Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Hausübung 9

VF-1: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die lokale Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	
3.	Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle eines Gleichungssystems $f(x) = 0$ kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	
5.	Es sei $\Phi(x) = \frac{x\,(x-1)^2}{4} + 1$. Φ hat in $[0, 1.5]$ genau einen Fixpunkt. Gib die Konvergenzordnung p an, mit der das Fixpunktverfahren hier für einen beliebigen Startwert $x_0 \in [0, 1.5]$ konvergiert.	
6.	Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(M) \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.	
7.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.	
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Gib die lokale Konvergenzordnung an, mit der die Newton Methode für diesen Fall mindestens konvergiert.	

VF-2: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x. Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Für das Intervall $[a, b]$ gilt, dass $a < x^* < b$, wobei x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.		
1.	Es seien $n = 1$, $\Phi(x) := \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$, und $x^* = 0$. Die Fixpunktiteration konvergiert für alle Startwerte x_0 mit $\|x_0\| \leq \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein.	
2.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	
3.	Falls $\|\Phi'(x^*)\|_\infty = 2$ und $\|\Phi'(x^*)\|_2 = 0.6$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := e^{-x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0.1, 2]$ erfüllt.	
5.	Es sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimme $\Phi'(x^*)$.	
6.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' nicht.	
7.	Es sei f konvex auf $[a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	
8.	Das Sekanten-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.	
10.	Es seien x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Gib den Wert für p so an, dass $\|x^* - x_k\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|^p$ für k hinreichend groß gilt.	