Photogrammetrie • Fernerkundung • Geoinformation 3/2000, S. 163–176

Moderne Orientierungsverfahren

WOLFGANG FÖRSTNER, Bonn

Zusammenfassung: Der Beitrag stellt neue direkte Orientierungsverfahren für ein, zwei und drei Bilder auf der Basis von beobachteten Punken und Geraden vor. Sie nutzen die algebraische projektive Geometrie und stützen sich auf wesentliche Forschungsergebnisse aus dem Bereich des Computer Vision. Sie sind insbesondere zur Nutzung bei automatischen Bildorientierungsverfahren und zur Näherungswertbestimmung von Punkten, Geraden und Orientierungsparametern im Nahbereich geeignet.

Summary: *Modern Orientation Procedures.* The paper presents new orientation procedures for one, two and three images based on observed points and straight lines. They use algebraic projective geometry and heavily rely on research results from Computer Vision. They are useful for all types of automatic orientation procedures and for determining initial values of points, lines and orientation parameters in close range applications.

1 Motivation

Photogrammetrie wird im weiteren Sinn als Technologie zur Erfassung von räumlichen Daten aus Bildern für Geoinformationssysteme, im engeren Sinn (i. e. S.) als wissenschaftliche Disziplin verstanden, die sich mit der geometrischen Analyse flächenhaft erfaßter Daten, speziell von Bildern befaßt. Orientierungsverfahren stellen bis heute einen zentralen Teil der Aufgabe der Photogrammetrie i.e.S. dar. Auch wenn neuere Technologien wie GPS, Dreizeilenkameras und Laserabtastsysteme Anforderungen an erweiterte Orientierungsverfahren stellen, steht das Interesse an diesem Thema, verglichen mit der Integration von Bildanalysetechniken, seit langer Zeit nicht im Vordergrund der Forschung.

Anders stellt sich die Situation in den Nachbardisziplinen, vor allem dem Bildverstehen, dem maschinellen Sehen oder allgemein dem Computer Vision dar. Hier wird über mehr als zehn Jahre das Problem der Orientierung von Kameras aus Bildern behandelt. Der Höhepunkt dieser Entwicklung scheint bereits überschritten, nachdem man die Orientierung des Einzelbildes und des Bildpaares vollständig, die des Bildtripels sehr gut, Bildverbände, vor allem monoskopische oder stereoskopische Bildfolgen, in ihrer Struktur gut verstanden hat und sich derzeit der optimalen Bestimmung mit Hilfe selbstkalibrierender Bündelausgleichung mit allen ihren Problemen zuwendet.

Die Entwicklung ist fast spurlos an der Photogrammetrie vorbeigegangen. Mit Argumenten wie *das Rad würde neu erfunden oder die Genauigkeit der vorgeschlagenen Lösungen sei geringer* wurden die Entwicklungen als uninteressant oder irrelevant abgetan. Die Frage von O. FAUGERAS, eines sehr renommierten Wissenschaftler im Bereich Computer Vision an mich 1996, weshalb denn die Photogrammeter so wenig über Projektive Geometrie wüßten, konnte ich mit der *Überflüssigkeit* bei der Aerotriangulation, dem Hauptanwendungsgebiet von Orientierungsverfahren der Photogrammetrie i.e.S., zwar mit einer wahren Erklärung begegnen, traf damit aber sicher nicht ganz den Sinn der Frage.

Offenbar besteht Klärungsbedarf: denn weder waren alle Forschungsergebnisse zu Orientierungsverfahren aus dem Bereich

1432-8364/00/2000/0163 $ 3.50

Computer Vision den Photogrammetern schon bekannt, noch zielten die Entwickler dieser Verfahren auf höchste Genauigkeit, noch sind die Ergebnisse irrelevant für die Photogrammetrie.

Dies zu belegen ist das Hauptmotiv für diesen Beitrag. Er stellt einen von zwei Aspekten bei der geometrischen Analyse dar, die auf einem Vortrag bei der DGPF Jahrestagung in Essen 1999 thematisiert wurden: moderne Orientierungsverfahren. Dabei ergeben sich z.T. sehr einfache neue Lösungen für klassische Fragestellungen. Der andere Aspekt, die Repräsentation unsicherer geometrischer Elemente im Raum und ihrer Relationen, auf die im folgenden gelegentlich zurückgegriffen wird, ist in FÖRSTNER (2000b) zu finden.

