

B Fehlerrechnung

Tabelle B-1. Wichtige Normen.

Norm	Bezeichnung
DIN 1319	Grundlagen der Messtechnik
DIN 13 303	Stochastik
DIN 55 350	Qualitätssicherung und Statistik

B.1 Messgenauigkeit

In der Regel weisen die Wiederholungsmessungen einer physikalischen Größe G Abweichungen auf, die kennzeichnend für die Messgenauigkeit sind. Dabei ist zwischen den *systematischen*, für das Messverfahren charakteristischen Abweichungen und den *zufälligen* oder *statistischen*, vom Experimentator abhängigen Abweichungen zu unterscheiden.

Zur grafischen Analyse der Messwertschwankungen dient das *Histogramm* (Bild B-1). In dieses wird balkenförmig über dem Messwert x_j die *relative Häufigkeit* h_j des Messwerts aufgetragen:

$$h_j = \frac{N_j}{N}; \quad (\text{B-1})$$

h_j relative Häufigkeit des Messwertes x_j ,
 N Gesamtanzahl der Messungen der Größe x ,
 N_j Anzahl der Messungen mit dem Messwert x_j .

Bei statistischen Messabweichungen ist die Häufigkeitsverteilung symmetrisch zu einem *häufigsten Wert*, dem *Erwartungswert* μ . Starke Asymmetrien im Histogramm sind im Allgemeinen ein Hinweis auf systematische Abweichungen.

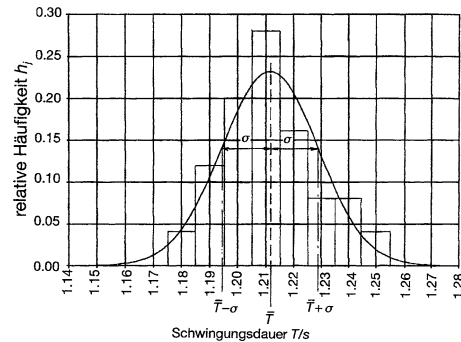


Bild B-1. Histogramm der Verteilungsdichte $h_j(T)$ bei einer Schwingungsdauermessung sowie die Normalverteilungskurve nach Gl. (B-2) für $\mu = \bar{T}$ und $\sigma^2 = s_T^2$ mit $T = 1,2116$ s und $s_T = 0,0172$ s.

B.2 Analyse statistischer Messwertverteilungen

Bei statistischen Abweichungen der Messwerte geht die Häufigkeitsverteilung $h(x_j)$ in eine *glockenförmige Normalverteilung* der Messwerte über, wenn die Anzahl der Wiederholungsmessungen stark erhöht wird. Im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ liegen die Werte des Histogramms auf der von C. F. GAUSS aufgestellten Verteilungsfunktion $h(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad (\text{B-2})$$

$h(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung des Messwertes x ,
 σ^2 Varianz der Normalverteilung,
 μ Erwartungswert der Normalverteilung bzw. Messgröße x mit der höchsten Messwahrscheinlichkeit.

Die Funktion $h(x)$ ist zum Erwartungswert μ symmetrisch und durch den Faktor $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ auf die Wahrscheinlichkeit 1 so normiert, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 1. \tag{B-3}$$

Die Varianz σ^2 ist ein Maß für die Breite der Verteilungsfunktion $h(x)$: 68,3% der Messwerte liegen im Bereich $x = \mu \pm \sigma$ und 95,4% im Bereich $x = \mu \pm 2\sigma$. Die Varianz σ^2 lässt sich aus der Halbwertsbreite $b_{1/2}$, d. h. der Breite der Glockenkurve in halber Höhe des Maximums $h(\mu)$ der Normalverteilung, bestimmen:

$$\sigma^2 = \frac{b_{1/2}^2}{8 \ln 2} = 0,18 b_{1/2}^2. \tag{B-4}$$

Bei einer endlichen Anzahl N von Messungen der m diskreten Messwerte x_1, x_2, \dots, x_m las-

sen sich für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 aus der Häufigkeitsverteilung $h(x_j)$ nach der Theorie der Beobachtungsfehler von GAUSS Schätzwerte berechnen.

Demnach ist der beste Schätzwert für μ der arithmetische Mittelwert \bar{x} nach Gl. (B-5) in Tabelle B-2. Für \bar{x} ist die Fehlersumme FS [$FS = \sum (x_i - \bar{x})^2$ mit $i = 1, \dots, N$] minimal und lässt sich nach Gl. (B-6) berechnen. Mit der auf die Anzahl der Wiederholungsmessungen $N-1$ normierten minimalen Fehlersumme FS_{\min} errechnet sich nach Gl. (B-7) die Standardabweichung s , deren Quadrat der beste Schätzwert für σ^2 ist.

Eine Erhöhung der Anzahl N der Messungen vermindert nicht die Standardabweichung s , welche die Breite der Häufigkeitsverteilung bestimmt und damit die Genauigkeit des verwendeten Messverfahrens beschreibt. Dagegen erhöhen Wiederholungsmessungen die Genauigkeit, sodass der berechnete arithmetische Mittelwert \bar{x} mit dem Erwartungswert μ der Messgröße übereinstimmt. Glei-

Tabelle B-2. Beziehungen zur Berechnung der Kennwerte der Fehlerrechnung.

