

# Festigkeithypothesen

Zum Nachweis der Haltbarkeit einer Konstruktion muss immer gelten  $\sigma_{\text{vorhanden}} \leq \sigma_{\text{zulässig}}$ .

Außerdem müssen andere Versagensmöglichkeiten, wie zum Beispiel Knicken, ausgeschlossen werden.

Wegen der unterschiedlichen Beanspruchungsarten können in einem Bauteil 3 Normalspannungen und 3 Schubspannungen, also alle Komponenten der Spannungsmatrix, gleichzeitig auftreten. Dies kann mit der obigen Aussage nur durch die Einführung von Festigkeithypothesen, hier Spannungskriterien (Vergleichsspannungen), in Einklang gebracht werden. Hierzu ist wiederum meist die Kenntnis der Hauptspannungen erforderlich.

Diese Festigkeithypothesen kann man nicht beweisen. Ihre Nützlichkeit und Richtigkeit wird durch die Praxis belegt oder verworfen.

**Die wichtigsten (Spannungs)kriterien sind:**

Hauptnormalspannungshypothese (Lamé, Rankine)

$$\sigma_I^H \leq \sigma_{zul}^+ \quad \text{und} \quad \sigma_{III}^H \geq \sigma_{zul}^- \quad \text{anwendbar für spröde Materialien}$$

Hauptdehnungshypothese (Bach, de Saint Venant, Poncelet)

$$\varepsilon_I^H \leq \varepsilon_{zul}^+ \quad \text{und} \quad \varepsilon_{III}^H \geq \varepsilon_{zul}^- \quad \text{liefert zu niedrige Werte, hat sich nicht durchgesetzt}$$

Hauptschubspannungshypothese (Coulomb, Tresca, Mohr)

$$\tau_{\max} \leq \tau_{zul} \quad \text{für Werkstoffe mit ausgeprägter Streckgrenze und spröde Materialien bei Druck}$$

Energiehypothese (Beltrami)

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$w \leq w_{zul}$$

Gestaltänderungsenergiehypothese (Huber, von Mises, Hencky)

Die Energie lässt sich in einen Kompressions- und einen Gestaltänderungsanteil aufspalten. In den meisten Fällen wird das Versagen maßgeblich durch den Gestaltänderungsanteil beeinflusst. Der hydrostatische Spannungszustand bewirkt keine Zerstörung des Materials. Diese Hypothese hat sich weitestgehend durchgesetzt.

$$w_G = \frac{1}{12G} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right] \quad \text{für zähe Materialien}$$

$$w_G \leq w_{Gzul}$$

Um die Werte aus einem mehrachsigen Spannungszustand mit einem zulässigen Materialwert, wie er zum Beispiel in einem (einachsigen) Zugversuch gewonnen wird, zu vergleichen, werden **Vergleichsspannungen** herangezogen. Dabei muss immer die Bedingung  $\sigma_V \text{ vorhanden} \leq \sigma_{\text{zulässig}}$  erfüllt sein.

#### Hauptnormalspannungshypothese (Lamé)

$$\sigma_{V1} = \sigma_I^H$$

#### Hauptdehnungshypothese (Bach, de Saint Venant, Poncelet)

$$\sigma_{V2} = \sigma_I^H - \nu(\sigma_{II}^H + \sigma_{III}^H)$$

#### Hauptschubspannungshypothese (Coulomb, Tresca, Mohr)

$$\sigma_{V3} = 2\tau_{\max} = \sigma_I^H - \sigma_{III}^H$$

#### Gestaltänderungsenergiehypothese (Huber, von Mises, Hencky)

$$\begin{aligned} \sigma_{V4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I^H - \sigma_{II}^H)^2 + (\sigma_{II}^H - \sigma_{III}^H)^2 + (\sigma_I^H - \sigma_{III}^H)^2]} \end{aligned}$$

Bei **gleichzeitigem Auftreten von zwei Normalspannungen und einer Schubspannung im selben Querschnittspunkt** vereinfachen sich die Gleichungen für die Vergleichsspannungen zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{V1} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{V3} &= \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \sigma_{V4} &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

Bei **gleichzeitigem Auftreten von einer Normalspannung und einer Schubspannung im selben Querschnittspunkt** vereinfachen sich die Gleichungen für die Vergleichsspannungen zu:

