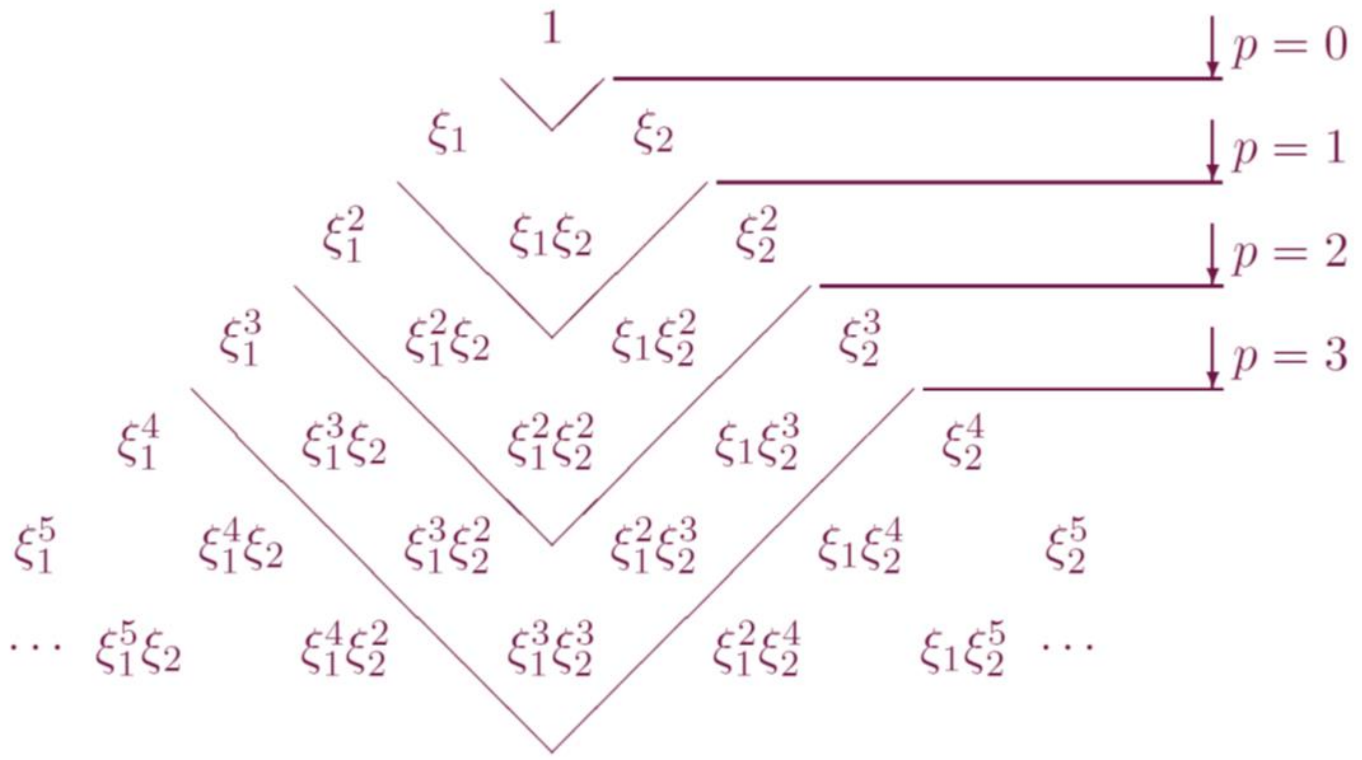
dar, wobei die zu einem Polynomgrad korrespondierenden, von den Koeffizienten α^{ij} befreiten, Terme vollständiger zweidimensionaler Polynome dem Pascale'schen Dreieck entnommen werden können.
Alternativ können die Ansatzfunktionen auch als vollständige Bipolynome definiert werden.

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) \approx \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2) = \left[\sum_{i=0}^{p} \alpha^i \; (\xi_1)^i \right] \left[\sum_{j=0}^{p} \alpha^j \; (\xi_2)^j \right]$$

Die Koeffizienten können analog zum 1D-Fall über die Vandermonde Matrix bestimmt werden.