Kennwerte der Fehlerrechnung		Beziehungen
\bar{x}	arithmetischer Mittelwert; Schätzwert für den Erwartungswert	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{B-5}$
FS_{\min}	minimale Fehlersumme einer Anzahl von N Messwerten	$FS_{\min} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ $= \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \tag{B-6}$
s	Standardabweichung des Messwerts bzw. Messverfahrens; Schätzwert für die Varianz	$s = \sqrt{\frac{FS_{\min}}{N-1}} \tag{B-7}$
s_{rel}	relative Standardabweichung des Messwerts bzw. Messverfahrens	$s_{\text{rel}} = \frac{s}{\bar{x}} \tag{B-8}$
$\Delta\bar{x}$	Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts	$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{B-9}$
$\Delta\bar{x}_{\text{rel}}$	relative Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts	$\Delta\bar{x}_{\text{rel}} = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \tag{B-10}$
u_z	Zufallskomponente der Messunsicherheit mit t_p -Faktor der Student-Verteilung	$u_z = \Delta\bar{x} t_p \tag{B-11}$

chung (B-9) in Tabelle B-2 für die Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ des arithmetischen Mittelwerts ist das Maß für die nach N Messungen bestehende Abweichung des Schätzwerts \bar{x} zum wahren Wert μ .

Bei einer geringen Anzahl von Wiederholungsmessungen ist das arithmetische Mittel \bar{x} als Schätzwert für μ sehr ungenau. Charakteristischer für die Genauigkeit der Bestimmung des Erwartungswerts μ ist in diesem Fall der *Vertrauensbereich* $\bar{x} - u$ bis $\bar{x} + u$ um den arithmetischen Mittelwert, in dem der Erwartungswert μ der Messgröße mit einer vorzuziehenden Wahrscheinlichkeit, der *statistischen Sicherheit* P , liegt. Die Grenzen des Vertrauensbereichs um den arithmetischen Mittelwert werden durch die *Messunsicherheit* $u = u_z + u_s$ angegeben, welche sich aus dem Anteil der *statistischen Messunsicherheit* u_z und der *systematischen Messunsicherheit* u_s zusammensetzt.

Die systematische Messunsicherheit u_s muss geschätzt werden. Die statistische Messunsicherheit u_z wird nach Gl. (B-11) in Tabelle B-2 mit Hilfe der Standardabweichung $\Delta\bar{x}$ des arithmetischen Mittelwerts berechnet und mit dem t_p -Faktor der *Student-Verteilung* nach Tabelle B-3 gewichtet. Je nach gewählter statistischer Sicherheit P ist dieser unterschiedlich. In der physikalischen Messtechnik rechnet man mit der statistischen Sicherheit $P = 68,3\%$. In der Industrie ist ein Wert $P = 95,4\%$ üblich.

Das Ergebnis von N Messungen der Messgröße x mit einem Messverfahren, dessen Messgenauigkeit durch die Standardabweichung s und den Vertrauensbereich u_z mit der statistischen Sicherheit P gekennzeichnet ist, wird in folgender Form angegeben:

$$x_p = \bar{x} \pm u_z = \bar{x} \pm t_p \frac{s}{\sqrt{N}} ; \quad (B-12)$$

- x_p Ergebnis der Messwertanalyse der Messwerte x ,
- \bar{x} wahrscheinlichster Wert für die Messgröße x ,
- u_z Grenzwert des Vertrauensbereichs mit der statistischen Sicherheit P ,
- t_p Student-Faktor nach Tabelle B-3,
- s Standardabweichung nach Gl. (B-7),
- N Gesamtanzahl der Messungen der Messgröße x .

Tabelle B-3. Zahlenwerte nach DIN 1319-3 und Anpassungspolynom des t -Faktors der Vertrauensgrenzen für verschiedene statistische Sicherheiten.

Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - k$	statistische Sicherheit P	
	68,3% $t_{0,68}$	95,4% $t_{0,95}$
1	1,84	12,71
2	1,32	4,30
3	1,20	3,18
4	1,15	2,78
5	1,11	2,57
7	1,08	2,37
10	1,06	2,25
20	1,03	2,09
50	1,01	2,01
100	1,00	1,98
> 100	1,00	1,96
Anpassungspolynom	$t_{0,68} = 1$	$t_{0,95} = 1,96$
	$+\frac{0,584}{n_w}$	$+\frac{3,012}{n_w}$
	$-\frac{0,032}{n_w^2}$	$-\frac{1,273}{n_w^2}$
	$+\frac{0,288}{n_w^3}$	$+\frac{8,992}{n_w^3}$

B.3 Fehlerfortpflanzung

Tabelle B-4. Beziehungen für die Kennwerte der Fehlerrechnung indirekt gemessener physikalischer Größen.