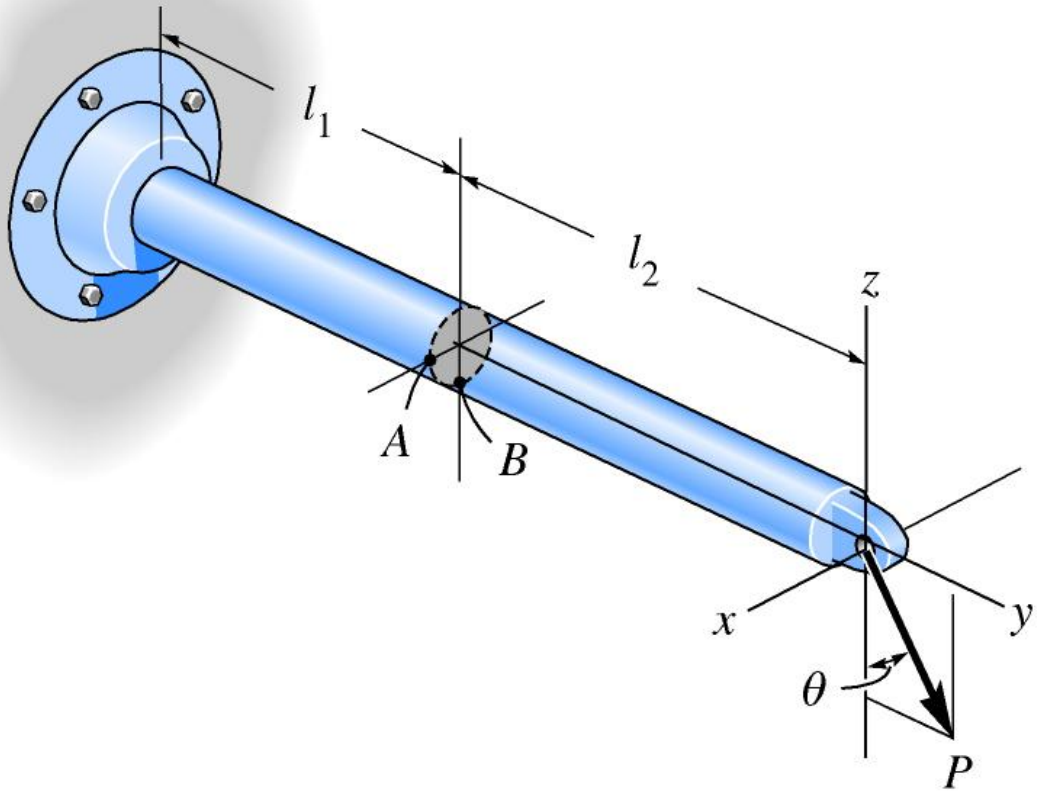
$$\begin{aligned} \sigma_{V1} &= \frac{\sigma}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \\ \sigma_{V2} &= \frac{\sigma}{2} \left[ (1-\nu) + (1+\nu)\sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ (1-\nu)\sigma + (1+\nu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right] \\ \sigma_{V3} &= \sigma \sqrt{1 + 4\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ \sigma_{V4} &= \sigma \sqrt{1 + 3\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \end{aligned}$$

Dies trifft zu bei den von uns verwendeten Modellen Stab, Balken (Spannungen  $\sigma$  in x-Richtung senkrecht zur Querschnittsfläche) in Kombination mit Querkraftschub und Torsion (Spannungen  $\tau$  in der y-z-Querschnittsebene).

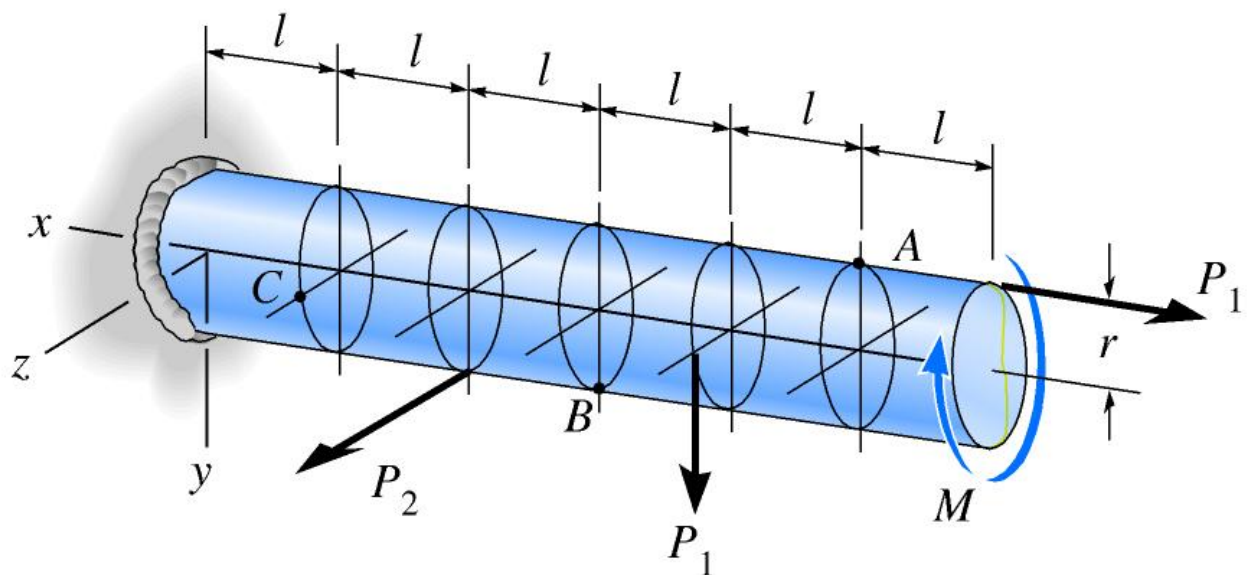
# Übungsaufgaben Festigkeitshypothesen, Vergleichsspannungen