Ansatzfunktionen ebener Elemente



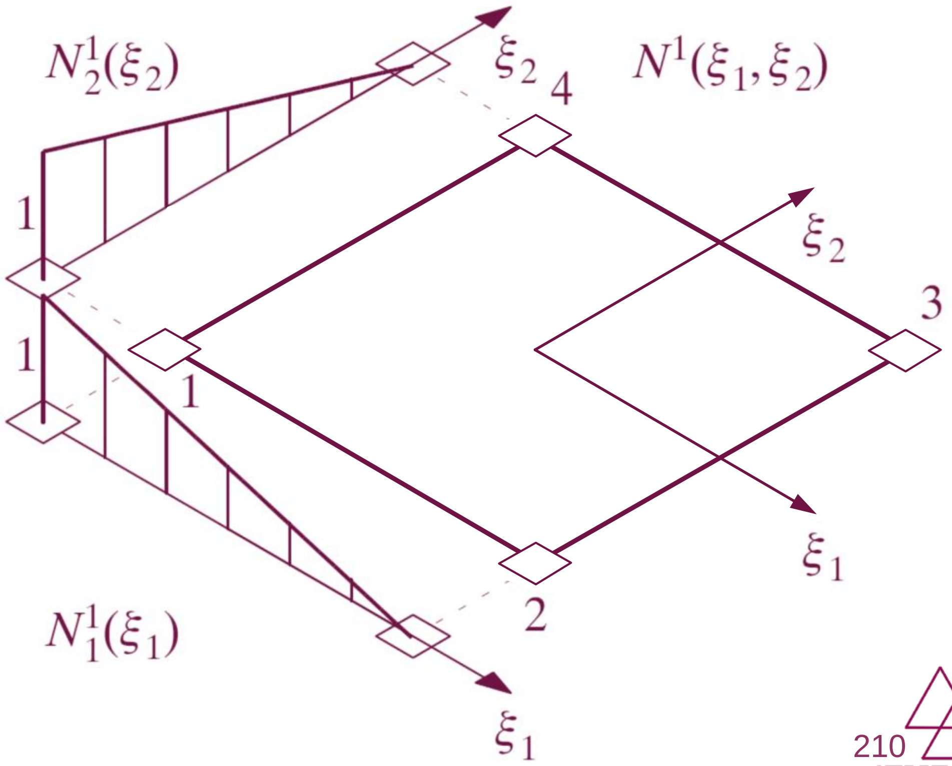


Ansatzfunktionen

Die Generierung der Ansatzfunktionen für bilineare Lagrange Elemente beruhen auf der gleichen Struktur, wie bei den eindimensionalen Stabelementen. Durch die Erweiterung des Koordinatenraums müssen die Ansatzfunktionen nun allerdings von ξ_1 und ξ_2 abhängig sein.

$$N^i(\boldsymbol{\xi}) = N^i(\xi_1, \xi_2) = N_1^k(\xi_1)\, N_2^l(\xi_2)$$

Dabei repräsentieren die Indizes k und l die assoziierten Knoten der eindimensionalen Ansätze.
Somit kann z.B. die Ansatzfunktion des Elementknotens eins durch Multiplikation der zu diesem Knoten korrespondierenden eindimensionalen Lagrange Polynome $N_1^1(\xi_1)$ und $N_2^1(\xi_2)$ entwickelt werden.