Warum sich also mit Orientierungsverfahren befassen? Die Rolle der Photogrammetrie, neue Anwendungen, Automatisierung und nicht zuletzt die grundsätzliche Aufgabe der geometrischen Auswertung von Bildern sind gute Gründe:

1. Geometrische Methoden sind weiter zu fassen als bisher: direkte Lösungen zur Bestimmung von Näherungswerten, die Nutzung von Geraden und Kegelschnitten als Beobachtungen in der sog. Linienphotogrammetrie, allgemeinere Lösungen mit weniger Sonderfällen lassen sich in einem theoretischen Rahmen darstellen. Er stützt sich auf die Algebraische Projektive Geometrie und zielt auf eine Integration von leistungsfähigen Verfahren zur Näherungswertbestimmung und strengen Lösungen.
2. Die Automatisierung führt zu einem Paradigmenwechsel: Die Analyse erfolgt schon lange nicht mehr manuell, sondern automatisch. Daher können Ableitungen weniger geometrisch und mehr algebraisch erfolgen und dürfen daher weniger anschaulich sein.
   Die Integration von statistischer Modellierung, analytischer Geometrie des Raums, automatischer Bildzuordnung und Gruppierung kann nur bei einer klaren objektorientierten Modellierung in Software gegossen werden, die einen hohen Abstraktionsgrad erfordert und durch die verallgemeinerten geometrischen Ansätze unterstützt wird.
3. Neue Anwendungen ergeben sich vor allem im Nahbereich aus der zunehmenden Nutzung von Video- und CCD-Kameras, wie etwa bei der bildgestützten Fahrzeugnavigation oder Fahrerassistenz, bei der Virtuellen Realität zur Erfassung der 3D-Struktur von Umgebungen, bei der Erweiterten Realität, etwa zum Zweck der Einspielung von Daten eines 3D-GIS in ein head-mounted display, z. B. zur Visualisierung unterirdischer Leitungen. Hier ist oft die innere Orientierung entweder gar nicht bekannt oder nicht stabil und erfordert daher allgemeinere geometrische Techniken für die geometrische Analyse.
4. Die Rolle der Photogrammetrie innerhalb der Nachbardisziplinen ist seit längerer Zeit in der Diskussion. Die Ansätze zur Nutzung der Projektiven Geometrie aus der Geschichte der Photogrammetrie wurden nicht weiter verfolgt, aber im Bereich Computer Vision aufgegriffen, aktualisiert und erweitert. Die Ergebnisse lassen sich ohne weiteres in andere Bereiche der Geodäsie, etwa der 3D-Vermessung übertragen. M.E. ist der wissenschaftliche Austausch mit dem Bereich Computer Vision eine zentrale Aufgabe der Photogrammetrie im engeren Sinn.

Der Beitrag konzentriert sich auf die Orientierung von einem, zwei und drei Bildern und stellt die dafür erforderlichen Beziehungen auf der Grundlage homogener Koordinaten (SEMPLE & KNEEBONE 1952) bereit. Er leitet für diese drei Fälle jeweils *Prädiktions-* und *Bedingungsgleichungen* her. Neben *Punkten* werden *Geraden als beobachtete Größen* mit einbezogen. Die Beziehungen, die in Tab. 1 zusammengestellt sind, sind *linear* in den betroffenen Koordinaten und den Orientierungsparametern. Dies ermöglicht *direkte Lösungen*, die bei robusten Verfahren (FISCHLER & BOLLES 1981, ROUSSEEUW & LEROY 1987) gebraucht werden.

In allen Fällen wird lediglich Basiswissen aus der Linearen Algebra benötigt. Der weniger an der Algebra interessierte Leser überfliegt am besten alle Formeln.

Tab. 1: Prädiktion und Bedingungen von Punkten P und Geraden l für die Orientierung von Bildern. Für die Gl. (23) und (25) gilt die Einsteinsche Summenkonvention: über gleichlautende Indizes wird summiert. Die Vektoren $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1(x')$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(y')$ usw. sind linear von den Bildkoordinaten x', y' usw. und linear von den Elementen der Projektionsmatrizen P_i abhängig. Die Beziehungen sind unabhängig von der Parametrisierung der Abbildung, gelten also für Kameras mit und ohne Kenntnis ihrer Kalibrierung.