Quelle: Hibbeler, Technische Mechanik 2, Pearson Studium, 2005

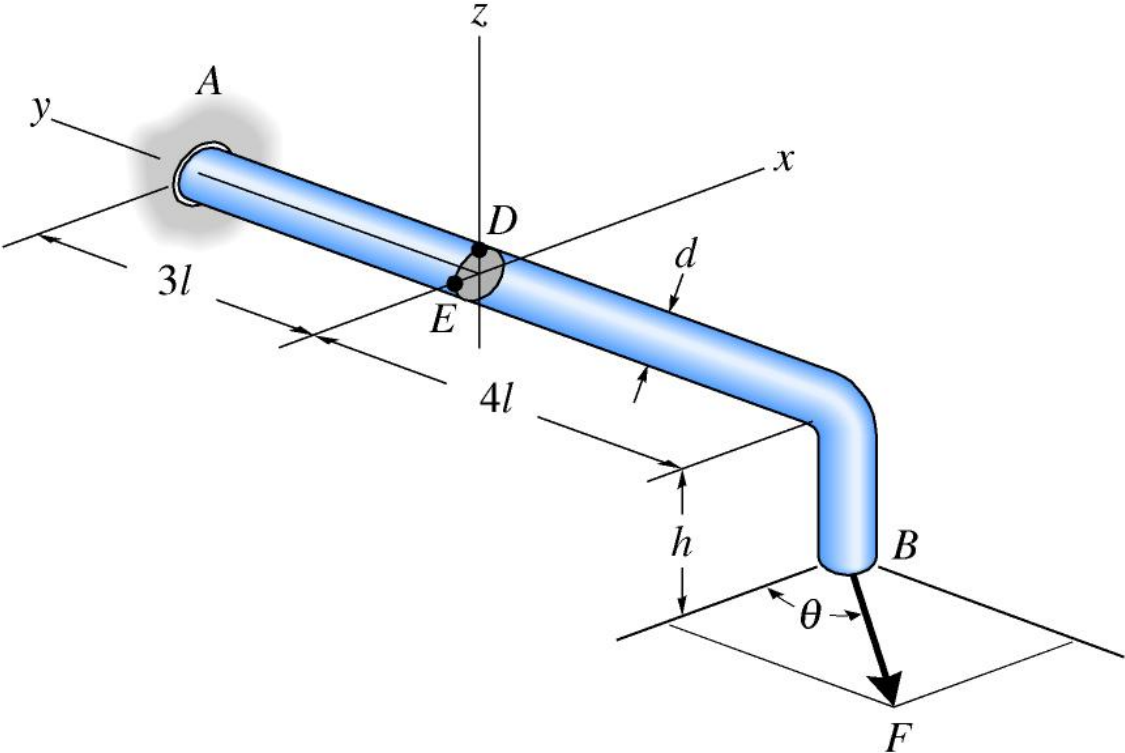
1. Belastung durch Längskraft, 1 Querkraft, Biegemoment um die x-Achse



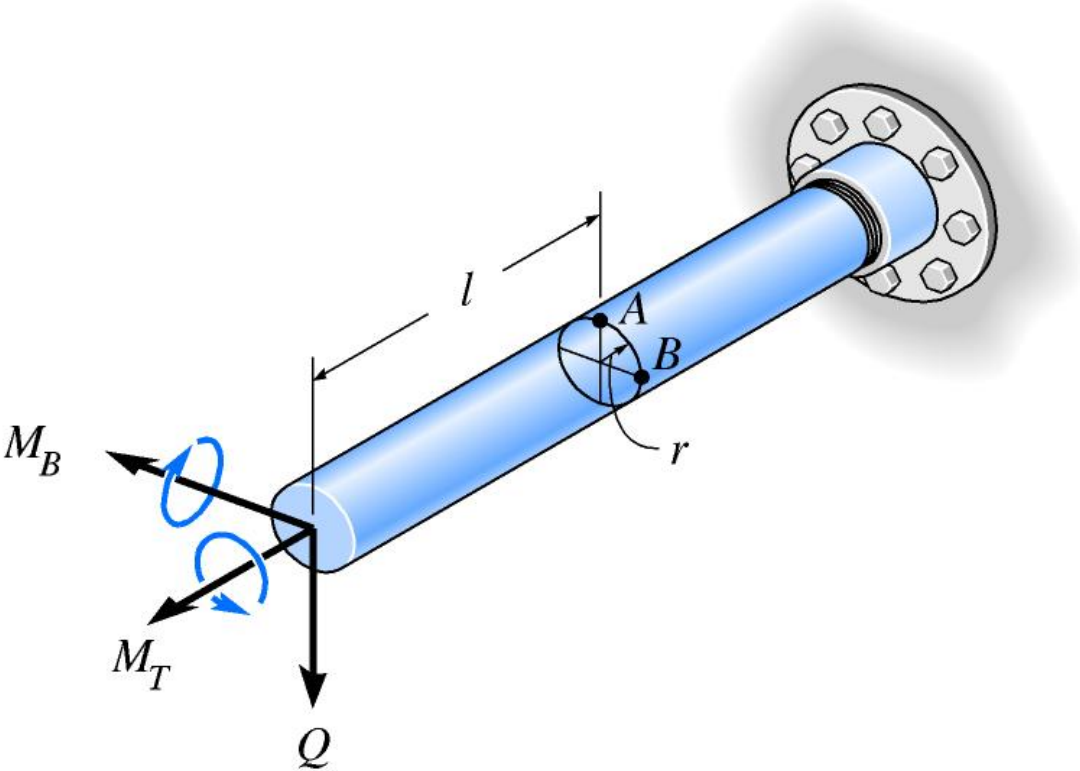
2. Belastung durch Längskraft, 2 Querkräfte, 3 Torsionsmomente, Biegemomente um die y- und um die z-Achse



