

2 Die verallgemeinerte lineare Drehstrommaschine

2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Betrachtet wird eine Drehstrom-Schenkelpolmaschine mit einer dreisträngigen Ankerwicklung im Stator und dem Polsystem im Rotor, also eine Innenpolmaschine nach Bild 1.1 bis Bild 1.3. Das ist bezüglich der Außenpolmaschinen nach Bild 1.5 keine Einschränkung, da für die Funktion und das Betriebsverhalten nur die Relativbewegung zwischen Stator und Rotor von Bedeutung ist. Stator und Rotor sollen rotationssymmetrisch und jedes Polpaar auch gleichartig und achsensymmetrisch bezüglich Polachse und Pollücke ausgeführt sein. Da das Ankerblechpaket im Stator (bei Außenpolmaschinen im Rotor) und wenigstens auch die Polschuhe des Polsystems aus dünnen, gegeneinander isolierten, nicht kornorientierten Elektroblechen mit geringen spezifischen Ummagnetisierungsverlusten bestehen, sollen bei den hier betrachteten üblichen Frequenzen und Aussteuerungen die Hysterese- und Wirbelstromverluste im Eisen vernachlässigt werden. Auch die vom Aussteuerungszustand abhängige magnetische Sättigung bleibt vorerst unberücksichtigt, worauf der Begriff „linear“ hindeuten soll.

Die drei Wicklungsstränge des Ankers mit ihren z_p Teilsträngen sind gleich aufgebaut und innerhalb eines Polpaares um jeweils 120° versetzt am Umfang der Ankeroberfläche angeordnet (Drehstromwicklung). Das Polsystem besitzt $2z_p$ ausgeprägte Pole, auf denen die Erregerwicklung untergebracht ist. In den Polschuhen befinden sich meist über Laschen verbundene Dämpferstäbe, die einen mehr oder weniger vollständigen Dämpferkäfig bilden. Durch die Form der Polschuhe sowie eine geeignete Nutzuordnung (ZW, $q_1 > 1$, Sehnung) sowie Reihen- und/oder Parallelschaltung der Teilspulen der Ankerwicklung wird einerseits vom Polsystem ein weitgehend sinusförmiges, z_p -welliges Luftspaltfeld und andererseits eine bezüglich der Ankerstränge weitgehend sinusförmige induzierte Spannung und bei Belastung auch eine weitgehend sinusförmige Ankerrückwirkung erreicht. Die verbleibenden Oberwellen der Durchflutungs- und der Induktionsverteilung im Luftspalt sowie die dadurch in den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes induzierten Spannungen werden vernachlässigt. Als magnetische Kopplung zwischen der Ankerwicklung und den Wicklungen des Polsystems wird also lediglich die mit der synchronen Drehzahl n_0 nach Gl. (1.1) umlaufende Grundwelle der Induktionsverteilung wirksam (Prinzip der Grundwellenverkettung [5]), ihr mit den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes verketteter Fluss stellt den Hauptfluss dar. Alle anderen mit einer Wicklung verketteten Flüsse derselben Luftspaltseite sind von der Stellung und Bewegung von Anker und Polsystem zueinander unabhängig und werden zu ihrem Streufluss gerechnet.

Da sich bei Maschinen mit höherer Polpaarzahl die Anordnung der Pole und der Nuten mit ihren Wicklungen längs des Umfanges in guter Näherung und für sogenannte Ganzlochwicklungen auch exakt z_p -mal wiederholt und die elektromagnetischen Vorgänge im Luftspalt, im Eisen und in den Wicklungen infolge des symmetrischen Aufbaus und der Anwendung des Prinzips der Grundwellenverkettung pro Polpaar gleich sind, genügt es, nachfolgend nur ein Polpaar, oder anders ausgedrückt, eine zweipolige Modellmaschine zu betrachten, dargestellt in Bild 2.1 als idealisierte Außenpolmaschine. Die Lage des Ankers relativ zum Polsystem

wird durch den Drehwinkel $\vartheta = \vartheta_m$ zwischen der positiven d-Achse und dem Ankerstrang a charakterisiert.

Die dreisträngige Ankerwicklung wird bei der Modellmaschine als in Stern geschaltet vorausgesetzt. Das ist jedoch keine Einschränkung, da sich bei Zugrundelegung des Prinzips der Grundwellenverkettung symmetrische Dreieckschaltungen exakt in äquivalente Sternschaltungen umzuwandeln lassen.

