13. Großübung

Numerische Integration ('Quadratur')

1 Newton-Cotes-Formeln

→ ersetze f(x) durch analytisch integrierbares Polynom s. Folie 10.9

1.1 Eigenschaften:

- äquidistante Stützstellen
  → 'einfache Berechnung der Gewichte/ der normierten Stützstellen'

- exakt für Polynome von Grad m bzw. $m+1$

1.2 Beispiel:

$$I = \int_1^3 \underbrace{xe^{-x^2}}_{f(x)} dx = ?$$

analytisch (zum Vergleich):

$$\underset{dy=2x\ dx}{\overset{y=x^2}{\rightarrow}} \int_1^9 xe^{-y} \frac{dy}{2x} = -\frac{1}{2}[e^{-y}]_1^9 = 0.183878015684$$

$$\Rightarrow c = 1, d = 3, h = d - c = 2$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1-2x^2)e^{-x^2} \\
f''(x) &= 2x(2x^2-3)e^{-x^2} \\
f'''(x) &= -2(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2} \\
f^{(4)}(x) &= 4x(4x^4-20x^2+15)e^{-x^2} \\
f^{(5)}(x) &= -4(8x^6-60x^4+90x^2-15)e^{-x^2}
\end{aligned}$$

1.2.1 Mittelpunktsregel: (m=0)

$$x_0 = c + h\xi_0 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$
$$I_0 = h \cdot 1 \cdot f(x_0) = 2 \cdot f(2) = 0.07326...$$

<u>Fehlerabschätzung:</u>

$$|I_0 - I| \leq \frac{1}{24} h^3 \|f''\|_\infty, \quad \text{wobei} \|f\|_\infty = \max_{x\in[c,d]} |f(x)|$$

$\max_{x\in[c,d]} |f''(x)| = ?$
$\rightarrow$ Extremwertsuche:

$$0 \stackrel{!}{=} f''(x) \stackrel{y=x^2}{\Rightarrow} 4y^2 - 12y + 3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}} = \begin{cases} 2.725 \\ 0.275 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1.651, \; x_{3,4} = \pm 0.5246 \notin [c,d]$$

$$|f''(x_{1,2})| = 0.5302$$

<u>Randwerte:</u>

$$|f''(c)| = 0.7358, \; |f''(d)| = 0.011$$
$$\Rightarrow \|f''\|_\infty = 0.7358..$$

$$\Rightarrow |I_0 - I| \leq \frac{8}{24} \cdot 0.7358.. = 0.2452...$$
$$\text{tatsächlicher Fehler: } |0.07326... - 0.1838...| = 0.1106...$$

1.2.2 Trapezregel: (m=1)

$$x_0 = c + h\xi_0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1$$
$$x_1 = c + h\xi_1 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$
$$I_1 = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) = 0.3682...$$

<u>Fehlerabschätzung:</u>

$$|I_1 - I| \leq \frac{1}{12} h^3 \|f''\|_\infty = \frac{8}{12} \cdot 0.7358... = 0.4905...$$
$$\text{tatsächlicher Fehler: } |0.3682... - 0.1838...| = 0.1843...$$

1.2.3 Simpson-Regel: (m=2)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= c + h\xi_0 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\
x_1 &= c + h\xi_1 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\
x_2 &= c + h\xi_2 = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\
I_2 &= \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{3}(f(1) + 4f(2) + f(3)) = 0.17159...
\end{aligned}
$$

Fehlerabschätzung:

$\max_{x\in[c,d]} |f^{(4)}(x)| = ?$
$\rightarrow$ Extremwertsuche:

$$
\begin{aligned}
&0 \overset{!}{=} f^{(5)}(x) \overset{y=x^2}{\Rightarrow} 8y^3 - 60y^2 + 90y - 15 \overset{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow x_{1,2} = \pm 2.350...,\ x_{3,4} = \pm 0.4360... \notin [c,d],\ x_{5,6} = \pm 1.335
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&|f^{(4)}(x_{1,2})| = 0.9969...,\ |f^{(4)}(x_{5,6})| = 7.133... \\
&|f^{(4)}(c)| = 1.1471...,\ |f^{(4)}(d) = 0.2354... \\
\Rightarrow &\|f^{(4)}\|_\infty = 7.133...
\end{aligned}
$$

$$
|I_2 - I| \leq \frac{1}{2880} h^5 \|f^{(4)}\|_\infty = \frac{32}{2880} 7.133... = 0.07926...
$$

tatsachlicher Fehler: $|0.17159... - 0.1838...| = 0.0122...$

2 Summierte Newton-Cotes-Formeln:

Newton-Cotes-Formeln: Wie Genauigkeit steigern bei großem Intervall $[a,b]$?

$\rightarrow$ Erhöhung des Polynomgrades nicht sinnvoll (Oszillationen)
$\rightarrow$ $[a,b]$ unterteilen in n gleichgroße Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$

$$
\begin{aligned}
I :=& \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx}_{=:I_k} \\
&\approx \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_{m,k}(x)dx}_{=:I_{m,k}}}_{=:I_m^n} = h \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot f(t_{k-1} + h \cdot \xi_j) \\
&\text{mit } h := \frac{b-a}{n},\ t_k = a + k \cdot h
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die ursprüngliche symbolische Notation $\int I_m$ in der Großübung führte zu häufigen Rückfragen und wurde daher durch I_m^n ersetzt ($\int I_m$ ist hier symbolische Schreibweise für summierte Formel, kein exaktes oder approximiertes Integral von I_m).