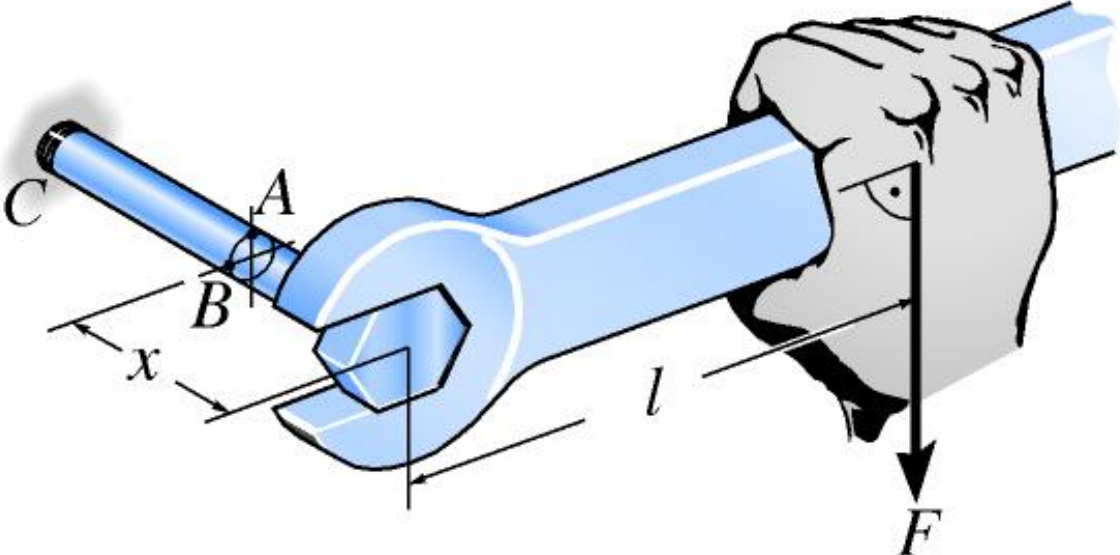
3. Belastung durch Längskraft, 1 Querkraft, Torsion, Biegemoment um die x- und z-Achse



4. Belastung durch 1 Querkraft, 1 Biegemoment, Torsionsmoment



5. Belastung durch 1 Querkraft, 1 Biegemoment, Torsionsmoment



## Lösung zur Aufgabe 2

Welche Belastungen treten auf?

- $P_1$  Längskraft und (2\*) Biegung um die z-Achse, Torsion
- $P_2$  Biegung um die y-Achse, Torsion
- $M$  Torsion
- $P_1$  Querkraftschub in y-Richtung
- $P_2$  Querkraftschub in z-Richtung

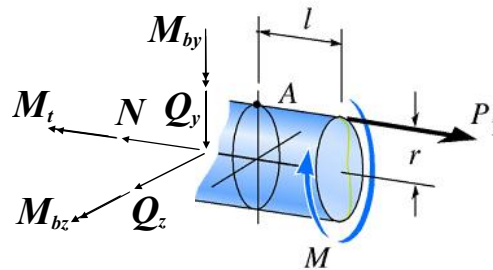
Dimensionierung / Spannungsnachweis

Wo ist der „gefährdete“ Querschnitt?

Es sind die Schnittgrößen und daraus die Spannungen zu ermitteln. Zur Schnittgrößenberechnung sind 3 Abschnitte erforderlich; wir beginnen am freien Ende des Trägers.

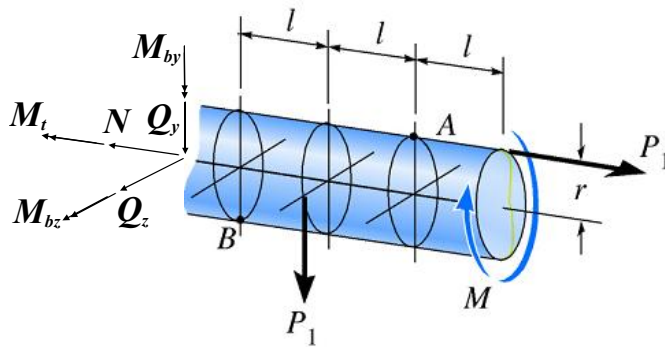
1. Abschnitt  $0 \leq x_1 \leq 2l$

$$\begin{aligned} N_1 &= P_1 \\ M_{t1} &= -M \\ M_{by1} &= 0 \\ Q_{y1} &= 0 \\ M_{bz1} &= P_1 r \\ Q_{z1} &= 0 \end{aligned}$$



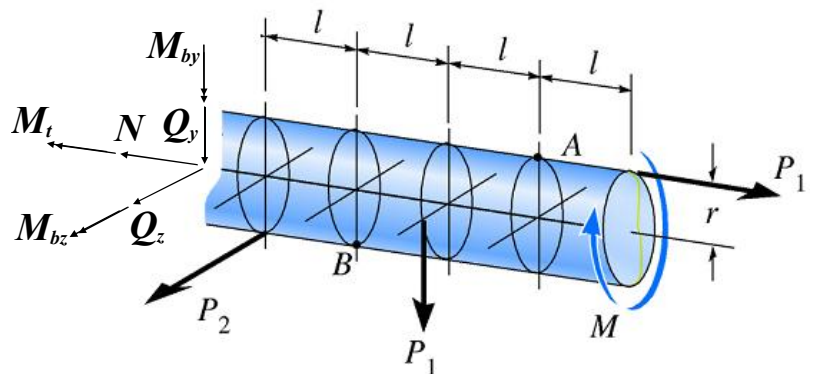
2. Abschnitt  $0 \leq x_2 \leq 2l$

$$\begin{aligned} N_2 &= P_1 \\ M_{t2} &= -M + P_1 r \\ M_{by2} &= 0 \\ Q_{y2} &= -P_1 \\ M_{bz2} &= P_1 r + P_1 x_2 \\ Q_{z2} &= 0 \end{aligned}$$