Aufgabe	ein Bild	zwei Bilder	drei Bilder
Präd. P	$\mathbf{x}' = \mathsf{P}\mathbf{X}$ (8)	$\mathbf{l}'' = \mathsf{F}^T\mathbf{x}'$ (18)	$x_l''' = x_k'(x_i'' T_{kjl} - x_j'' T_{kil})$ (25)
Präd. l	$\mathbf{l}' = \overline{\mathsf{P}}\mathbf{L}$ (11)	–	$l_i' = l_j'' l_k''' T_{ijk}$ (23)
Bed. P	$\mathbf{A}_1^T\mathbf{X} = 0$ (10) $\mathbf{B}_1^T\mathbf{X} = 0$	$\lvert\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\rvert = 0$ (19) oder $\mathbf{x}'^T\mathsf{F}\mathbf{x}'' = 0$ (17)	$\lvert\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2\rvert = 0$ (24) $\lvert\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3\rvert = 0$ $\lvert\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_3\rvert = 0$
Bed. l	$\overline{\mathbf{A}}_1^T\mathbf{L} = 0$ (12) $\overline{\mathbf{B}}_1^T\mathbf{L} = 0$	–	$\lvert\mathbf{1}, \mathsf{P}_1^T\mathbf{l}'^T, \mathsf{P}_2^T\mathbf{l}''^T, \mathsf{P}_3^T\mathbf{l}'''^T\rvert = 0$ (21) $\lvert\mathbf{2}, \mathsf{P}_1^T\mathbf{l}'^T, \mathsf{P}_2^T\mathbf{l}''^T, \mathsf{P}_3^T\mathbf{l}'''^T\rvert = 0$

2 Homogene Koordinaten

Homogene Kordinaten vereinfachen die Darstellung räumlicher Beziehungen in zweierlei Hinsicht:

1. Alle geradentreuen Abbildungen lassen sich als Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen, sodaß insbesondere die Verkettung und die Inversion solcher Abbildungen unmittelbar angebbar sind. Unter diesen Abbildungen sind neben der projektiven Abbildung und der Perspektive vor allem die Affinabbildung, die Ähnlichkeitstransformation und die ebene bzw. räumliche Bewegung.
2. Die Verknüpfungen räumlicher Elemente lassen sich als Bilinearformen darstellen, was die Formulierung von Bedingungen sehr stark vereinfacht.

Beide Eigenschaften lassen sich bei der Orientierungsbestimmung von Kameras vorteilhaft nutzen.

Homogene Koordinaten entstehen aus Euklidischen Koordinaten durch Zufügen einer weiteren Koordinate und freie Skalierung. Wir erhalten daher für Punkte P:

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und daher in der Ebene}$$

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{mit } x = \frac{u}{w},\ y = \frac{v}{w}$$

bzw. im Raum

$$\mathbf{X} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } X = \frac{U}{T},\ Y = \frac{V}{T},\ Z = \frac{W}{T}$$

Wir unterscheiden in der Notation homogene Vektoren $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{X}$ und Matrizen P, die bei Umskalierung das gleiche Objekt repräsentieren und aufrecht fett dargestellt werden, und Euklidische Vektoren $\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{X}$ und Matrizen $\boldsymbol{R}$, die kursiv und fett dargestellt werden.

Geraden $l(\mathbf{l})$ in der Ebene und Ebenen $\varepsilon(\mathbf{P})$ im Raum werden ebenfalls mit homogenen Parametern, ebenfalls als homogene Koordinaten bezeichneten Größen repräsentiert. Die Inzidenzrelation $ax + by + c = 0$ von Punkt $P(\mathbf{x})$ und Gerade $l(\mathbf{l})$ in der Ebene lautet mit den homogenen Geradenparametern

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{nun} \quad \mathbf{x}^T\mathbf{l} = \mathbf{l}^T\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = 0$$

Im Raum erhält man für die Inzidenzrelation $AX + BY + CZ + D = 0$ von Punkt

$P(\mathbf{X})$ und Ebene $\varepsilon(\mathbf{A})$ mit den homogenen Ebenenparametern

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

die Relation

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = 0$$

Man beachte: die Relationen bleiben erhalten, wenn man die homogenen Koordinaten mit einem beliebigen Faktor $\neq 0$ multipliziert.

Die Raumgerade L durch die Punkte $P(\mathbf{X})$ und $Q(\mathbf{Y})$ wird durch einen 6-Vektor, die sog. *Plückerkoordinaten*

$$\mathbf{L} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L} \\ \hline \boldsymbol{L}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 Y_1 - X_1 Y_4 \\ X_4 Y_2 - X_2 Y_4 \\ X_4 Y_3 - X_3 Y_4 \\ \hline X_2 Y_3 - X_3 Y_2 \\ X_3 Y_1 - X_1 Y_3 \\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

repräsentiert, der alle 6 verschiedene Formen $X_i Y_j - X_j Y_i, \forall i \neq j$ der definierenden Objektpunkte $\mathbf{X} = (X_i)$ und $\mathbf{Y} = (Y_i)$ enthält. Der erste Teilvektor $\boldsymbol{L}$ enthält die Richtung $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}$ der Geraden, der zweite Teilvektor $\boldsymbol{L}_0$ enthält die Normale $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ auf derjenigen Ebene, die durch den Ursprung und die Gerade geht, wie man sich durch Division mit $X_4 Y_4$ überzeugen kann. Die Repräsentation ist homogen, da sie invariant gegen die Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ist. Außerdem gilt wegen $(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}) \cdot (\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}) = \mathbf{0}$ die sog. *Plükkerbedingung:*

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}_0 = 0$$

Daher besitzt die Raumgerade nur vier Freiheitsgrade.