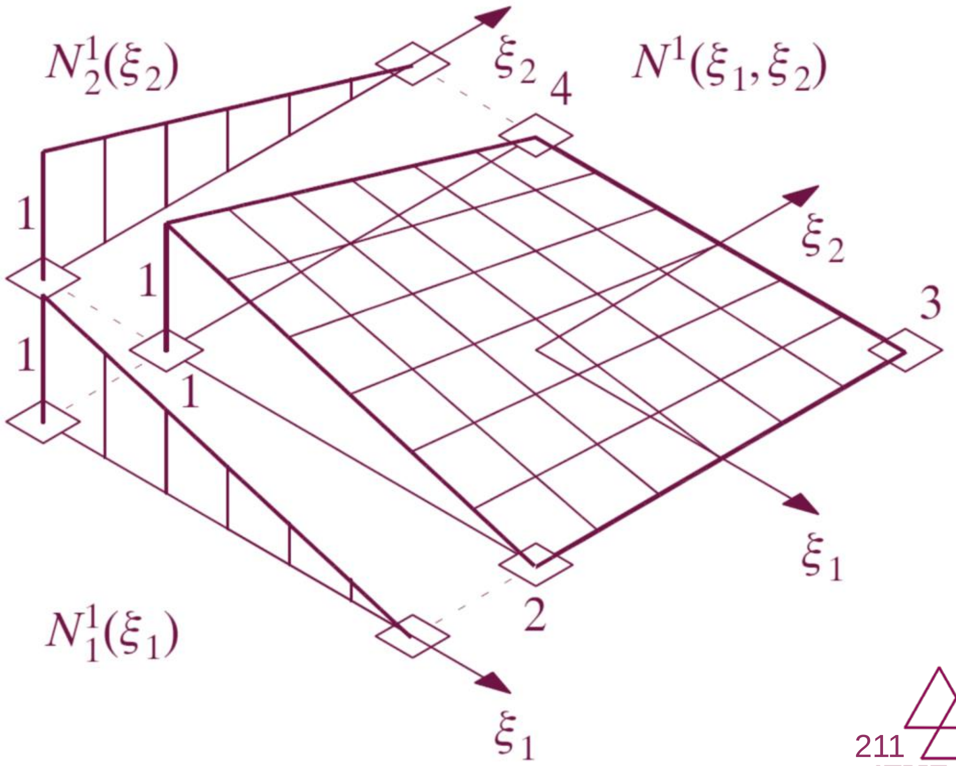


$$N_1^1(\xi_1) = \frac{1}{2}\,(1 - \xi_1)\;, \qquad N_2^1(\xi_2) = \frac{1}{2}\,(1 - \xi_2)$$

Ansatzfunktionen

Die Multiplikation von $N_1^1(\xi_1)$ und $N_2^1(\xi_2)$ ergibt die dargestellte Konstruktion der zum Knoten eins korrespondierenden Ansatzfunktion $N^1(\xi_1, \xi_2)$. Zur Angabe der Abhängigkeiten werden die natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 im Vektor $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \;\; \xi_2]^T$ zusammengefasst.

$$
\begin{aligned}
N^1(\xi_1, \xi_2) = N^1(\boldsymbol{\xi}) &= N_1^1(\xi_1)\, N_2^1(\xi_2) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\, \frac{1}{2}(1 - \xi_2) \\
&= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)\,(1 - \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1 - \xi_2 + \xi_1\, \xi_2)
\end{aligned}
$$



Wie der Gleichung zu entnehmen ist, enthält die Ansatzfunktion $N^1(\boldsymbol{\xi})$ konstante, lineare und bilineare Anteile. Im Pascal'schen Dreieck entsprechen diese Anteile dem durch $p = 1$ charakterisierten Quadrat..