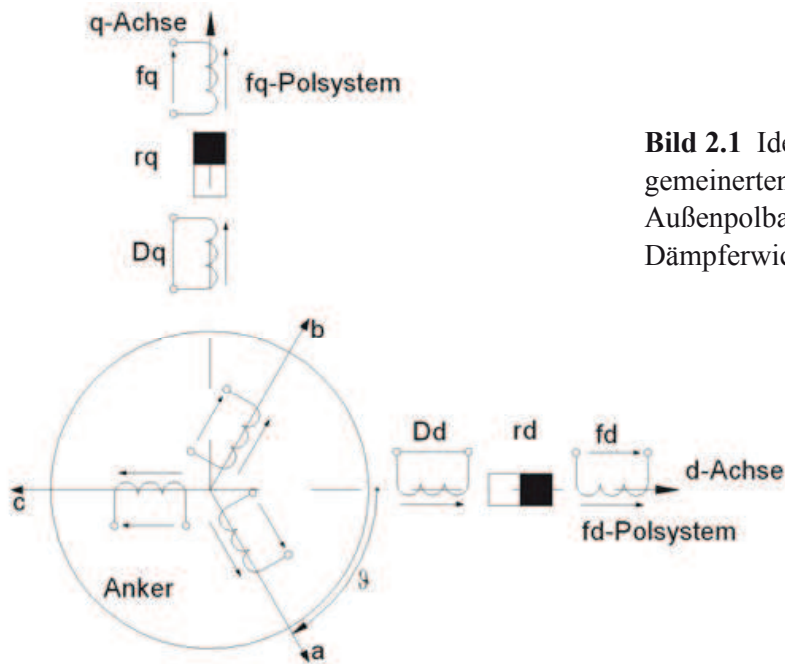


Bild 2.1 Idealisierte Darstellung der verallgemeinerten Drehstrom-Synchronmaschine in Außenpolbauform mit je einer Erreger- und Dämpferwicklung in Längs- und Querachse

Der Dämpferkäfig wird durch je eine kurzgeschlossene Ersatzwicklung pro Achse, gekennzeichnet durch Dd bzw. Dq , die zusammen das gleiche Grundwellenverhalten wie der Käfig aufweisen sollen, ersetzt. Auch wenn ein Dämpfer- oder Anlaufkäfig real nicht ausgeführt ist, besteht doch bei Flussänderungen in massiven Eisenteilen des Rotors infolge der dann auftretenden Wirbelströme ein mehr oder weniger deutliches Dämpfungsverhalten, das sich durch die Ersatz-Dämpferkreise ebenfalls näherungsweise berücksichtigen lässt.

Die mit rd und rq bezeichneten Ersatzmagnete charakterisieren achsenbezogen eine Remanenzdurchflutung Θ_{rd} bzw. Θ_{rq} , verursacht durch dauernde einseitige Magnetisierung oder durch im Polsystem speziell eingebaute Permanentmagnete, etwa bei PM-erregten Synchronmaschinen.

Elektrisch erregte Synchronmaschinen besitzen üblicherweise nur die in der Längs- oder d-Achse den Polen zugeordnete Erregerwicklung fd . Zur Verallgemeinerung und weil es einfacher ist, eine Wicklung im mathematischen Modell durch Grenzübergang unwirksam zu machen als später eine zusätzliche Wicklung einzuführen, wird hier auch in der Quer- oder q-Achse eine von außen zugängliche fq -Erregerwicklung berücksichtigt. Besonders gut vorstellbar ist diese Erweiterung, auf den sich der Begriff „verallgemeinerte“ lineare Drehstrommaschine bezieht, für eine Synchronmaschine mit Vollpolläufer analog Bild 1.3 mit einer verteilten fd -Erregerwicklung, bei der die beiden Seiten der fq -Erregerwicklung in die Lücke der fd -Polmitten eingefügt sind. Bild 2.2 zeigt schematisch eine solche Ersatzanordnung für die Dreh-

strommaschine mit dreisträngiger Ankerwicklung sowie mit je einer Erreger- und Ersatz-Dämpferwicklung in Längs- und Querachse als Abwicklung längs des Luftspaltes. Die verteilten Wicklungen sind jeweils auf je eine Spule mit nur einer Nut je Spulenseite vereinfacht; durch Kreuze (x) sind die Anfangs- und durch Punkte (•) die Endseiten der Spulen gekennzeichnet.

