Berechenbarkeitstheorie

Prof. Dr. Christoph Walther / Nathan Wasser

Technische Universität Darmstadt — Sommersemester 2011

Übung 3

Aufgabe 3.1 (universelle Funktionen und Berechenbarkeit)

Das Konzept einer universellen Funktion aus Definition 6.1 kann wie folgt verallgemeinert werden:

> *Gegeben sei eine Familie $\mathcal{F}$ von einstelligen arithmetischen Funktionen. Wir nennen eine Funktion $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ eine* universelle Funktion für $\mathcal{F}$ *genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*
>
> *(i) Für jedes $e \in \mathbb{N}$ gilt $f_e \in \mathcal{F}$, wobei $f_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ definiert ist durch $f_e(n) = F(\pi^2(e, n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
>
> *(ii) Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}$ existiert eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $f = f_e$.*

1. Geben Sie eine universelle Funktion F für die Familie $\mathcal{F} = \{x, x^3, x^5, x^7, x^9, \ldots\}$ an und zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Auswahl. (Mit x^i meinen wir hier die arithmetische Funktion, die ein $x \in \mathbb{N}$ auf x^i abbildet.)

2. Existiert für die in 1. beschriebene Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen nur eine einzige universelle Funktion?

3. Zeigen Sie, dass jede endliche nicht-leere Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen eine universelle Funktion F besitzt.

4. Sei $\mathcal{F}$ nun eine Familie von *totalen* Funktionen, die eine universelle Funktion F besitzt. Beweisen Sie, dass es dann auch eine totale Funktion gibt, die nicht zu $\mathcal{F}$ gehört.

5. Zeigen Sie, dass die Familie aller totalen und berechenbaren Funktionen keine berechenbare universelle Funktion besitzt.

6. Beweisen Sie, dass es eine unendliche Familie $\mathcal{F}$ totaler und berechenbarer Funktionen gibt, welche eine berechenbare universelle Funktion besitzt. Geben Sie hierzu eine geeignete Familie $\mathcal{F}$ und eine entsprechende universelle Funktion an.

Anmerkung: Aus 4. ergibt sich, dass die Menge aller *totalen* Funktionen keine universelle Funktion besitzt. Wir wissen bereits, dass die Menge aller *berechenbaren* Funktionen eine berechenbare universelle Funktion hat. Schränken wir diese Menge jedoch auf die *totalen und berechenbaren* Funktionen ein, dann besitzt diese eingeschränkte Menge nach 5. keine berechenbare universelle Funktion mehr. Eine weitere Einschränkung auf eine Teilmenge der totalen und berechenbaren Funktionen kann allerdings nach 6. wieder eine berechenbare universelle Funktion erlauben.

Aufgabe 3.2 (universelle Funktion und Paar-Funktion)

Wir betrachten eine beliebige Familie $\mathcal{F}$ von einstelligen arithmetischen Funktionen, und $F : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ sei eine universelle Funktion für $\mathcal{F}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ *seine eigene universelle Funktion enthält*, genau dann, wenn $F \in \mathcal{F}$ gilt.

1. Enthält die Familie $\mathcal{U}$ aller einstelligen berechenbaren Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ihre eigene universelle Funktion?

2. Sei $\mathcal{G}$ eine Familie totaler (nicht notwendigerweise berechenbarer) Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $\mathcal{G}$ ist abgeschlossen unter Komposition, d. h. für alle $f, g \in \mathcal{G}$ gilt $f \circ g \in \mathcal{G}$.

   (ii) $\mathrm{S} \in \mathcal{G}$, wobei S den Nachfolger einer natürlichen Zahl berechnet, also $\mathrm{S}(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Für die Funktion $\hat{\pi} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $\hat{\pi}(x) = \pi^2(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$, gilt $\hat{\pi} \in \mathcal{G}$.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht ihre eigene universelle Funktion enthalten kann.

   Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\mathrm{S} \circ G \circ \hat{\pi}$ für die universelle Funktion G von $\mathcal{G}$. Überlegen Sie sich auch, wie diese vorgeschlagene Funktion mit dem Prinzip einer Diagonalisierung zusammenhängt.