Ansatzfunktionen

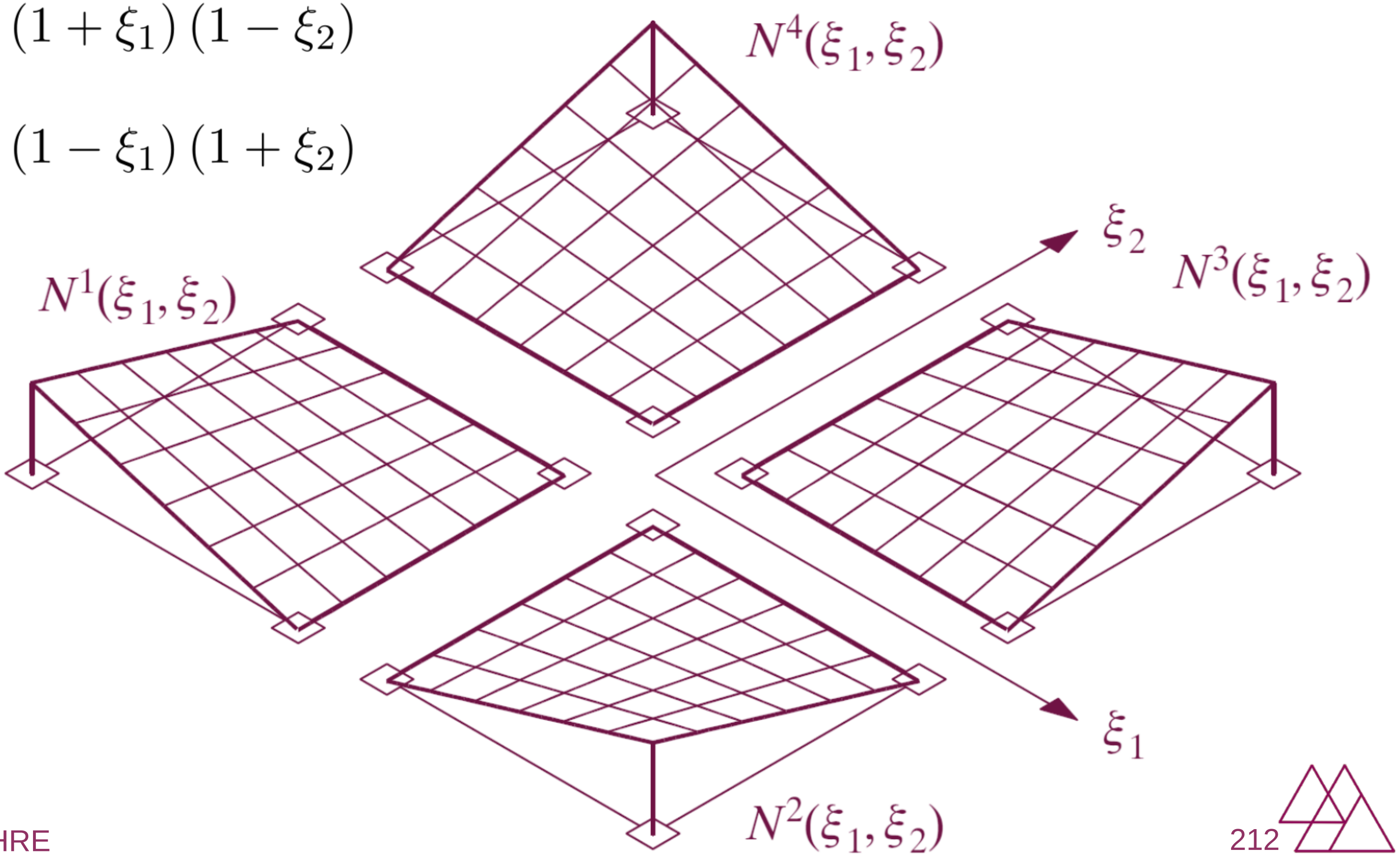
Die Ansatzfunktionen der Elementknoten zwei bis vier können in analoger Form generiert werden.

$$N^1(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(1-\xi_2) \qquad N^2(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(1-\xi_2)$$

$$N^3(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1+\xi_1)\,(1+\xi_2) \qquad N^4(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,(1-\xi_1)\,(1+\xi_2)$$

Allgemein können die zum Elementknoten i mit den natürlichen Koordinaten ξ_1^i und ξ_2^i korrespondierende Ansatzfunktion $N^i(\boldsymbol{\xi})$ folgendermaßen angegeben werden.

$$N^i(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\,\left(1-\xi_1^i\,\xi_1\right)\,\left(1-\xi_2^i\,\xi_2\right)$$



Ansatzfunktionen

Ferner werden zur Approximation der Verzerrungen und zur Generierung der Jacobi Matrix die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 benötigt.

$$\frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} = N^1_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = N^1_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}(1-\xi_1)$$

$$\frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} = N^2_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1-\xi_2) \qquad \frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = N^2_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}(1+\xi_1)$$

$$\frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} = N^3_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1+\xi_2) \qquad \frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = N^3_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)$$

$$\frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} = N^4_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4}(1+\xi_2) \qquad \frac{\partial N^1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} = N^4_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)$$

Für die Gleichungen kann ebenfalls eine generalisierte Form angegeben werden.

$$N^i_{;1}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\xi^i_1\left(1+\xi^i_2\,\xi_2\right) \qquad N^i_{;2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4}\xi^i_2\left(1+\xi^i_1\,\xi_1\right)$$