Kennwerte der Fehlerfortpflanzung der Fehlerrechnung	Beziehungen
\bar{f} wahrscheinlichster Wert der indirekt gemessenen physikalischen Größe f	$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$ (B-13)
s_f Standardabweichung der Größe f bzw. des indirekten Messverfahrens für f	$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 s_z^2 + \dots}$ (B-14)
Δf absoluter Größtfehler der Größe f bzw. des Messverfahrens für f	$\Delta f = \left \frac{\partial f}{\partial x}\right \Delta \bar{x} + \left \frac{\partial f}{\partial y}\right \Delta \bar{y} + \left \frac{\partial f}{\partial z}\right \Delta \bar{z} + \dots$ (B-15)
Δf_{rel} relativer Größtfehler der Größe f bzw. des Messverfahrens für f	$\Delta f_{\text{rel}} = \frac{\Delta f}{f}$ (B-16)
$\Delta f_{\text{rel, PP}}$ relativer Größtfehler eines Potenzprodukts $f = x^k y^m z^n$	$\Delta f_{\text{rel, PP}} = \left k \frac{\Delta \bar{x}}{x}\right + \left m \frac{\Delta \bar{y}}{y}\right + \left n \frac{\Delta \bar{z}}{z}\right $ (B-17)
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$	arithmetische Mittelwerte der Teilmessgrößen x, y, z, \dots
s_x, s_y, s_z, \dots	Standardabweichungen der Teilmessgrößen x, y, z, \dots
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$	partielle Ableitungen der Funktion $f(x, y, z, \dots)$ nach den Teilgrößen x, y, z, \dots an der Stelle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$

B.4 Regression – Kurvenanpassung

Die Regressionsmethode lässt sich dazu verwenden, Theorien von Naturvorgängen messtechnisch zu überprüfen und die Parameter a_1, a_2, a_3, \dots solcher Theorien zu bestimmen. Dazu werden für die in $i = 1, 2, \dots, N$ Messreihen verschieden eingestellten Messvariablen $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots$ (auch Beobachtungen genannt), die durch das experimentelle Vorgehen festgelegt werden, die Messwerte f_i der Größe f gemessen, mit den aus der Theorie ermittelten Werten $f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots)$ verglichen und die Theorieparameter a_1, a_2, a_3, \dots so gewählt, dass die theoretischen Werte der physikalischen Größe f im Rahmen der Mess-

genauigkeit mit den Messwerten möglichst gut übereinstimmen.

Ist die Anzahl N der Messreihen gerade so groß wie die Anzahl der zu bestimmenden Theorieparameter, dann lassen diese sich aus den N Bestimmungsgleichungen ausrechnen. Mit der Methode der Fehlerfortpflanzung können dann die Standardabweichungen der Theorieparameter aus den Messfehlern der Messvariablen x_i und der Messwerte f_i bestimmt werden. Dieses Vorgehen hat aber das Risiko, dass schon bei einer Fehlmessung der Messvariablen oder Messwerte die ermittelten Regressionsparameter vollkommen falsch sind.

In der Messpraxis führt man daher in der Regel weit mehr Messreihen aus, als Theorieparameter zu bestimmen sind. Dadurch entstehen unterschiedliche Wertesätze für die Theorie-

parameter, welche die Messgenauigkeit der Messvariablen und Messwerte widerspiegeln. Wird davon ausgegangen, dass die Messfehler zufällig und voneinander unabhängig sind, dann sollte sich ein Wertesatz für die Theorieparameter ergeben, der bei der Analyse der Messreihen gehäuft auftritt, der also mit größter Wahrscheinlichkeit bei einer weiteren Messreihe zu erwarten ist. Ziel der Ausgleichsrechnung oder Regression ist es, aus der Ausgleichung der Differenzen zwischen gemessener und theoretischer Größe f diesen wahrscheinlichsten Satz für die Theorieparameter a als Regressionsparameter zu bestimmen.

Nach der *Theorie der Beobachtungsfehler* von GAUSS sind die Theorieparameter a_1, a_2, \dots am wahrscheinlichsten und damit die zu bestimmenden Regressionsparameter, für die bei N Messreihen die Fehlersumme FS , d. h. die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen dem Messwert f_i und dem theoretischem Wert $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)$, ein Minimum ist:

$$FS = \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots; a_1, a_2, a_3, \dots)]^2 \rightarrow \text{Minimum} . \quad (\text{B-18})$$

Durch die Gewichte g_i können die Beiträge einzelner Messreihen i zur Fehlersumme unterschiedlich gewichtet werden.

Die Forderung dieser *Regressionsmethode der kleinsten Quadrate* führt auf ein System von *Normalgleichungen* für die Regressionsparameter a_1, a_2, \dots :

$$-2 \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)] \cdot \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0 , \quad (\text{B-19a})$$

$$-2 \sum_{i=1}^N g_i [f_i - f(x_{1i}, x_{2i}, \dots; a_1, a_2, \dots)] \cdot \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0 ; \quad (\text{B-19b})$$

- g_i Gewicht der Messung i ,
- f_i Messwert der Messung i ,
- x_{1i}, x_{2i}, \dots Werte der Messvariablen x_1, x_2, \dots bei der Messung i ,
- a_1, a_2, \dots anzupassende Regressionsparameter.