2.1 Beispiele: Durchführung der Summation

2.1.1 Summierte Mittelpunktsregel: (m=0)

$$I_0 = h\sum_{k=1}^{n} f(\frac{t_{k-1}+t_k}{2} = h\sum_{k=1}^{n} f(a+(k-\frac{1}{2})h)$$

<u>Fehler:</u>

$$|I_0 - I| \leq \frac{n}{24}h^3\|f^{(2)}\|_\infty = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\|f^{(2)}\|_\infty$$

Hinweis: $\|f^{(2)}\|_\infty$ wird im Intervall $[a,b]$ bestimmt.

2.1.2 Summierte Trapezregel: (m=1)

$$I_1 = h\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(t_{k-1}) + f(t_k)] = h\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

<u>Fehler:</u>

$$|I_1 - I| \leq \frac{n}{12}h^3\|f^{(2)}\|_\infty = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\|f^{(2)}\|_\infty$$

Hinweis: $\|f^{(2)}\|_\infty$ wird im Intervall $[a,b]$ bestimmt.

2.1.3 Summierte Simpson-Regel: (m=2)

$$\begin{aligned} I_2 &= h\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\left[f(t_{k-1} + 4f(t_{k-1}+\frac{h}{2}) + f(t_k)\right] \\ &= \frac{h}{6}\left[f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[2f(a+kh) + 4f(a+(k+\frac{1}{2})h)\right] + f(b)\right] \end{aligned}$$

<u>Fehler:</u>

$$|I_2 - I| \leq \frac{n}{2880}h^5\|f^{(4)}\|_\infty = \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\|f^{(4)}\|_\infty$$

Hinweis: $\|f^{(4)}\|_\infty$ wird im Intervall $[a,b]$ bestimmt.

2.2 Beispiele: Anwendung der summierten Newton-Cotes-Formeln

$$I = \int_1^3 x e^{-x^2} dx \Rightarrow a = 1,\ b = 3,\ \epsilon = 10^{-2},\ n = ?,\ I_m^n = ?$$

2.2.1 Summierte Mittelpunktsregel: (m=0)

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f^{(2)}\|_\infty \overset{!}{\leq} \epsilon \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{24\epsilon} \|f^{(2)}\|_\infty} = 4.1...$$

$$\Rightarrow n \overset{\text{aufrunden!}}{=} 5 \text{ reicht sicher } \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{5}$$

$$I_0^5 = h \left[f(\frac{6}{5}) + f(\frac{8}{5}) + f(\frac{10}{5}) + f(\frac{12}{5}) + f(\frac{14}{5}) \right] = 0.18131...$$

$$|I_0^5 - I| = 2.55... \cdot 10^{-3} < 10^{-2}$$

2.2.2 Summierte Trapezregel:(m=1)

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f^{(2)}\|_\infty \overset{!}{\leq} \epsilon \Leftrightarrow n \overset{!}{\geq} \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\epsilon} \|f^{(2)}\|_\infty} = 7.003...$$

$$\Rightarrow n = 8 \text{ reicht sicher aus } \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4}$$

$$I_1^8 = h \left[\frac{f(1)}{2} + f(\frac{5}{4}) + f(\frac{6}{4}) + ... + f(\frac{11}{4}) + f(3) \right] = 0.1858...$$

$$|I_1^8 - I| = 1.92... \cdot 10^{-3} < 10^{-2}$$

2.2.3 Summierte Simpson-Regel: (m=2)

$$\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|f^{(4)}\|_\infty \overset{!}{\leq} \epsilon \Leftrightarrow n \overset{!}{\geq} \left(\frac{(b-a)^5}{2880\epsilon} \|f^{(4)}\|_\infty \right)^{\frac{1}{4}} = 1.67...$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ reicht sicher aus } \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = 1$$

$$I_2^2 = \frac{h}{6} \left[f(1) + 4f(\frac{3}{2}) + 2f(2) + +4f(\frac{5}{2}) + f(3) \right] = 0.1822...$$

$$|I_2^2 - I| = 1.67... \cdot 10^{-3} < 10^{-2}$$

3 Gauß-Quadratur

3.1 Problem Newton-Cotes:

Für großes m: Gewichte c_j mit wechselnden Vorzeichen $\rightarrow$ Auslöschung.

3.2 Gauß-Quadratur

- positive Gewichte w_i , $i = 0, ..., m$
- Stützstellen $x_0, ...x_m$ nicht mehr äquidistant

$\Rightarrow$ $2m + 2$ Freiheitsgrade verfügbar

Die $2m + 2$ Freiheitsgrade werden verwendet um ein Polynom vom Grad $2m + 1$ (eindeutig bestimmt durch $2m + 2$-Werte) exakt wiederzugeben.

$\rightarrow$ höherer Exaktheitsgrad als Newton-Cotes: $2m + 1 \leftrightarrow m$ bzw. $m + 1$

4 Integraltransformationen

<u>Geg.</u>: Integrationsvorschrift auf Intervall $[c, d]$

<u>Ges.:</u> Wert des Integrals auf $[a, b]$: $\int\limits_a^b f(x)dx =?$

<u>Transformation:</u>

$$
\begin{aligned}
t \in [c, d] &\overset{x(t)}{\rightarrow} x \in [a, b] \\
x(t) &: \text{ affine (längentreue) Abbildung} \\
x(t) &: \frac{t-c}{d-c}b + \frac{b-t}{d-c}a \\
\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{a=x(c)}^{b=x(d)} f(x)dx &= \int\limits_c^d \underbrace{f(x(t))}_{g(t)} x'(t)dt \\
&= \underbrace{x'(t)}_{\text{hier: const.}} \int\limits_c^d g(t)dt
\end{aligned}
$$

Für ein Beispiel sei auf die Aufgabe 5 aus der Klausur Herbst 2008 verwiesen.