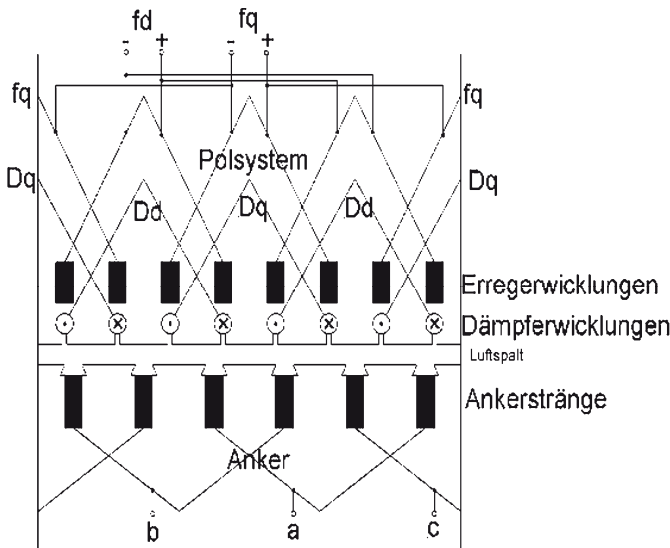


Bild 2.2 Verallgemeinerte Drehstrommaschine als Abwicklung längs des Luftspaltes

Diese idealisierte verallgemeinerte Modellmaschine eignet sich sowohl zur Beschreibung des Betriebsverhaltens einer Drehstrom-Synchronmaschine als auch ohne Einschränkungen einer Drehstrom-Asynchronmaschine mit Schleifring- oder Käfigläufer. Dreisträngige Schleifringläuferwicklungen und Rotorkäfige können dafür in zweisträngig-achsenbezogene äquivalente Ersatzwicklungen umgerechnet werden. Mitunter ist es aber bei Asynchronmaschinen vorteilhafter, die Rotorwicklungen in dreisträngige Ersatzwicklungen zu überführen. Auf diese und andere Besonderheiten der Asynchronmaschine gegenüber der Synchronmaschine, die für die Modellerstellung und -handhabung wichtig sind, wird an den betreffenden Stellen und speziell in Kapitel 6 eingegangen.

2.2 Spannungsgleichungen für die Ankerstränge

Die Spannungsgleichungen für die drei in Stern geschalteten, gleich ausgeführten Ankerstränge a, b und c lauten im Verbraucher-Zählpfeilsystem mit den in den drei Strängen gleichen Strangwiderständen R_a

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Bei der Ermittlung der Flussverkettungen ist wegen der im Polsystem möglichen magnetischen Asymmetrie („Schenkeligkeit“) und der den magnetischen Symmetrieachsen d und q zugeord-

neten Wicklungen die relative Lage zwischen Polsystem und Anker zu berücksichtigen. Dazu wird unter Beachtung des Prinzips der Grundwellenverkettung und des Verdrehwinkels $\vartheta = \vartheta_m$ zwischen positiver d-Achse und Ankerstrang a die Grundwelle der Ankerdurchflutungsverteilung in eine Längs- und eine Querkomponente zerlegt, dargestellt als fiktive Achsenströme i_d und i_q :

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3} \left(i_a \cos \vartheta + i_b \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \\ i_q &= \frac{2}{3} \left(-i_a \sin \vartheta - i_b \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_c \sin \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aus den auf die Stränge bezogenen Summen der achsenbezogenen Flusskomponenten von Anker-, Ersatz-Dämpfer- und Erregerwicklungen sowie ergänzt durch den gleichphasigen Streufluss des Nullstromes