3. Abschnitt  $0 \leq x_3 \leq 2l$

$$\begin{aligned} N_3 &= P_1 \\ M_{t3} &= -M + P_1 r - P_2 r \\ M_{by3} &= -P_2 x_3 \\ Q_{y3} &= -P_1 \\ M_{bz3} &= P_1 r + P_1 (2l + x_3) \\ Q_{z3} &= -P_2 \end{aligned}$$



Die maximalen Beanspruchungen treten in der Einspannung ( $x_3=2l$ ) auf.

$$\begin{array}{lll}
N_3 = P_1 & M_{by3} = -P_2 2l & M_{bz3} = P_1 r + P_1 4l \\
M_{t3} = -M + P_1 r - P_2 r & Q_{y3} = -P_1 & Q_{z3} = -P_2
\end{array}$$

Hier wird  $P_1 r$  gegenüber  $P_1 4l$  als klein angesehen und vernachlässigt.

Die Dimensionierung erfolgt oftmals ohne Berücksichtigung von  $Q$  und  $N$ , da bei nicht gedruckenen Bauteilen deren Einfluss gering ist. Man verdeutliche sich auch die Spannungsverteilung infolge dieser Größen im Querschnitt.

Bei der Überlagerung der beiden Biegemomente ist bei Kreis(ring)querschnitten eine Besonderheit zu beachten: die Koordinaten  $y$  und  $z$  sind nicht unabhängig voneinander. Aufgrund der beliebigen Symmetrie des Kreisquerschnittes (jede Symmetrieachse ist auch eine Hauptträgheitsachse) ist die Bildung eines resultierenden Biegemomentes sinnvoll. Man hat dann gerade Biegung um eine andere Achse deren Lage sich über die Komponenten des resultierenden Momentes bestimmen lässt.

$$M_{b\ res} = \sqrt{M_{by}^2 + M_{bz}^2} = 2l\sqrt{P_2^2 + 4P_1^2}$$

### Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Nach unserer verwendeten Theorie haben wir nur eine Normalspannung ( $\sigma_x$ ) und eine Schubspannung ( $\tau_t$ ). Die Formel für die Vergleichsspannung reduziert sich damit auf:

$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Die Normalspannung ergibt sich aus:  $\sigma = \frac{M_{by}}{I_y} z - \frac{M_{bz}}{I_z} y + \frac{N}{A}$  (Den letzten Anteil wollen wir

hier vernachlässigen.)

Für den Kreisquerschnitt:

$$\sigma_b = \frac{M_{b\ res}}{I_y} r^*$$

$$\sigma_{b\ max} = \frac{M_{b\ res}}{I_y} r_{max} = \frac{M_{b\ res}}{\frac{\pi r^4}{4}} r = \frac{4M_{b\ res}}{\pi r^3}$$

Die Torsionsschubspannung ergibt sich aus:

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_t} r^*$$

$$\tau_{t\ max} = \frac{M_t}{I_t} r_{max} = \frac{M_t}{\frac{\pi r^4}{2}} r = \frac{2M_t}{\pi r^3}$$

Beide Spannungen sind maximal auf der Bauteiloberfläche.

(Die Querkraftschubspannungen sind in jeweiligen Richtungen maximal auf Höhe der Rotationsachse und Null auf dem Rand, dabei jedoch konstant über die jeweilige Breite. Die Zug/Druck-Spannung ist konstant über die Querschnittsfläche.)

Die Vergleichsspannung ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned}
\sigma_{V4} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4M_{b\ res}}{\pi r^3}\right)^2 + 3\left(\frac{2M_t}{\pi r^3}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\pi r^3} \sqrt{4M_{b\ res}^2 + 3M_t^2} \leq \sigma_{zul}
\end{aligned}$$

Die ermittelte Vergleichsspannung muss kleiner oder gleich der für das Material zulässigen Spannung sein.

Zur Veranschaulichung wählen wir folgende Zahlenwerte:

$$l = 100 \text{ mm}$$

$$M = 500 \text{ Nm} = 500000 \text{ Nmm}$$

$$P_1 = 1000 \text{ N}$$

$$P_2 = 2000 \text{ N}$$

$$r = 20 \text{ mm}$$

d.h. die Gesamtlänge beträgt 600 mm, der Durchmesser 40 mm. Es ist also ein schlanker Träger (Verhältnis  $L/D = 15$ )

Querschnittskennwerte:

$$A = \pi r^2 = 400\pi = 1257 \text{ mm}^2$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4} 20^4 = 125664 \text{ mm}^4$$

$$I_t = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2} 20^4 = 251327 \text{ mm}^4$$

Normalspannung

$$\sigma_{z/D} = \frac{N}{A} = \frac{1000 \text{ N}}{1257 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{0,8 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

$$M_{b \text{ res}} = 2 \cdot 100 \text{ mm} \cdot \sqrt{2000^2 + 4 \cdot 1000^2} \text{ N} = 565685 \text{ Nmm}$$

$$\sigma_b = \frac{M_{b \text{ res}}}{I_y} r = \frac{565685 \text{ Nmm} \cdot 20 \text{ mm}}{125664 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{90 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