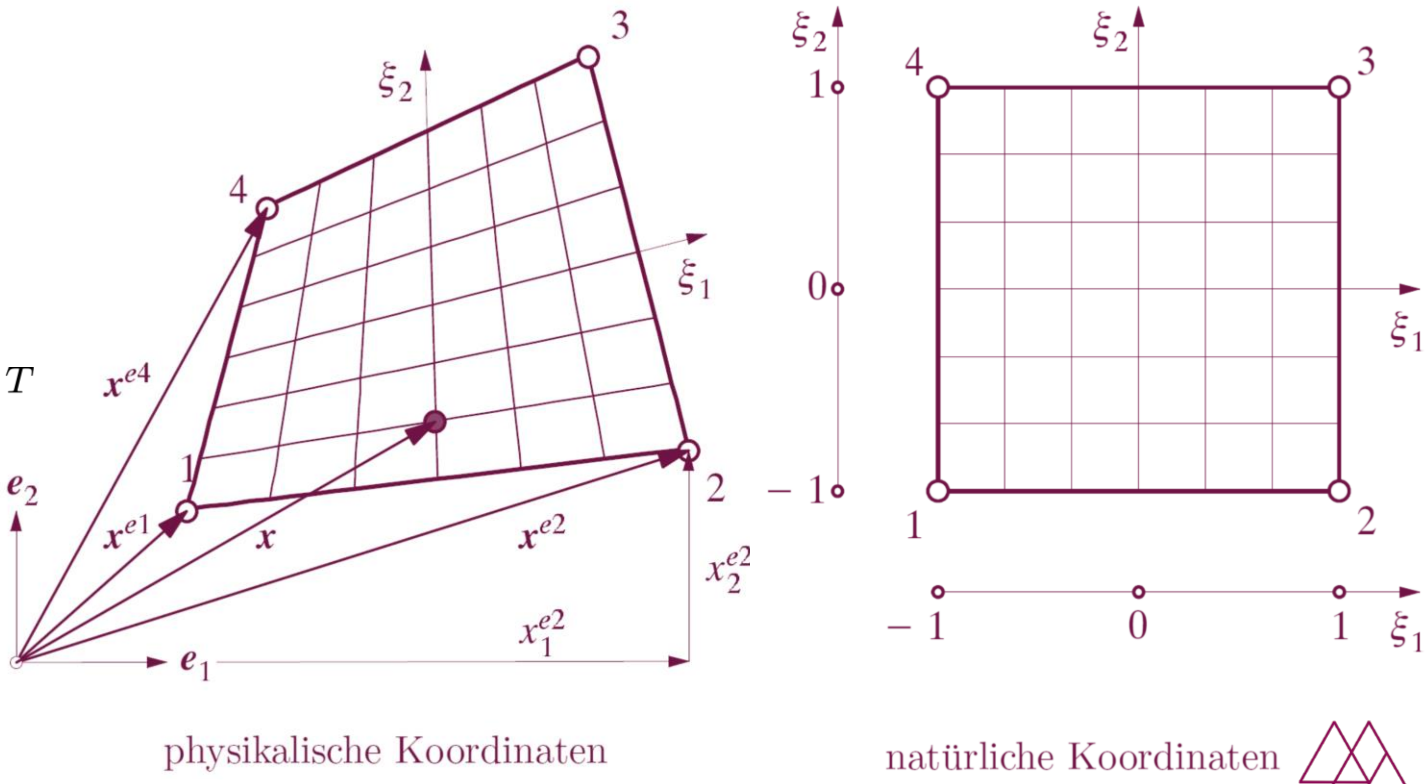
Geometriebeziehung

Die Geometrie des vierknotigen Lagrange Elements im physikalischen und im natürlichen Raum ist in der Abbildung dargestellt. Ein beliebiger materieller Punkt innerhalb des Vierecks ist durch seine physikalischen oder natürlichen Koordinaten eindeutig zu identifizieren.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Die Positionen der Eckknoten werden im Elementortsvektor zusammengefasst.

$$\mathbf{X}^e = \left[X_1^{e1}\ X_2^{e1}\ X_1^{e2}\ X_2^{e2}\ X_1^{e3}\ X_2^{e3}\ X_1^{e4}\ X_2^{e4}\right]^T = \left[\mathbf{X}^{e1\,T}\ \mathbf{X}^{e2\,T}\ \mathbf{X}^{e3\,T}\ \mathbf{X}^{e4\,T}\right]^T$$