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) \quad (2.3)$$

erhält man die Flussverkettungen der drei Ankerstränge zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} &= \left\{ L_d i_d + L_{aDd} i_{Dd} + L_{afd} (i_{fd} + i_{rd}) \right\} \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \cos \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \\ &\quad - \left\{ L_q i_q + L_{aDq} i_{Dq} + L_{afq} (i_{fq} + i_{rq}) \right\} \begin{bmatrix} \sin \vartheta \\ \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \left(\vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{bmatrix} + L_0 \begin{bmatrix} i_0 \\ i_0 \\ i_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die in Gl. (2.4) auftretenden Induktivitäten L_d und L_q stellen die Selbstinduktivitäten der Ankerwicklung bezüglich der beiden Achsen dar. Sie werden als synchrone Längs- bzw. synchrone Querinduktivität bezeichnet und setzen sich jeweils aus der ständerbezogenen Gegen- oder Hauptinduktivität der Achse L_{hd} und L_{hq} und der von der Lage des Polsystems unabhängigen Streuinduktivität der Ständerwicklung $L_{\sigma a}$ zusammen

$$L_d = L_{hd} + L_{\sigma a} \quad \text{und} \quad L_q = L_{hq} + L_{\sigma a} \quad (2.5)$$

Die Gegeninduktivitäten L_{hd} , L_{aDd} , L_{afd} und L_{hq} , L_{aDq} , L_{afq} charakterisieren den magnetischen Kreis für die Hauptflusskomponenten und den Anteil, den die Ströme in der Anker- sowie der Ersatz-Dämpfer- und der Erregerwicklung von d- und q-Achse zur Flussverkettung jedes Ankerstranges beitragen. Der Index a kennzeichnet den Bezug der Größe zur Ankerwicklung, bei den Ankergrößen selbst wird der Index meist weggelassen. Die Wirkung von Permanentmagneten oder eines Remanenzflusses Φ_{rd} bzw. Φ_{rq} im magnetischen Kreis beider Achsen auf die Ankerwicklungen wird durch zeitlich konstante, der jeweiligen Erregerwicklung zugeordnete Remanenzdurchflutungen Θ_{rd} bzw. Θ_{rq} mit den fiktiven Remanenz-Erregerströmen i_{rd} und i_{rq} berücksichtigt.

Bei Vernachlässigung der magnetischen Spannungsabfälle im Eisen gelten für die Gegeninduktivitäten einer verallgemeinerten Schenkelpolmaschine mit je einer Ersatz-Dämpfer- und einer Erregerwicklung pro Achse die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 L_{hd} &= \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a^2}{2z_p} C_{ad,1} & L_{hq} &= \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a^2}{2z_p} C_{aq,1} \\
 L_{aDd} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a w_{Dd} C_{Dd,1}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{aDq} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a w_{Dq} C_{Dq,1}}{2z_p} \xi_{schr} \\
 L_{afd} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a w_{fd} C_{fd,1}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{afq} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w \xi_1)_a w_{fq} C_{fq,1}}{2z_p} \xi_{schr} .
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hierin bedeuten δ_{i0} die „ideelle“ Luftspaltlänge in Polmitte, l_i die „ideelle“ Blechpaketlänge unter Beachtung der Feldstörungen durch Kühlkanäle und Endbereiche, τ_p die Polteilung (Abstand zweier Pole längs des Luftspaltes) sowie $C_{ad,1}$, $C_{Dd,1}$, $C_{fd,1}$, $C_{aq,1}$, $C_{Dq,1}$ und $C_{fq,1}$ die Polformkoeffizienten zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Luftspaltes in Längs- und Querachse, der speziellen Polschuhform und der Beschränkung auf die Grundwelle der Induktionsverteilung. ξ_{schr} stellt in diesen Beziehungen den Schrägungsfaktor dar, der die Schrägstellung der Stator- oder Rotornuten und damit die verminderte Kopplung zwischen den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes berücksichtigt; für Wicklungen auf der selben Seite des Luftspaltes ist die Schrägung wirkungslos. Der Faktor 3/2 bei L_{hd} und L_{hq} steht für die Umrechnung der dreisträngigen Stranggrößen in zweisträngige Achsengrößen. Die Ankerwindungszahl w_a bezieht sich dabei auf einen Strang mit z_p am Umfang verteilten Teilsträngen, die Windungszahlen der Erreger- und der Ersatz-Dämpferwicklungen in Längs- und Querachse auf alle einer Achse zugeordneten Windungen der z_p Polpaare. Bei der verteilten Ankerwicklung tritt an die Stelle der tatsächlichen Windungszahl w_a die effektive Windungszahl $(w \xi_1)_a$; der Wicklungsfaktor ξ_1 steht dabei für die Minderung der in einer Wicklung mit $q_1 > 1$ durch die Induktionsgrundwelle induzierten Spannung bzw. der durch den Wicklungsstrom hervorgerufenen Induktionsgrundwelle infolge der Phasenverschiebungen der Spannungen und Ströme in den auf mehrere Nuten verteilten Wicklungsteilen einer Spulenseite.