Torsionsschubspannung

$$\tau_t = \frac{M_t}{I_t} r = \frac{(-5 \cdot 10^5 + 10^3 \cdot 20 - 2 \cdot 10^3 \cdot 20) \text{ Nmm} \cdot 20 \text{ mm}}{251327 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{-41,38 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

Vergleichsspannung

$$\underline{\underline{\sigma_{V4}}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{90^2 + 3 \cdot (-41,38)^2} \text{ Nmm}^{-2} = \underline{\underline{115,05 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

**Anmerkung:** Querkraftschubspannungen (quadratische Verteilung über  $y$  bzw.  $z$ ,  $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z b(y)}$ )

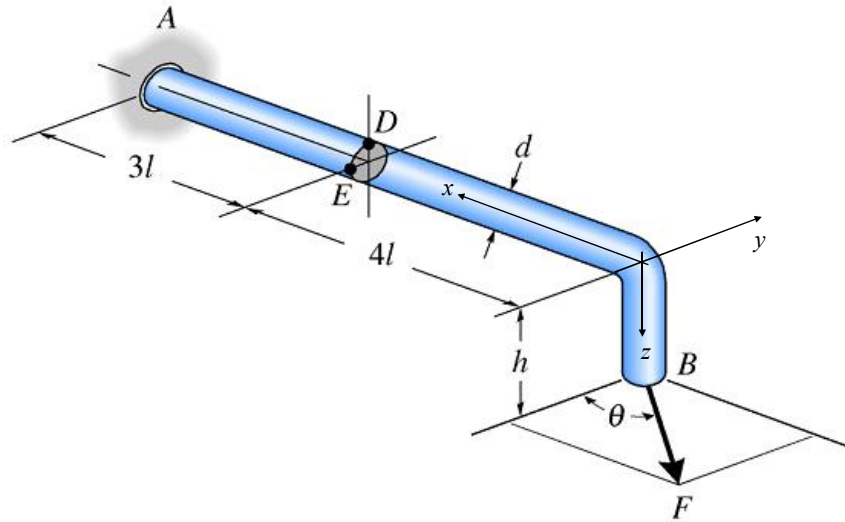
$$\tau_{xy \text{ max}} = \frac{4 Q_y}{3 A} = \frac{4}{3} \frac{1000 \text{ N}}{1257 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{1,06 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

$$\tau_{xz \text{ max}} = \frac{4 Q_z}{3 A} = \frac{4}{3} \frac{(-2000 \text{ N})}{1257 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{-2,12 \text{ Nmm}^{-2}}}$$

Die Querkraftschubspannungen sind wie die Zug/Druck-Spannungen hier von untergeordneter Bedeutung.



### Lösung zur Aufgabe 3



Schnittgrößen im Bereich  $0 \leq x \leq 7l$  (alle Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in Richtung der positiven Koordinatenrichtungen)

$$\begin{aligned} N &= F \sin(\theta) & M_t &= -F \cos(\theta) \cdot h \\ Q_y &= F \cos(\theta) & M_{by} &= F \sin(\theta) \cdot h \\ Q_z &= 0 & M_{bz} &= -F \cos(\theta) \cdot x \end{aligned}$$

Bis auf  $M_{bz}$  sind die Schnittgrößen konstant.

$M_{bz}$  ist maximal in der Einspannung  $M_{bz \max} = -7Fl \cos(\theta)$

Damit ist die Einspannung der „gefährdete Querschnitt“. Wir setzen für die weitere Rechnung  $h = 2l$ .

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{by}}{I_y} z - \frac{M_{bz}}{I_z} y$$

Besonderheit Kreisquerschnitt: jede Achse ist eine Hauptträgheitsachse,  $y$  und  $z$  sind über die Kreisgleichung gekoppelt

Es ergibt sich: 
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{b \text{ res}}}{I_y} r \quad M_{b \text{ res}}^2 = M_{by}^2 + M_{bz}^2 \quad 0 \leq r \leq \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned} M_{b \text{ res}}^2 &= (F \sin(\theta) \cdot 2l)^2 + (-F \cos(\theta) \cdot 7l)^2 \\ &= Fl \sqrt{4 \sin^2(\theta) + 49 \cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

Die Richtung des resultierenden Momentes lässt sich aus den Komponenten berechnen.

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{F \sin(\theta)}{\frac{\pi}{4} d^2} + \frac{Fl \sqrt{4 \sin^2(\theta) + 49 \cos^2(\theta)}}{\frac{\pi}{64} d^4} \frac{d}{2} \\ &= \frac{4F \sin(\theta)}{\pi d^2} + \frac{32Fl \sqrt{4 \sin^2(\theta) + 49 \cos^2(\theta)}}{\pi d^3} \end{aligned}$$

$$\tau_t = \frac{M_t r}{I_t}$$

$$\tau_{t \max} = \frac{M_t d}{I_t 2} = \frac{M_t}{W_t} \quad W_t = \frac{\pi}{16} d^3$$