Die lineare Abbildung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' : \mathbf{x}' = \mathsf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

der Ebene bzw. des Raums ist geraden- bzw. ebenentreu. Denn aus der Punkt-Geraden-Inzidenz $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} = 0$ in der Ebene folgt wegen $\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{l}' = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}' = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} = \mathbf{0}$ die allgemeine Transformationsvorschrift für *Geraden in der Ebene*

$$\mathbf{l}' = (\mathsf{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$$

bzw. analog für Ebenen im Raum

$$\mathbf{A}' = (\mathsf{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$$

falls $|\mathsf{C}| \neq 0$. Umgekehrt kann man nach dem Hauptsatz der Projektiven Geometrie jede geradentreue Abbildung mit homogenen Koordinaten durch (2) dargestellen (FISCHER 1985). Die Matrix C ist ebenfalls homogen in dem Sinn, daß eine Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ die Abbildung nicht ändert.

Die linearen Abbildungen (2) enthalten folgende praktisch wichtigen Spezialfälle

$$\text{Translation:} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Rotation:} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Ähnlichkeit:} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die Verknüpfung zweier Abbildungen $\mathbf{x}' = \mathsf{C}\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'' = \mathsf{D}\mathbf{x}'$ ist offenbar $\mathbf{x}'' = \mathsf{DC}\mathbf{x}$ und die Inverse Abbildung von $\mathbf{x}' = \mathsf{C}\mathbf{x}$ ist $\mathbf{x} = \mathsf{C}^{-1}\mathbf{x}'$ falls C regulär ist.

Einen in unserem Kontext wichtigen Spezialfall stellt die perspektive Abbildung vom Raum auf eine Bildebene dar. Falls in einem lokalen räumlichen Koordinatensystem, das im Projektionszentrum O liegt, die Bildebene die Gleichung $z = c$ hat, c die Kamerakonstante und (x'_H, y'_H) der Hauptpunkt sind, wird der Raumpunkt $P(X, Y, Z)$ in den Bildpunkt $P'(x', y')$ mit $x' = cX/Z + x'_H, y' = cY/Z + y'_H$ abgebildet. Diese Abbildung lautet in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & x'_H & 0 \\ 0 & c & y'_H & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder mit der auftretenden 3×4 Projektionsmatrix P

$$\underset{3\times 1}{\mathbf{x}'} = \underset{3\times 4}{\mathsf{P}}\ \underset{4\times 1}{\mathbf{X}}$$

Diese Beziehung stellt offenbar einen Spezialfall der direkten linearen Transformation

(DLT) dar. Die Zerlegung der Projektionsmatrix **P** ist die Grundlage für eine explizite Repräsentation der inneren und äußeren Orientierung bei der DLT.

3 Orientierung des Einzelbildes

Wir wollen nun den Abbildungsvorgang, allgemein modellieren, die DLT in Beziehung zu den Parametern der inneren und äußeren Orientierung bringen und eine direkte Lösung für die Bestimmung dieser Parameter angeben.

3.1 *Lineare Bedingungen für die Kollinearität*

3.1.1 *Abbildung des Punktes*

Gegeben sei ein Objektpunkt $P(\mathbf{X})$. Die äußere Orientierung einer Kamera sei mit dem Projektionszentrum $O(\mathbf{X}_o)$ und der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}$ repräsentiert. Die innere Orientierung sei mit der Kamerakonstanten c, dem Hauptpunkt (x'_H, y'_H), dem Maßstabsunterschied m der Achsen und der Scherung der Achsen s modelliert.

Dann erhalten wir die Darstellung für die homogenen Koordinaten $\mathbf{x}'$ des Bildpunktes

$$\boxed{\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & s & x'_H \\ 0 & 1+m & y'_H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{X}_o \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ 1 \end{pmatrix}} \tag{6}$$

Von rechts nach links erkennen wir die Translation mit $\mathbf{X}_o$, die Rotation mit $\boldsymbol{R}$, die Projektion mit c und die Berücksichtigung der inneren Orientierung.

Zur Vereinfachung der Darstellung fassen wir die 5 gewählten Parameter der inneren Orientierung in der Kalibriermatrix

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K} &\doteq \begin{pmatrix} c & cs & x'_H \\ 0 & c(1+m) & y'_H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & s & x'_H \\ 0 & 1+m & y'_H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

zusammen. Mit der Projektionsmatrix

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{K}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} | -X_o)} \tag{7}$$

erhalten wir schließlich

$$\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{X}} \tag{8}$$

Sie dient zur *Prädiktion* von Objekt- in Bildpunkte. Die 3×4-Projektionsmatrix hat wegen der Homogenität nur 11 frei wählbare Parameter. Gl. (7) stellt die Elemente dieser Matrix in Abhängigkeit von den gewählten 11 Parametern der Orientierung explizit dar.