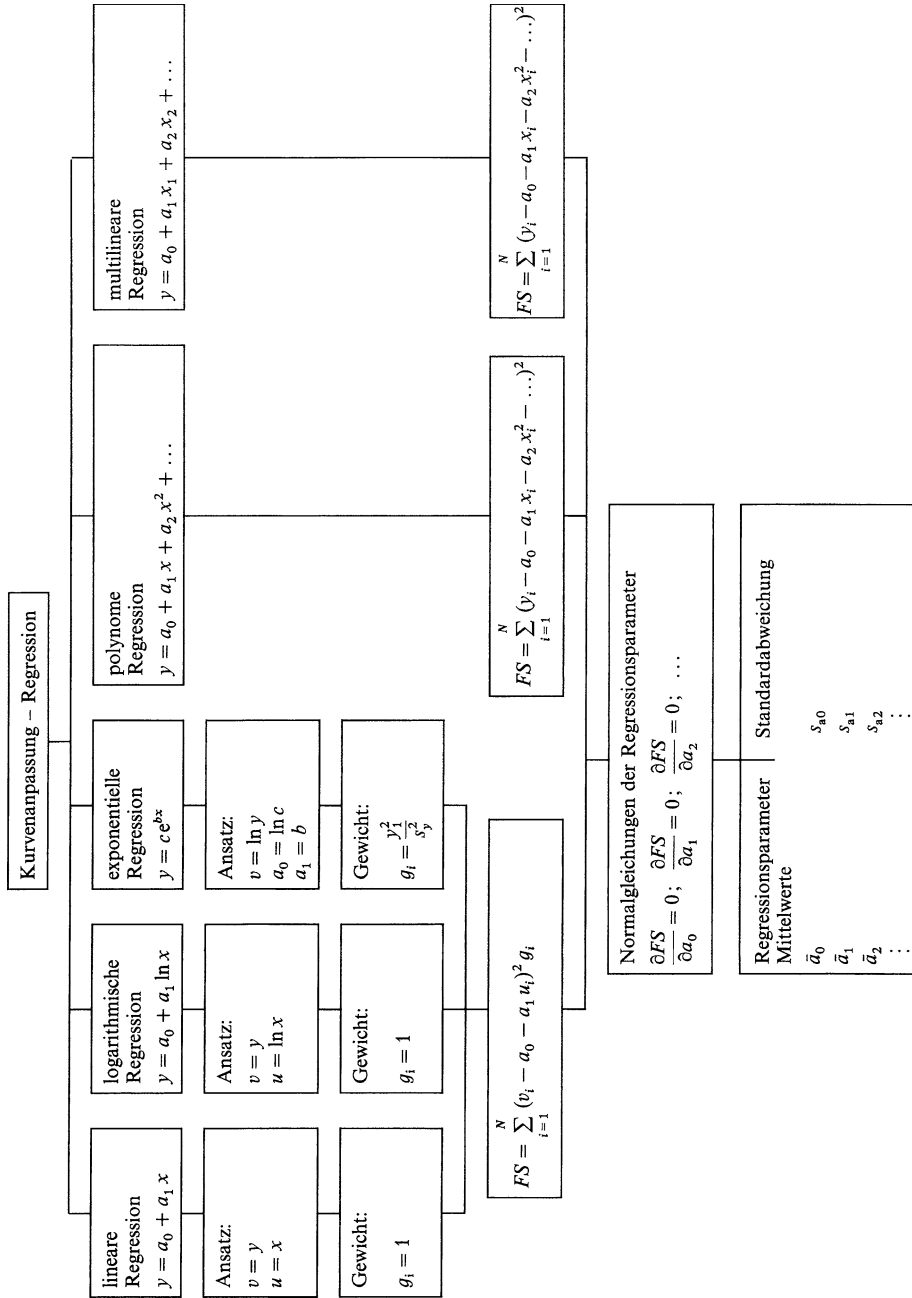
Für Linearkombinationen der Regressionsparameter a_1, a_2, \dots ist das Normalgleichungssystem linear und geschlossen lösbar; im anderen Fall müssen in der Fachliteratur behandelte Reihenentwicklungen angewendet werden. Manchmal kann durch eine Koordinatentransformation $v = v(f)$ ein lineares Normalgleichungssystem für die Regressionsparameter erreicht werden; dadurch entsteht jedoch in der Regel eine andere Gewichtung der Messreihen. Ist die Standardabweichung s_f für alle Messwerte f_i gleich und kann der Messfehler der Messvariablen x_{1i}, x_{2i}, \dots vernachlässigt werden, dann ergeben sich die Gewichte g_i aus

$$g_i = \frac{1}{\left(\frac{\partial v(f_i)}{\partial f_i}\right)^2 s_f^2} . \quad (\text{B-20})$$

Übersicht B-1 vermittelt einen Überblick über die Regression verschiedener Funktionen mit linearen Normalgleichungen. Die Mittelwerte der M Regressionsparameter $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M$ folgen direkt aus der Lösung des Normalgleichungssystems; die Standardabweichungen s_{a1}, s_{a2}, \dots folgen aus dem Wert des Minimums der Fehlersumme FS_{\min} , der Anzahl der Wiederholungsmessungen $n_w = N - M$ und den Gewichten g_i der Messreihen.

Spezialfälle der Regression mit zwei Regressionsparametern a_0 und a_1 sind die lineare

Übersicht B-1. Funktionen mit einem linearen Normalgleichungssystem für die Parameter der Kurvenanpassung.