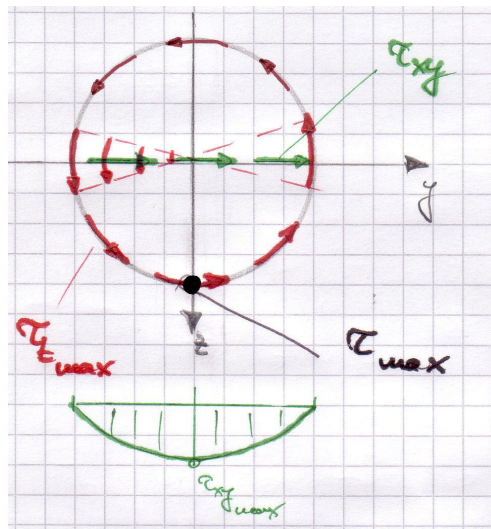
$$|\tau_{t \max}| = \frac{2Fl \cos(\theta)}{\frac{\pi}{16} d^3} = \frac{32Fl \cos(\theta)}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z(y)}{I_z b(y)}$$

Die Querkraftspannung ist quadratisch über  $y$  verteilt (siehe Vorlesung und Übung zum Querkraftschub); ihr Maximum beträgt:

$$|\tau_{xy \max}| = \frac{4 Q_y}{3 A} = \frac{4 F \cos(\theta)}{3 \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{16 F \cos(\theta)}{3 \pi d^2}$$

Dieser Wert addiert/subtrahiert sich zu  $\tau_{t \max}$  bei  $z = \pm \frac{d}{2}$ .



Falls  $\frac{d}{7l} \leq 10$  ist, handelt es sich um einen sogenannten „schlanken Träger“. Dann werden die Einflüsse aus Querkraftschub und Längskraft oftmals vernachlässigt.

#### Vergleichsspannungen nach verschiedenen Hypothesen

(alle berücksichtigten Spannungen an der selben Stelle  $x$ , hier in der Einspannung)

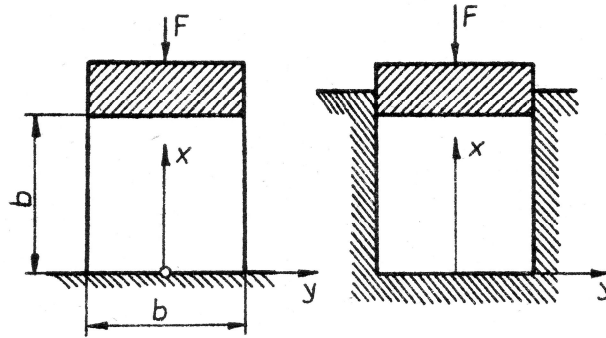
Hauptnormalspannungshypothese  $\sigma_{V1} = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$

Hauptdehnungshypothese  $\sigma_{V2} = \frac{1}{2} \left[ (1-\nu)\sigma + (1+\nu)\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]$

Hauptschubspannungshypothese  $\sigma_{V3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Gestaltänderungsenergiehypothese  $\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

**Beispiel:** Würfel mit Kantenlänge  $b$ , belastet mit senkrecht wirkender Druckkraft  $F$



- Fall a) Verschiebungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung sind möglich (linke Abb.)  
 Fall b) Verschiebungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung sind verhindert (rechte Abb.)

Geg.:  $F=1500\text{ N}$ ,  $\nu=0,4$

Ges.: Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese  
 Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Fall a)

$$\sigma_x = \frac{-F}{b^2} = -\frac{1500\text{ N}}{20^2\text{ mm}^2} = -3,75\text{ Nmm}^{-2}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Die Hauptspannungen sind dann

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = \sigma_x = -3,75\text{ Nmm}^{-2}$$

Fall b)

$$\sigma_x = \frac{-F}{b^2} = -\frac{1500\text{ N}}{20^2\text{ mm}^2} = -3,75\text{ Nmm}^{-2}$$

Die Lagerungsbedingungen führen auf

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

daraus folgt

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{-F}{b^2} \frac{\nu}{1-\nu} = -2,5\text{ Nmm}^{-2}$$

Die Hauptspannungen sind hier

$$\sigma_I = \sigma_{II} = -2,5\text{ Nmm}^{-2}$$

$$\sigma_{III} = -3,75\text{ Nmm}^{-2}$$

Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese

$$\text{Fall a)} \quad \sigma_{V3} = \sigma_I - \sigma_{III} = (0 + 3,75) \text{Nmm}^{-2} = 3,75 \text{Nmm}^{-2}$$

$$\text{Fall b)} \quad \sigma_{V3} = \sigma_I - \sigma_{III} = (-2,50 + 3,75) \text{Nmm}^{-2} = 1,25 \text{Nmm}^{-2}$$

Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

Fall a)

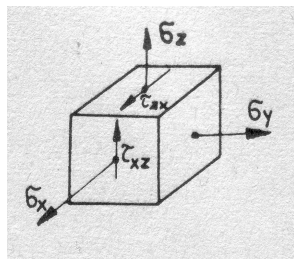
$$\begin{aligned} \sigma_{V4} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_I^H - \sigma_{II}^H)^2 + (\sigma_{II}^H - \sigma_{III}^H)^2 + (\sigma_I^H - \sigma_{III}^H)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 0^2 + (0 + 3,75)^2 + (0 + 3,75)^2 \right]} = 3,75 \text{Nmm}^{-2} \end{aligned}$$

Fall b)

$$\sigma_{V4} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 0^2 + (-2,50 + 3,75)^2 + (-2,50 + 3,75)^2 \right]} = 1,25 \text{Nmm}^{-2}$$

In diesem Beispiel stimmen die Vergleichsspannungen nach beiden Hypothesen überein, das muss nicht immer so sein.