Wir verwenden im folgenden wahlweise die Komponenten P_{ij}, die drei Zeilenvektoren $\mathbf{1}^T$, $\mathbf{2}^T$, $\mathbf{3}^T$ und die Spaltenvektoren $\mathbf{s}_i$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^T \\ \mathbf{2}^T \\ \mathbf{3}^T \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4)$$

So gelten z. B. auch folgende Darstellungen der Abbildungsgleichung der DLT:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{2} \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{3} \cdot \mathbf{X} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{s}_j X_j \tag{9}$$

Die *Prädiktion* des Bildpunktes aus dem Objektpunkt erfolgt explizit mit Hilfe der bekannten *Kollinearitätsgleichung*

$$x' = \frac{u'}{w'} = \frac{\mathbf{1} \cdot \mathbf{X}}{\mathbf{3} \cdot \mathbf{X}} \qquad y' = \frac{v'}{w'} = \frac{\mathbf{2} \cdot \mathbf{X}}{\mathbf{3} \cdot \mathbf{X}}$$

Daraus kann man die *Bedingungen* für homologe Objekt- und Bildpunkte

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{pmatrix} \mathbf{X} \doteq \begin{pmatrix} u'\mathbf{3}^T - w'\mathbf{1}^T \\ v'\mathbf{3}^T - w'\mathbf{2}^T \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}} \tag{10}$$

ableiten.

3.1.2 *Zur Parametrisierung der Inneren Orientierung*

Hier ist eine Diskussion über die Modellierung der Orientierung von Kameras angebracht:

1. Die Innere Orientierung enthält bekanntlich alle Parameter der Kamera, die erforderlich sind, damit man mit hinreichen-

der Genauigkeit von der Richtung des bildseitigen Strahls $(P'O)$ auf die Richtung des objektseitigen Strahls (OP) schließen kann. Bei hohen Genauigkeitsansprüchen, schlechter Optik oder ungünstigen Eigenschaften des Sensors (CCD-Chip oder Film) sind viele zusätzliche Parameter erforderlich. Üblicherweise werden sie in Gruppen genannt, zunächst die Kamerakonstante, dann der Hauptpunkt, danach alle anderen, unter ihnen auch Parameter zur Modellierung von Bildfehlern, die dazu führen, daß Geraden nicht mehr in Geraden abgebildet werden.

Es ist nach der obigen Darstellung der Abbildungsbeziehung offenbar sinnvoll, zunächst zwei Gruppen von Parametern zu unterscheiden: (1) Parameter die ein projektives, also geradentreues Modell darstellen, das sind die o. g. 5 Parameter (Kamerakonstante, Hauptpunkt, Maßstabsverhältnis und Scherung) und (2) alle übrigen Parameter, die dann *jeder für sich* und in ihrer Gesamtheit dazu führen, dass Geraden nicht in Geraden abgebildet werden. Eine weitere Unterteilung vor allem der ersten Gruppe kann sinnvoll sein.

2. Die weitere Zerlegung der *allgemeinen* Projektionsmatrix $\mathbf{P}_a$, die auch die nicht-geradentreuen Elemente der Abbildung modelliert, in ein Produkt

$$\mathsf{P}_a = \begin{pmatrix} c & cs & x'_H + \Delta x' \\ 0 & c(1+m) & y'_H + \Delta y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I} | - x_o)]$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x' \\ 0 & 1 & \Delta y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{P} = d\boldsymbol{K}\,\mathsf{P}$$

legt eine Schnittstelle i. S. eines EDV-*Austauschformats für die Orientierung* einer Kamera, bzw. eines Bildes nahe:

(a) Falls die Abbildung mit hinreichender Genauigkeit eine projektive ist, genügt die Angabe der 3×4-Matrix P. Damit entfällt die oft lästige Rückfrage nach den Formeln, nach der Reihenfolge von Translation und Rotation oder gar nach der Reihenfolge und Art der Drehwinkel (vgl. RAGIA & LAING). Bei Luftbildkameras dürfte dieser Fall fast immer zum Zug kommen.

(b) Im anderen Fall genügt die zusätzliche – in welcher Form auch immer repräsentierte – Angabe der ortsabhängigen Korrekturen $(\Delta x', \Delta y')$ zum Aufbau der dann ortsabhängigen Matrix $d\boldsymbol{K}$ bzw. zur Reduktion der beobachteten Bildkoordinaten auf den *projektiven* Fall. Diese Korrekturen dürften in fast allen Fällen sehr klein sein.