Übersicht B-2. Kurvenanpassung durch lineare, logarithmische und exponentielle Regression.

Einlesen Anzahl Messpunkte N Messwerte x_i, y_i		
Regressionsfall		
logarithmische	lineare	exponentielle
$v_i = y_i$ $u_i = \ln x_i$ $g_i = 1$	$v_i = y_i$ $u_i = x_i$ $g_i = 1$	$v_i = \ln y_i$ $u_i = x_i$ $g_i = y_i^2$
$A = \sum_{i=1}^N g_i$	$D = \sum_{i=1}^N g_i v_i$	
$B = \sum_{i=1}^N g_i u_i$	$E = \sum_{i=1}^N g_i u_i v_i$	
$C = \sum_{i=1}^N g_i u_i^2$	$F = \sum_{i=1}^N g_i v_i^2$	
$a_0 = \frac{CD - BE}{AC - B^2} \quad s_{a0} = \left(\frac{(F - 2a_0D - 2a_1E + 2a_1a_0B + a_0^2A + a_1^2C)C}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$ $a_1 = \frac{AE - BD}{AC - B^2} \quad s_{a1} = \left(\frac{(F - 2a_0D - 2a_1E + 2a_1a_0B + a_0^2A + a_1^2C)A}{(N-2)(AC - B^2)} \right)^{1/2}$		
Ausgabefall		
logarithmische Regression	lineare Regression	exponentielle Regression
Ansatz: $y = c_0 + c_1 \ln x$ Anpassung: $c_0 = a_0 \quad s_{c0}$ $c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$	Ansatz: $y = c_0 + c_1 x$ Anpassung: $c_0 = a_0 \quad s_{c0} = s_{a0}$ $c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$	Ansatz: $y = c_0 e^{c_1 x}$ Anpassung: $c_0 = e^{a_0} \quad s_{c0} = s_{a0} e^{a_0}$ $c_1 = a_1 \quad s_{c1} = s_{a1}$

Regression (Geradenanpassung) und die logarithmische und exponentielle Regression, die sich beide durch eine Koordinatentransformation $v = v(y)$ und $u = u(x)$ in eine Geradendarstellung $v = a_0 + a_1 u$ bringen lassen, wobei sich zum Teil die Gewichte g_i ändern (Übersicht B-1). Die Regressionsparameter Achsenabschnitt a_0 und Steigung a_1 der Regressionsgeraden lassen sich entweder grafisch durch eine Ausgleichsgerade oder rechnerisch aus den Normalgleichungen der Fehlersumme FS ermitteln:

$$FS = \sum_{i=1}^N g_i [v_i - a_0 - a_1 u_i]^2; \quad (B-21)$$

- g_i Gewicht der Messung i nach Gl. (B-20),
- v_i Messwert i des Ordinatenwerts der Regressionsgeraden,
- u_i Messwert i des Abszissenwerts der Regressionsgeraden,
- a_0 Regressionsparameter Achsenabschnitt,
- a_1 Regressionsparameter Steigung der Regressionsgeraden.

Übersicht B-3. Matrizenmethode der polylinearen Regression.

Bezeichnungen

f_i	Messwerte ($i = 1 \dots N$)	
	$f_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \dots + a_m x_{M1}$	
	$f_2 = a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \dots + a_m x_{M2}$	
	\vdots	
	\vdots	
	$f_N = a_1 x_{1N} + a_2 x_{2N} + \dots + a_m x_{MN}$	(B-22)
a_j	Regressionsparameter ($j = 1 \dots M$)	
x_{ji}	Messvariable/Beobachtungen ($j = 1 \dots M; i = 1 \dots N$)	
g_i	Gewichte der Messwerte f_i ($i = 1 \dots N$)	
	(alle Gewichte gleich: $g_i = 1$)	

Sonderfälle

$x_{1i} = 1$	multilineare Regression
$x_{ji} = x_i^{j-1}$	polynome Regression
$x_{ji} = x_i^{j-1}$	lineare Regression mit $M = 2$

Beispiel: Bestimmung der Abhängigkeit der Nußelt-Zahl Nu von der Prandtl-Zahl Pr und der Reynolds-Zahl Re bei der Wärmeübertragung an einem geraden Wärmeübertragerrohr entsprechend dem theoretischen Ansatz:

$$Nu = k Pr^m Re^n .$$

k, m, n sind Wärmeübertrager-Kennwerte, die aus Messungen von Nu bei definierten Werten für Pr und Re bestimmt werden sollen.

Durch Logarithmieren kann die Bestimmungsgleichung zu einem Problem der multilinearen Regression gemacht werden:

$$\ln Nu = \ln k + m \ln Pr + n \ln Re$$

mit $v_i = \ln f_i = \ln Nu_i$, $x_{1i} = 1$, $x_{2i} = \ln Pr_i$, $x_{3i} = \ln Re_i$ und den Regressionsparametern $a_1 = \ln k$, $a_2 = m$ sowie $a_3 = n$.

Gewichte: Durch die Transformation verändern sich die Gewichte g_i der Messungen. Wegen $v(f_i) = \ln f_i$ gilt $\partial v / \partial f_i = f_i^{-1} = Nu_i^{-1}$. Nach Gl. (B-20) sind demnach $g_i = (Nu_i / s_{Nu})^2$.