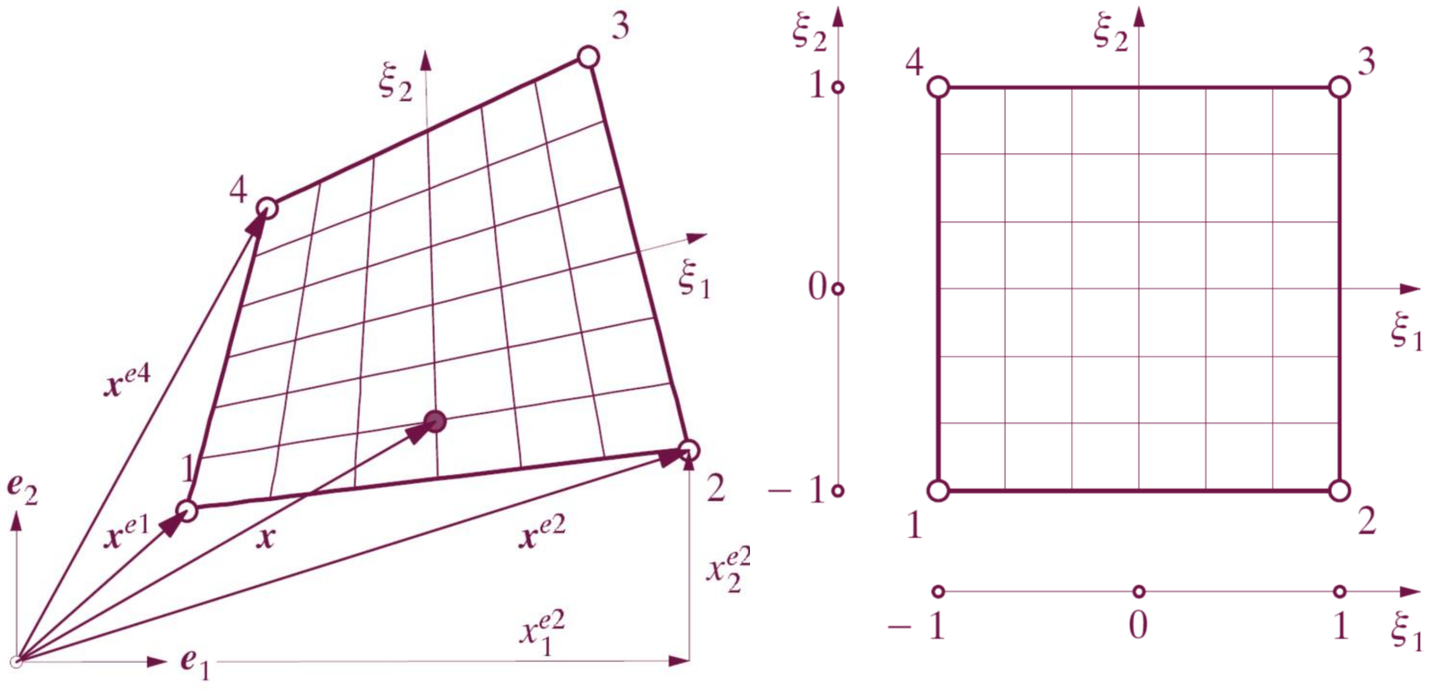


Geometriebeziehung

Im Rahmen der isoparametrischen Approximation von Geometrie und Elementvariablen wird der kontinuierliche Ortsvektor $\mathbf{X}$ mit Hilfe der Ansatzfunktionen $N^i(\boldsymbol{\xi})$ in natürlichen Koordinaten und der diskreten Positionen von Elementknoten $\mathbf{X}^{ei}$ beschrieben,

$$\mathbf{X}\left(\xi_1,\xi_2\right)=\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\approx\tilde{\mathbf{X}}\left(\boldsymbol{\xi}\right)=\sum_{i=1}^{NN}\mathbf{X}^{ei}\,N^i(\boldsymbol{\xi})$$

wobei NN die Anzahl der Elementknoten darstellt.



physikalische Koordinaten

natürliche Koordinaten

Geometriebeziehung

Alternativ kann der kontinuierliche Ortsvektor mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen $\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})$ und dem Elementortsvektor $\mathbf{X}^e$ approximiert werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{X}_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{X}_2(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi})} = \underbrace{\begin{bmatrix} N^1(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^2(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^3(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^4(\boldsymbol{\xi}) & 0 \\ 0 & N^1(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^2(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^3(\boldsymbol{\xi}) & 0 & N^4(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\boldsymbol{\xi})} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1^{e1} \\ X_2^{e1} \\ X_1^{e2} \\ X_2^{e2} \\ X_1^{e3} \\ X_2^{e3} \\ X_1^{e4} \\ X_2^{e4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}^e}$$

Somit kann die Abbildung von natürlichen auf physikalische Koordinaten allgemein durch die funktionale Abhängigkeit $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}(\xi)$ beschrieben werden.