3.1.3 *Interpretation der Projektionsmatrix*

Die drei 4-Vektoren **1**, **2** und **3**, die Zeilen der Projektionsmatrix, haben folgende geometrische Bedeutung (FAUGERAS & PAPADOPOULO 1997, STEINES 1998, STEINES & ABRAHAM 1999), die wir im folgenden intensiv nutzen wollen:

1. Die y'-Achse im Bild ist gekennzeichnet durch die Bedingung $u' = 0$. Wegen $u' = \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} = 0$ stellt der 4-Vektor **1** eine Ebene durch die y'-Achse dar.
2. Die x'-Achse im Bild ist gekennzeichnet durch die Bedingug $v' = 0$. Wegen $\mathbf{2} \cdot \mathbf{X} = 0$ ist **2** eine Ebene durch die x'-Achse.
3. Die Bedingung $w' = 0$ kennzeichnet unendlich ferne Punkte der Bildebene. Daher repräsentiert wegen $\mathbf{3} \cdot \mathbf{X} = 0$ der Vektor **3** eine Ebene parallel zu Bildebene. Sie liegt außerhalb der Bildebene, da sonst auch u' und $v' = 0$ wären.

Der Schnitt dieser drei Ebenen bildet offenbar das Projektionszentrum, da $\mathbf{PX}_o = \mathbf{0}$ gilt.

Die Vektoren **A** und **B** in (10) haben auch eine wohldefinierte geometrische Bedeutung: Der Zeilenvektor **A** repräsentiert eine Ebene durch das Projektionszentrum der Kamera, da er eine Linearkombination der Ebenenvektoren **1** und **3** ist. Sie geht durch die y-Achse der Kamera, da diese in beiden Ebenen **1** und **3** etc. enthalten ist; sie geht wegen (9) durch den Bildpunkt P'; daher schneidet sie die Bildebene in der Geraden

$x' = x'_{P'}$. Wir bezeichnen die Ebene **A** als x-Koordinatenebene des Punktes P'. Entsprechendes gilt für den Vektor **B**: Die durch **B** repräsentierte y-Koordinatenebene geht durch das Projektionszentrum, durch den Bildpunkt P' und die Bildgerade $y' = y'_{P'}$. Der Schnitt der Ebenen **A** und **B** ist daher der Raumstrahl $(P'OP)$.

Mit diesen Ebenen lassen sich später auch sehr einfach Bedingungen zwischen den Bildkoordinaten des Bildpaars und des Bildtriples bilden.

3.1.4 *Abbildung der Geraden*

Raumgeraden können auch zur Orientierung des Einzelbildes beitragen. Jedoch sind die Beziehungen zwischen Bild- und Objektgeraden nicht mehr linear (Faugeras & Mourrain 1995).

Die Bildgerade $\mathbf{l}'$ ergibt sich aus den Endpunkten $\mathbf{x}' = \mathsf{P}\mathbf{X} = (\mathbf{1}\cdot\mathbf{X}, \mathbf{2}\cdot\mathbf{X}, \mathbf{3}\cdot\mathbf{X})^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{y}' = \mathsf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{1}\cdot\mathbf{Y}, \mathbf{2}\cdot\mathbf{Y}, \mathbf{3}\cdot\mathbf{Y})^{\mathrm{T}}$ eines Geradenstücks durch $\mathbf{l}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{y}'$ (Förstner 2000b) oder

$$\mathbf{l}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}\cdot\mathbf{X} \\ \mathbf{2}\cdot\mathbf{X} \\ \mathbf{3}\cdot\mathbf{X} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{1}\cdot\mathbf{Y} \\ \mathbf{2}\cdot\mathbf{Y} \\ \mathbf{3}\cdot\mathbf{Y} \end{pmatrix}$$

Dieses Kreuzprodukt läßt sich in mehreren Schritten umformen, etwa erhält man für das erste Element $a' = (\mathbf{2}\cdot\mathbf{X})(\mathbf{3}\cdot\mathbf{Y}) - (\mathbf{2}\cdot\mathbf{Y})(\mathbf{3}\cdot\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{2}\mathbf{3}^{\mathrm{T}} - \mathbf{3}\mathbf{2}^{\mathrm{T}})\mathbf{Y} = \sum_{ij} X_i (2_i 3_j - 3_i 2_j)\, Y_j$ oder, da die Matrix $\mathbf{2}\mathbf{3}^{\mathrm{T}} - \mathbf{3}\mathbf{2}^{\mathrm{T}}$ schiefsymmetrisch ist