Um bei der EDV-Anwendung Rundungsproblemen entgegenzuwirken, wird der konstante Faktor $s_{Nu} = 100$ gesetzt; dadurch liegen die Gewichte g_i in der rechentechnisch günstigen Größenordnung von ungefähr eins.

In der Übersicht B-2 sind die Algorithmen zur Berechnung der Mittelwerte der Regressionsparameter mit den zugehörigen Standardabweichungen zusammengestellt.

Mit Hilfe von Computern lassen sich die umfangreichen Regressionsrechnungen wesentlich einfacher und mit weniger Rechenfehlern ausführen. Dazu eignet sich jedoch die Fehlerrechnung in Matrixschreibweise

wesentlich besser. In der Übersicht B-3 ist die Vorgehensweise für die Programmierung der *polylinearen Regression* zusammengestellt. Die Mittelwerte $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_M$ der M Regressionsparameter ergeben sich als Elemente des Regressionsparametervektors \mathbf{a} von Gl. (B-25), deren Standardabweichungen $s_{a1}, s_{a2}, \dots, s_{aM}$ als Quadratwurzeln aus den Elementen des Vektors \mathbf{s}_a^2 von Gl. (B-28).

Übersicht B-3. (Fortsetzung).

Wertetabelle: 5 Messungen entsprechend Gl. (B-22)

i	Nu	Nu^2	\hat{f}_i $\ln Nu$	x_{1i}	Pr	x_{2i} $\ln Pr$	Re	x_{3i} $\ln Re$
1	101	10 201	4,615	1	7,00	1,946	16 000	9,680
2	113	12 769	4,727	1	3,57	1,273	26 000	10,166
3	137	18 769	4,920	1	4,33	1,466	30 000	10,309
4	154	23 716	5,037	1	2,56	0,940	45 000	10,714
5	200	40 000	5,298	1	3,00	1,099	58 000	10,968

Aufstellen der Regressionsmatrizen

A Koeffizienten- oder Modellmatrix der Beobachtungen (N, M -Rechenmatrix)

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2M} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \dots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

f Messwert-Vektor ($1, N$ -Matrix)

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

g Gewichtsmatrix der Messwerte (N, N -Diagonalmatrix)

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_N \end{bmatrix}$$

für $g_i = 1$: $g = E$
 E Einheitsmatrix

Aufstellen der Regressionsmatrizen

A Koeffizienten- oder Modellmatrix der Beobachtungen ($5, 3$ -Rechenmatrix)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.946 & 9.680 \\ 1 & 1.273 & 10.166 \\ 1 & 1.466 & 10.309 \\ 1 & 0.940 & 10.714 \\ 1 & 1.099 & 10.968 \end{bmatrix}$$

f Messwert-Vektor ($5, 1$ -Matrix)

$$f = \begin{bmatrix} 4.615 \\ 4.727 \\ 4.920 \\ 5.037 \\ 5.298 \end{bmatrix}$$

g Gewichtsmatrix der Messwerte ($5, 5$ -Diagonalmatrix)

$$g = \begin{bmatrix} 1.0201 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2769 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8769 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.3716 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0000 \end{bmatrix}$$

Die polylineare Regression enthält als Spezialfälle die multilineare und polynome Regression sowie die lineare Regression der Geradenanpassung.

Die Vertrauensgrenzen u_z , welche die statistische Messungenauigkeit begrenzen, ergeben sich je nach geforderter statistischer Si-

cherheit P aus dem Faktor $t(n_w)$ von Tabelle B-3; $n_w = N - M > 0$ ist dabei die Anzahl der Wiederholungsmessungen, die sich aus der Anzahl N der Messreihen und der Anzahl M der Regressionsparameter ergibt. Das Ergebnis der Kurvenanpassung liefert als ermittelte wahrscheinlichste Regressionsparameter ein-

Übersicht B-3. (Fortsetzung).

Matrizenoperationen

A^T transponierte Koeffizienten- oder Modellmatrix (Spiegelung von A an Hauptdiagonale zur (M,N) -Matrix)

$$A^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{N2} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & x_{N3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1M} & x_{2M} & x_{3M} & \dots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

N Normalgleichungsmatrix (symmetrische M,M -Matrix)

$$N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & \dots & n_{1M} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & \dots & n_{2M} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & \dots & n_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{M1} & n_{M2} & n_{M3} & \dots & n_{MM} \end{bmatrix} = A^T q A \quad (\text{B-23})$$

Q inverse Normalgleichungsmatrix (symmetrische M, M -Matrix) (Berechnung der Matrixelemente q über $NQ = E$ Einheitsvektor mit Computerroutine)

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1M} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2M} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \dots & q_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{M1} & q_{M2} & q_{M3} & \dots & q_{MM} \end{bmatrix} \\ = N^{-1} = (A^T q A)^{-1} \quad (\text{B-24})$$

c Absolutgliedvektor

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = A^T q f$$

Spur Q Spurvektor der inversen Normalgleichungsmatrix Q

$$\text{Spur } Q = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{22} \\ c_{33} \\ \vdots \\ q_{MM} \end{bmatrix}$$