Bei Synchronmaschinen mit Vollpolläufer wie auch bei Asynchronmaschinen wird längs des Umfanges überall mit dem „ideellen“ Luftspalt δ_i gerechnet. Diese Maschinen haben auch im Rotor (Systeme D und f) verteilten Wicklungen, so dass hier ebenfalls die effektiven Win-

dungszahlen (w_{ξ_1}) zu verwenden und eigentlich alle Polformkoeffizienten gleich eins zu setzen sind. Für die Gegeninduktivitäten der Ersatz-Dämpfer- und Erregerwicklungen ergibt das die Beziehungen

$$\begin{aligned} L_{aDd} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i (w_{\xi_1})_a (w_{\xi_1})_{Dd} \xi_{\text{schr}} & L_{aDq} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i (w_{\xi_1})_a (w_{\xi_1})_{Dq} \xi_{\text{schr}} \\ L_{afd} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i (w_{\xi_1})_a (w_{\xi_1})_{fd} \xi_{\text{schr}} & L_{afq} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i (w_{\xi_1})_a (w_{\xi_1})_{fq} \xi_{\text{schr}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da aber die Nutung in Polmitte und Pollücke bei Synchronmaschinen mit Vollpolläufer mitunter doch recht unterschiedlich ausgeführt ist oder nicht alle Nuten gleichmäßig belegt sind, muss insbesondere für L_{hd} und L_{hq} eine Anpassung durch die Polformkoeffizienten $C_{ad,1}$ und $C_{aq,1}$ an die realen Verhältnisse vorgenommen werden.

Für einen vollständigen Dämpferkäfig berechnet man die effektive Ersatz-Windungszahl der achsenbezogenen Ersatzwicklungen aus der Nutzahl N_D zu

$$(w_{\xi_1})_D = \frac{N_D}{4}. \quad (2.8)$$

Bei Asynchronmaschinen mit Käfigläufer wird der Käfig dagegen häufig in eine äquivalente dreisträngige Ersatz-Strangwicklung mit der Strang-Windungszahl

$$(w_{\xi_1})_D = \frac{N_D}{6} \quad (2.9)$$

überführt, so dass wie beim Schleifringläufer alle magnetischen Kopplungen zur dreisträngigen Ankerwicklung mit den Strang-Windungszahlen bestimmt werden. Deshalb entfallen dann bei den rotationssymmetrischen Asynchronmaschinen mit dreisträngigen (Ersatz-)Rotorwicklungen die Umrechnungsfaktoren $3/2$ in Gl. (2.6) für $L_{hd} = L_{hq}$.

Mit den Flussverkettungen der Ankerstränge und den Strangströmen folgt das Luftspalt-Drehmoment der Maschine aus der allgemeinen Energiebilanz zu [5]

$$m_{\delta} = \frac{z_p}{\sqrt{3}} [(\psi_a i_b - \psi_b i_a) + (\psi_b i_c - \psi_c i_b) + (\psi_c i_a - \psi_a i_c)]. \quad (2.10)$$

Im Verbraucher-Zählpeilsystem werden alle elektrisch zugeführten Leistungen und alle mechanisch abgeführten Leistungen positiv gerechnet, das Luftspaltmoment eines Generators ist bei positiver Winkelgeschwindigkeit also negativ.