$$a' = \sum_{i>j} (2_i 3_j - 3_i 2_j)(X_i Y_j - Y_j X_i)$$

Dies ist aber das Skalarprodukt der 6-Vektoren $\mathbf{2} \wedge \mathbf{3}$ und $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$. Der erste Vektor $\mathbf{2} \wedge \mathbf{3}$, repräsentiert die (duale) Schnittgerade der Ebenen **2** und **3**, der zweite Vektor $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ die Raumgerade durch **X** und **Y** vgl. Gl. (1)). Daher erhalten wir mit der 3×6-Matrix

$$\overline{\mathsf{P}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{1}} \\ \overline{\mathbf{2}} \\ \overline{\mathbf{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \wedge \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \wedge \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \wedge \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

folgende *Prädiktionsgleichung* der Raumgeraden

$$\boxed{\mathbf{l}' = \overline{\mathsf{P}}\mathbf{L}} \qquad (11)$$

Analog zu (10) können wir hier zwei *Bedingungen* für homologe Objekt- und Bildgeraden angeben:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbf{L} \doteq \begin{pmatrix} a'\overline{\mathbf{3}}^{\mathrm{T}} - c'\overline{\mathbf{1}}^{\mathrm{T}} \\ b'\overline{\mathbf{3}}^{\mathrm{T}} - c'\overline{\mathbf{2}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbf{L} = \mathbf{0}} \qquad (12)$$

Bei Kenntnis von 9 oder mehr Geraden im Raum und im Bild kann man analog zur DLT mit Punkten auf die Projektionsmatrix $\overline{\mathsf{P}}$ schließen. Die Ebenen **1**, **2** und **3** und daher die Projektionsmatrix **P** ergeben sich danach als paarweise Verbindung dieser Geraden.

Offenbar gehen die Parameter der Punkt-Projektionsmatrix P quadratisch in die Geraden-Projektionsmatrix $\overline{\mathsf{P}}$ ein, weshalb hier eine Integration von Punkten und Geraden bei der Orientierungsbestimmung nicht so einfach ist.

3.2 *Bestimmung der Projektionsmatrix*

Wir wollen nun ein direktes Verfahren zur Bestimmung der inneren und äußeren Orientierung angeben, das sich auf den projektiven Fall stützt.

Direkt wird ein Verfahren dann genannt, wenn es ohne Näherungswerte und Iterationen auskommt. Dabei werden Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms, unabhängig von der Ordnung, meistens zu den direkten gezählt, da die Nullstellenlöser der numerischen Mathematik ohne Näherungswerte auskommen und, trotz der internen Iterationsprozesse, als hinreichend ausgereift angesehen werden, da die Rechenzeit prädizierbar ist.

Direkte Verfahren werden bei robusten Schätzern eingesetzt, bei denen durch zufälliges oder systematisches Probieren ein Minimalsatz richtiger Beobachtungen gesucht wird, der durch möglichst viele Beobachtungen bestätigt wird (Fischler & Bolles 1981, Rousseeuw & Leroy 1987).

Das vorgestellte Verfahren ist zweistufig. Die erste Stufe ist von der Lösung der DLT her bekannt.

In der ersten Stufe nutzen wir die drei Zeilenvektoren **1**, **2** und **3** der Projektionsmatrix (7). Bei $n \geq 6$ homologen Punkten in allgemeiner Lage erhalten wir mit den Bildkoordinaten (x_i', y_i') und den homogenen Vektoren $\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} = (X, Y, Z, 1)_i$ der Objektkoordinaten ein lineares homogenes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_i'(\mathbf{3} \cdot \mathbf{X}_i) - (\mathbf{1} \cdot \mathbf{X}_i) \\ y_i'(\mathbf{3} \cdot \mathbf{X}_i) - (\mathbf{2} \cdot \mathbf{X}_i) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & x_i'\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} & y_i'\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

oder

$$\mathsf{A}_i \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

das sich mit dem 12-Vektor $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{2}^{\mathrm{T}}, \mathbf{3}^{\mathrm{T}})$ der Elemente der Projektionsmatrix in der Form $\mathsf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ mit $\mathsf{A} = (\mathsf{A}_i)$ darstellen läßt. Offenbar ist die beste Schätzung für $\mathbf{u}$ der zum kleinsten Eigenwert gehörige Eigenvektor der $2n \times 12$-Matrix A. Da das System homogen ist, ist die Lösung bis auf einen unbekannten Faktor eindeutig.

Singuläre Fälle treten auf, falls die Objektpunkte in einer Ebene oder auf einer Kurve 3. Ordnung liegen ((Faugeras 1993) S. 61).