Matrizenoperationen

A^T transponierte Koeffizienten- oder Modellmatrix (Spiegelung von A an Hauptdiagonale zur $(3,5)$ -Matrix)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.946 & 1.273 & 1.466 & 0.940 & 1.099 \\ 9.680 & 10.166 & 10.309 & 10.714 & 10.968 \end{bmatrix}$$

N Normalgleichungsmatrix (symmetrische $3,3$ -Matrix)

$$N = \begin{bmatrix} 10.5455 & 12.9874 & 111.486 \\ 12.9874 & 16.8927 & 136.206 \\ 111.486 & 136.207 & 1180.44 \end{bmatrix}$$

Q inverse Normalgleichungsmatrix (symmetrische $3,3$ -Matrix) (Berechnung der Matrixelemente q über $NQ = E$ Einheitsvektor z. B. mit Computerroutine)

$$Q = \begin{bmatrix} 302.830801 & -31.7898600 & -24.9325887 \\ -31.7898600 & 4.18716644 & 2.51923616 \\ -24.9325887 & 2.51923616 & 2.06490758 \end{bmatrix}$$

c Absolutgliedvektor ($3,1$ -Matrix)

$$c = \begin{bmatrix} 53.116 \\ 64.901 \\ 562.55 \end{bmatrix}$$

Spur Q Spurvektor der inversen Normalgleichungsmatrix Q ($3,1$ -Matrix)

$$\text{Spur } Q = \begin{bmatrix} 302.830801 \\ 4.18716644 \\ 2.06490758 \end{bmatrix}$$

Übersicht B-3. (Fortsetzung).

Regressionsergebnis	Regressionsergebnis
<p>a) Mittelwerte der angepassten Regressionsparameter a_1, \dots, a_M</p> <p>a Regressionsparameter der Mittelwerte</p> $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = N^{-1} \mathbf{c} = (\mathbf{A}^T \mathbf{q} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{q} \mathbf{f}) \quad (\text{B-25})$ <p>b) Standardabweichung der Regressionsparameter s_{a1}, \dots, s_{aM}</p> <p>v Vektor der Abweichungen</p> $v_i = f_i - f(x_{1i}, \dots, x_{Mi}; a_i, \dots, a_m)$ $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (\text{B-26})$ <p>v^T transponierter Vektor der Abweichungen</p> <p>v^T $[v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$</p> <p>$FS_{\min}$ Wert der Fehlersumme im Minimum (Skalar)</p> $FS_{\min} = \mathbf{v}^T \mathbf{q} \mathbf{v} \quad (\text{B-27})$ <p>s_a² Vektor der quadratischen Standardabweichungen</p> $\mathbf{s}_a^2 = \begin{bmatrix} s_{a1}^2 \\ s_{a2}^2 \\ s_{a3}^2 \\ \vdots \\ s_{aM}^2 \end{bmatrix} = \frac{FS_{\min}}{N - M} \mathbf{Spur} \mathbf{Q} \quad (\text{B-28})$	<p>a) Mittelwerte der angepassten Regressionsparameter a_1, a_2, a_3</p> <p>a Regressionsparameter der Mittelwerte (3,1-Matrix)</p> $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3.9307585 \\ 0.4050047 \\ 0.8010658 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} k = e^{a_1} = 0.01963 \\ m = a_2 = 0.40500 \\ n = a_3 = 0.80107 \end{array}$ <p>b) Standardabweichung der Regressionsparameter s_{a1}, s_{a2}, s_{a3}</p> <p>v Vektor der Abweichungen (5,1-Matrix)</p> $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.0033027 \\ -0.0014471 \\ -0.0011654 \\ 0.0044354 \\ -0.0024310 \end{bmatrix}$ <p>v^T transponierter Vektor der Abweichungen (1,5-Matrix)</p> <p>v^T $[0.0033027 \ -0.0014471 \ -0.0011654 \ 0.0044354 \ -0.0024310]$</p> <p>$FS_{\min}$ Wert der Fehlersumme im Minimum (Skalar)</p> $FS_{\min} = 0.00050655$ <p>s_a² Vektor der quadratischen Standardabweichungen (3,1-Matrix)</p> <p>Es gilt: $N - M = 5 - 3 = 2$</p> $\delta a_1 = k^{-1} \delta k$ $\mathbf{s}_a^2 = \begin{bmatrix} 0.07670006 \\ 0.00106051 \\ 0.00052299 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} s_k = k \sqrt{s_{a1}^2} = 0.00544 \\ s_m = \sqrt{s_{a2}^2} = 0.0326 \\ s_n = \sqrt{s_{a3}^2} = 0.0229 \end{array}$

schließlich Vertrauensgrenzen:

$$a_p = \bar{a} \pm t_p(n_W) \frac{s_a}{\sqrt{N}}; \quad (\text{B-29})$$

\bar{a} Mittelwert des Regressionsparameters,

$t_p(n_W)$ t -Faktor nach Tabelle B-3 bei n_W Wiederholungsmessungen und der statistischen Sicherheit P ,
 s_a Standardabweichung des Regressionsparameters a ,
 N Anzahl der Messreihen der Regressionsanalyse.