**Beispiel:** allgemeiner Spannungszustand



$$\text{geg.: } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 50 \\ 0 & 100 & 0 \\ 50 & 0 & 80 \end{bmatrix}, \nu = 0,3$$

ges.: Vergleichsspannung nach verschiedenen Hypothesen

Die Hauptspannungen für diesen Spannungszustand berechnen sich aus der Lösung des Matrizenwertproblems

$$(\mathbf{S} - \sigma^H \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

zu

$$\sigma_I^H = 100 \text{Nmm}^{-2}$$

$$\sigma_{II}^H = 94,3 \text{Nmm}^{-2}$$

$$\sigma_{III}^H = -94,3 \text{Nmm}^{-2}$$

Die Berechnung der Vergleichsspannung ist nach verschiedenen Hypothesen möglich.

Vergleichsspannung nach der Hauptnormalspannungshypothese

$$\sigma_{V1} = \sigma_I^H = 100 \text{ Nmm}^{-2}$$

Vergleichsspannung nach der Hauptdehnungshypothese

$$\sigma_{V2} = \sigma_I^H - \nu(\sigma_{II}^H + \sigma_{III}^H) = 100 \text{ Nmm}^{-2}$$

Vergleichsspannung nach der Schubspannungshypothese

$$\sigma_{V3} = \sigma_I^H - \sigma_{III}^H = 194,3 \text{ Nmm}^{-2}$$

Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

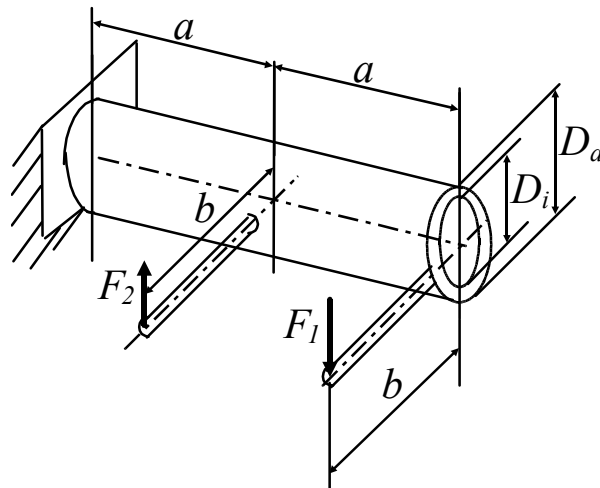
$$\begin{aligned} \sigma_{V4} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I^H - \sigma_{II}^H)^2 + (\sigma_{II}^H - \sigma_{III}^H)^2 + (\sigma_I^H - \sigma_{III}^H)^2]} = 191,6 \text{ Nmm}^{-2} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Aufgabe 4.10 der Aufgabensammlung Elastostatik (2004)

Geg.:  $a=400\text{mm}$ ,  $b=200\text{mm}$ ,  $D_a=50\text{mm}$ ,  $F_1=1000\text{N}$ ,  $F_2=4000\text{N}$ ,  $\sigma_{zul}=160 \text{ Nmm}^{-2}$

Ges.:  $D_i$ , dimensioniert nach der Gestaltänderungsenergiehypothese.

Hinweis: Es soll nur der Einfluss infolge Biegung und Torsion berücksichtigt werden.



**Schnittgrößen  $M_t$  und  $M_b$  im Rohr**

Biege- und Torsionsmoment erreichen an der Einspannstelle ihr Maximum.

$$|M_{b\max}| = |(2F_1 - F_2) \cdot a| = 80 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

$$|M_{t\max}| = |(F_1 - F_2) \cdot b| = 60 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

Spannungen auf der Rohroberfläche:  $\sigma_{\max} = \frac{|M_{b\max}| \cdot 32 \cdot D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)}$  und  $\tau_{\max} = \frac{|M_{t\max}| \cdot 16 \cdot D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)}$

Der erforderliche Innendurchmesser folgt aus der Beziehung

$$\sigma_{V4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_{\max} \sqrt{1 + 3 \left( \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} \right)^2} \leq \sigma_{zul}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zul} &\geq \sqrt{\left[ \frac{|M_{bmax}| \cdot 32 \cdot D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)} \right]^2 + 3 \left[ \frac{|M_{tmax}| \cdot 16 \cdot D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)} \right]^2} \frac{2^2}{2^2} \\ &\geq \frac{32 \cdot D_a}{\pi(D_a^4 - D_i^4)} \sqrt{M_{bmax}^2 + \frac{3}{4} M_{tmax}^2} \\ D_i^4 &\leq D_a^4 - \frac{32 \cdot D_a}{\sigma_{zul} \pi} \sqrt{M_{bmax}^2 + \frac{3}{4} M_{tmax}^2} \\ D_i &\leq 42,3 \text{ mm} \end{aligned}$$

Gewählt wird  $D_i = 42 \text{ mm}$

Mit dem gewählten Innendurchmesser wird die vorhandene Spannung nachgewiesen.

$$\sigma_{vorh} = 154,8 \frac{N}{\text{mm}^2} < \sigma_{zul} = 160 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\text{vorhandene Sicherheit } s = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{vorh}} = \frac{160}{154,8} = 1,033$$

Diese Sicherheit ist wahrscheinlich zu knapp, das heißt der Innendurchmesser muss entsprechend den Sicherheitsanforderungen weiter verkleinert werden.