2.3 Spannungsgleichungen des Polsystems

Im Gegensatz zum rotationssymmetrischen Anker mit seinen drei Wicklungssträngen sind im Polsystem die Wicklungen den beiden Symmetrieachsen, der Längs- und der Querachse, zugeordnet. In beiden Achsen liegen gleichartige Wicklungen mit gleichartigen Verkettungsmechanismen vor, alle Gleichungen haben gleiches Aussehen mit dem einzigen Unterschied, dass für alle Parameter und Variablen die Größen der betrachteten Achse, gekennzeichnet durch den Index d bzw. q , einzusetzen sind. In jeder dieser Gleichungen treten nur Größen einer Achse, der d - oder der q -Achse, auf. Um die Gleichartigkeit besonders hervorzuheben und unnötige Dopplungen zu vermeiden, werden nachfolgend für gleichartige Ausdrücke beider Achsen, wenn keine Missverständnisse möglich sind, diese nur einmal geschrieben mit dem verallgemeinerten Index x , für den bei der Zuordnung der Gleichung zu einer Achsen dann der entsprechende Achsenindex d bzw. q einzusetzen ist. Die Spannungsgleichungen für die kurzgeschlossenen Ersatz-Dämpferwicklungen und die Erregerwicklungen lauten damit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_{fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Dx} & 0 \\ 0 & R_{fx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Dx} \\ i_{fx} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{Dx} \\ \psi_{fx} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

mit den ebenfalls allgemein indizierten Flussverkettungen

$$\begin{aligned} \psi_{Dx} &= \frac{3}{2} L_{Dax} i_x + L_{DDx} i_{Dx} + L_{Dfx} i_{fx} + L_{afx} i_{tx} \\ \psi_{fx} &= \frac{3}{2} L_{fax} i_x + L_{fDx} i_{Dx} + L_{ffx} i_{fx} + L_{afx} i_{tx} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierin bedeuten L_{DDx} und L_{ffx} die Selbstinduktivitäten der beiden Polsystemkreise beider Achsen, während mit $L_{Dax} = L_{aDx}$ und $L_{fax} = L_{afx}$ die Gegeninduktivitäten zum Ankersystem sowie mit $L_{Dfx} = L_{fDx}$ die Gegeninduktivitäten der beiden Wicklungen einer Achse untereinander gekennzeichnet sind. Für Asynchronmaschinen mit dreisträngiger (Ersatz-)Rotorwicklung entfallen die Faktoren $3/2$.

2.4 Übersetzungsverhältnisse

Die gemeinsame Handhabung der Gleichungen für Ständer und Läufer wird vereinfacht, wenn alle Größen des Polsystems bzw. des Asynchronmaschinen-Läufers auf den Anker umgerechnet werden. Diese Transformation darf die Leistungsbeziehungen natürlich nicht verändern. Bewährt hat sich, die Polradkreise durch Einführung von Übersetzungsverhältnissen so auf die Ankerkreise umzurechnen, dass gleiche bezogene Ströme im Rotor wie im Anker einer Achse den gleichen Anteil zur Hauptflussverkettung dieser Achse beitragen und die bezogenen Gegeninduktivitäten der Polradkreise den Hauptinduktivitäten der achsengleichen Ankerwicklung entsprechen [5]

$$L'_{aDx} = L'_{Dax} = L'_{afx} = L'_{fax} = L_{hx} \quad (2.13)$$

Diese auf den Anker bezogenen Größen werden dabei vorerst mit „'“ gekennzeichnet.

Man erhält für eine verallgemeinerte Drehstrommaschine mit ausgeprägten Polen

$$\ddot{u}'_{aDx} = \frac{4 (w\xi_1)_a C_{ax,1}}{\pi w_{Dx} C_{Dx,1} \xi_{schr}} \quad \ddot{u}'_{afx} = \frac{4 (w\xi_1)_a C_{ax,1}}{\pi w_{fx} C_{fx,1} \xi_{schr}} \quad (2.14)$$

und für eine mit Vollpolläufer

$$\ddot{u}'_{aDx} = \frac{(w\xi_1)_a C_{ax,1}}{(w\xi_1)_{Dx} \xi_{schr}} \quad \ddot{u}'_{afx} = \frac{(w\xi_1)_a C_{ad,1}}{(w\xi_1)_{fx} \xi_{schr}} \quad (2.15)$$

Die Transformation der Ströme, Spannungen und Flussverkettungen sowie der Widerstände der f-Rotorwicklungen erfolgt nach den Beziehungen

$$i'_{fx} = \frac{2}{3} \frac{i_{fx}}{\ddot{u}'_{afx}}, \quad u'_{fx} = \ddot{u}'_{afx} u_{fx}, \quad \psi'_{fx} = \ddot{u}'_{afx} \psi_{fx}, \quad R'_{fx} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{afx}{}^2 R_{fx} \quad (2.16)$$

Die Umrechnung der Widerstände und Variablen der D-Wicklungen kann analog vorgenommen werden, interessiert jedoch meist nicht.