B.5 Ausgleichsgeradenkonstruktion

Die zeichnerische Darstellung der Messpunkte in einem Diagramm eignet sich besonders gut für die Analyse, ob die theoretische Kurve im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messwerten übereinstimmt. Wird ein linearer Zusammenhang $f = a_1 + a_2x$ zwischen der Messvariablen x und dem Messwert f erwartet, so kann im Messdiagramm die *Ausgleichsgerade* auch grafisch durch die Messwerte gezogen und a_1 aus dem Achsenabschnitt sowie a_2 aus der Steigung bestimmt werden (Bild B-2).

Als Maß für den Messfehler der Ausgleichsgeradenkonstruktion werden die Standardabweichungen Δa_1 und Δa_2 der Geradenparameter genommen, welche sich aus den beiden *Grenzgeraden* I und II an die Messwerte abschätzen lassen. Diese müssen durch die in den Gln. (B-30) und (B-31) in Tabelle B-5 angegebenen Koordinaten (f_s, x_s) des *Schwerpunkts der Messwerte* gezogen werden. Aus den der Zeichnung entnommenen Werten a_1^I, a_2^I sowie a_1^{II} und a_2^{II} der Grenzgeraden werden mit Hilfe der Gl. (B-32) die Standardabweichung Δa_1 des Achsenabschnitts und mit Gl. (B-33) Δa_2 der Geradensteigung errechnet.

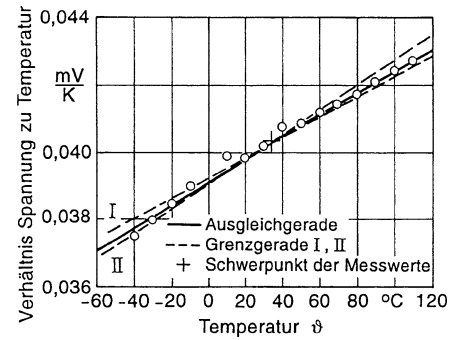


Bild B-2. Grafische Kurvenanpassung für das Thermoelement Cu-CuNi an die Eichkurve nach DIN EN 60 584.

Dabei ist Δf_s die geschätzte Standardabweichung der Ordinate f_s des Schwerpunkts der Messwerte.

B.6 Korrelationsanalyse

Die *Methode der Ausgleichsgeraden* wird in der Messwertanalyse benutzt, um zu untersuchen, ob zwischen den N Messwerten x_i und y_i ein linearer Zusammenhang besteht. Dazu werden die Messwerte y_i über den Messvariablen x_i in einem Diagramm aufgetragen und durch

Tabelle B-5. Schwerpunkt und Standardabweichung der Ausgleichsgeradenkonstruktion.

Kennwerte der Konstruktion der Grenzgeraden		Beziehungen	
f_s, x_s	Koordinaten des Schwerpunkts S der N Messwerte	$f_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i$	(B-30)
		$x_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	(B-31)
Δa_1	Standardabweichung des Achsenabschnitts der Ausgleichsgerade aus den Grenzgeraden I und II	$\Delta a_1 = \pm \left(\left \frac{a_1^I - a_1^{II}}{2} \right + \Delta f_s \right)$	(B-32)
Δa_2	Standardabweichung des Steigungsparameters der Ausgleichsgerade aus den Grenzgeraden I und II	$\Delta a_2 = \pm \left \frac{a_2^I - a_2^{II}}{2} \right $	(B-33)

Tabelle B-6. Kennwerte der Korrelationsanalyse.

Kennwerte und Betrag des Korrelationskoeffizienten		Beziehungen
\bar{x}	Mittelwert der Merkmale x_i	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{B-34})$
\bar{y}	Mittelwert der Merkmale y_i	$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (\text{B-35})$
m_r	Steigung der Regressionsgeraden	$m_r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i y_i - N \bar{x} \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - N \bar{x}^2)} \quad (\text{B-36})$
r	Korrelationskoeffizient	$r = \frac{\left \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right }{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (\text{B-37})$
		$r = m_r \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i^2 - N \bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^N (y_i^2 - N \bar{y}^2)}} \quad (\text{B-38})$

eine Ausgleichsgerade analysiert. Liegen die Merkmale y_i mehr oder weniger auf einer Regressionsgeraden, so ist von einer Korrelation der Merkmale x_i und y_i auszugehen. Die Regressionsgerade geht durch den Schwerpunkt S der Merkmale x_i und y_i nach den Gln. (B-34) und (B-35); die Steigung ergibt sich rechnerisch aus der Gl. (B-36) der Tabelle B-6.

Quantitativ ist der *Korrelationskoeffizient* r ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen den Merkmalen x_i und y_i eine Ab-

hängigkeit besteht, sie also eventuell korreliert sind. Mit Hilfe von Gl. (B-37) oder Gl. (B-38) der Tabelle B-6 lässt sich der Korrelationskoeffizient r der Merkmale x_i und y_i berechnen. Liegt der Korrelationskoeffizient nahe bei $r = 1$ (also $0,8 < r \leq 1$), dann besteht mit großer bis bestimmter Wahrscheinlichkeit eine Korrelation zwischen den Merkmalen. Ein linearer Zusammenhang ist unwahrscheinlich bis ausgeschlossen, wenn der Korrelationskoeffizient $0 \leq r < 0,5$ beträgt.