

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS19

## Verständnisfragen – Übung 8

<b>VF-1:</b> Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^*$ so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ , $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.	
2.	Falls $\ \Phi'(x^*)\ _2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\ x_0 - x^*\ _2$ hinreichend klein.	
3.	$\ \Phi'(x^*)\ _2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ existiert.	
4.	$\Phi(x) = 2e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ .	
5.	$\Phi(x) = x^5$ hat genau einen Fixpunkt in $[-0.5, 0.5]$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [-0.5, 0.5]$ mit der genauen Konvergenzordnung $p$ . Gib $p$ an.	

<b>VF-2:</b> Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion $\Phi$ mit Norm $\ \cdot\ $ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von $\Phi$ .	
2.	Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$ .	
3.	Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für $\Phi$ höchstens mit Konvergenzordnung 1.	
4.	Die Funktion $\Phi$ ist auf $D$ stetig differenzierbar.	
5.	$\Phi(x) = e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ . Gib für das Intervall $[0, 1]$ die bestmögliche Kontraktionszahl $L$ an.	

<b>VF-3:</b> Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es seien $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Iterationsvorschrift und $x^*$ ein Fixpunkt, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$ . Dann gilt: $ \Phi'(x^*)  < 1$ .	
2.	Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ , die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Außerdem gilt $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in [a, b]$ mit $x^* \neq 0$ . Dann konvergiert das Newtonverfahren, angewendet auf $\Phi(x)$ immer für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$ gegen $x^*$ .	
3.	Die Konvergenzordnung des Sekanten-Verfahrens ist ungefähr 1.6.	
4.	Das Newton-Verfahren ist global konvergent mit Konvergenzordnung 1 und hat lokal die Konvergenzordnung 2.	
5.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ . Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Annäherung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwert $x_0 = 1$ . Berechne $x_1$ .	

<b>VF-4:</b> Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
2.	Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
4.	Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
5.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ . Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annäherung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwerten $x_0 = 0, x_1 = 1$ . Berechne $x_2$ .	