Für die auf die Ankerwicklungen bezogenen Gegen- und Selbstinduktivitäten der Rotorwicklungen erhält man, wieder mit dem allgemeinen Index x statt d und q, die Transformationsrelationen

$$\begin{aligned} L'_{aDx} &= L'_{Dax} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{aDx} L_{aDx} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{aDx} L_{Dax} = L_{hx} \\ L'_{afx} &= L'_{fax} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{afx} L_{afx} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{afx} L_{fax} = L_{hx} \\ L'_{Dfx} &= \frac{3}{2} \ddot{u}'_{aDx} \ddot{u}'_{afx} L_{Dfx} = \frac{3}{2} \ddot{u}'_{afx} \ddot{u}'_{aDx} L_{fDx} \\ L'_{Dx} &= \frac{3}{2} \ddot{u}'_{aDx}{}^2 L_{DDx} \\ L'_{fx} &= \frac{3}{2} \ddot{u}'_{afx}{}^2 L_{ffx} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Doppelindizes DD bzw. ff bei den Selbstinduktivitäten wurden dabei zu D bzw. f vereinfacht.

Für Drehstrom-Asynchronmaschinen mit dreisträngigen (Ersatz-)Rotorwicklungen gelten die vorstehenden Beziehungen ebenfalls, jedoch entfallen die Umrechnungsfaktoren 3/2, da die Achsenwicklungen für Anker und Rotor gleichermaßen aus dreisträngigen Wicklungen umgerechnet werden.

2.5 Zwei-Achsen-Transformation

Durch die Beziehungen (2.2) wurden die von den Ankerströmen hervorgerufene Durchflutungsverteilung in zwei achsenbezogene Komponenten zerlegt und dafür die fiktiven Achsenströme i_d und i_q eingeführt. Das brachte eine deutliche Vereinfachung in der Darstellung der Flussverkettungen, Gl. (2.4). Die Achsengrößen können so auch als Real- und Imaginärteil eines Stromzeigers in der komplexen Ebene mit der reellen Achse in der Längs- oder d-Achse gedeutet werden. Dieses Vorgehen zur Umrechnung von Strang- auf Achsengrößen lässt sich auch umkehren und damit als allgemeine Transformation nutzen. Für die Transformation der allgemeinen Stranggrößen g_a, g_b, g_c in ein um den Fortschrittswinkel ϑ verdrehtes d-q-Achsen-system gelten unter Berücksichtigung der gleichphasigen 0-Komponente also die Transformationsbeziehungen [5]

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{dq} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \vartheta & -\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Für die Rücktransformation gilt

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq}^{-1} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 1 \\ \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Tritt kein Nullsystem auf ($g_0 = 0$), können allgemein die Achsengrößen g_d und g_q aus den Stranggrößen g_a und g_b bzw. die Stranggrößen g_a und g_b aus den Achsengrößen g_d und g_q berechnet werden zu

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) & \sin \vartheta \\ \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad g_a + g_b + g_c = 0 \quad (2.20)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g_c = -(g_a + g_b). \quad (2.21)$$

Oft ist auch die Transformation eines dreisträngigen Systems in ein feststehendes zweiachsiges Koordinatensystem vorteilhaft. Bei Bindung dessen reellen Achse an den Strang a erhält man die α - β -0-Komponenten mit den Transformationsbeziehungen

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

und

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{-1} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Die α - β -0-Komponenten charakterisieren den sogenannten Raumzeiger der Stranggrößen in der komplexen Ebene mit am Strang a orientierter reeller Achse

$$\vec{\mathbf{g}} = g_\alpha + jg_\beta = \frac{2}{3} [g_a + g_b \mathbf{a} + g_c \mathbf{a}^2] \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (2.24)$$

Der Zusammenhang zwischen d-q- und α - β -Komponenten sowie deren Raumzeigern ist bei sich gegeneinander um den Winkel ϑ drehenden Koordinatensystemen gegeben durch die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

sowie

$$\vec{\mathbf{g}} = g_\alpha + jg_\beta = (g_d + jg_q) e^{j\vartheta}. \quad (2.26)$$

Ist $\vartheta \equiv 0$, stimmt einerseits die d- mit der α -Komponente und andererseits die q- mit der β -Komponente überein.