3.3 *Bestimmung der inneren und äußeren Orientierung*

In der zweiten Stufe bestimmen wir nun die 6 Parameter der äußeren und die 5 Parameter der inneren Orientierung aus der geschätzten Projektionsmatrix:

$$\widehat{\mathsf{P}} = (\widehat{\mathbf{1}}\ \widehat{\mathbf{2}}\ \widehat{\mathbf{3}})^{\mathrm{T}} = (\mathsf{A} \,|\, \mathbf{b}) = (\widehat{\mathsf{K}}\widehat{R} \,|\, -\widehat{\mathsf{K}}\widehat{R}\widehat{X_o})$$

Sie läßt sich in eine linke 3×3-Matrix A und einen rechen 3×1-Vektor $\mathbf{b}$ zerlegen. Die Berechnung erfolgt in vier Schritten:

$$\widehat{X_o} = -\mathsf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (13)$$

$$\widehat{\mathsf{K}}\widehat{\mathsf{K}}^{\mathrm{T}} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}} \quad \text{nach Choleski} \qquad (14)$$

$$\widehat{R} = \widehat{\mathsf{K}}^{-1}\mathsf{A} \qquad (15)$$

$$\widehat{\mathsf{K}} = \frac{1}{\widehat{\mathsf{K}}_{33}}\widehat{\mathsf{K}} \qquad (16)$$

Die Choleski-Zerlegung ergibt sich aus $\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = \mathsf{K}R(\mathsf{K}R)^{\mathrm{T}} = \mathsf{K}\mathsf{K}^{\mathrm{T}}$ und der Eigenschaft von K, eine obere Dreiecksmatrix zu sein. Die Normierung von K in Gl. (16) ist erforderlich, falls man die Parameter der inneren Orientierung interpretieren will. Das Verfahren ist wegen der Allgemeinheit des Modells deutlich einfacher als das in Bopp & Kraus (1978).

4 Orientierung des Bildpaars

Die relative Orientierung des Bildpaars geht von n homologen Punkten $P'(\mathbf{x}_i')$ und $P''(\mathbf{x}_i'')$ aus. Wir nehmen folgende Projektionsmatrizen

$$\mathsf{P}_1 = \mathsf{K}'R'(I|\mathbf{0}) \qquad \mathsf{P}_2 = \mathsf{K}''R''(I|-\mathbf{T})$$

an, die dem Fall der Bilddrehungen und für $R' = \mathbf{0}$ dem Folgebildanschluß zweier Kameras mit verschiedener innerer Orientierung entsprechen. Gesucht sind die Richtung der Basis und die Rotationsmatrix, u. U. weitere Parameter der inneren Orientierung. Die Länge $|\mathbf{T}|$ der Basis kann frei gewählt werden.

Das in der Photogrammetrie übliche Festhalten einer der Komponenten der Basis, meist die x-Komponente, hat den Nachteil, daß im Fall, daß die Basis in Aufnahmerichtung liegt, wie bei Anwendungen in Fahrzeugen und Vorwärtssicht, die Lösung der relativen Orientierung instabil oder unmöglich wird. Auch erscheint es plausibler, die *Richtung* der Basis, d. h. der Richtung zum Projektionszentrum der zweiten Kamera in Bezug auf die erste Kamera, explicit zur Parametrisierung zu verwenden, da dann die relative Orientierung nur durch *Winkel* repräsentiert wird. Denn aus Richtungen, hier der Strahlenbündel, lassen sich nur Richtungen oder Winkel, keine Strecken, etwa Basiskomponenten, ableiten.

4.1 *Die Bilineare Koplanaritätsbedingung für homologe Punkte*

Zur Darstellung der Koplanaritätsbedingung reduzieren wir die beobachteten Bildpunkte in das erste System einer idealen Kamera mit Projektionsmatrix $(I|\mathbf{0})$ und erhalten die *reduzierten Bildkoordinaten*, gekennzeichnet durch den Hoch-Index 'k'

$${}^k\mathbf{x}' = \boldsymbol{R}'^{-1}\mathbf{K}'^{-1}\mathbf{x}' \qquad {}^k\mathbf{x}'' = \boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}\mathbf{x}''$$

Sie beziehen sich also auf zwei in negativer z-Richtung ausgerichtete Kameras in $O'(\mathbf{0})$ bzw. $O''(\mathbf{T})$ mit Kamerakonstanten der Länge 1. Die Orientierung der beiden Bild- bzw. Kamerasysteme, die durch den Index k gekennzeichnet sind, ist daher parallel zum Objektkoordinatensystem, in dem auch der Basisvektor $\mathbf{T} \doteq {}^k\mathbf{T}$ angegeben ist.

Die Bedingung, daß sich die Strahlen schneiden sollen, verlangt die Koplanarität von $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ und $\mathbf{T}$, dargestellt im gleichen Koordinatensystem, also:

$${}^k\mathbf{x}' \cdot ({}^k\mathbf{T} \times {}^k\mathbf{x}'') = {}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_T\,{}^k\mathbf{x}''$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$\boldsymbol{S}_X = \boldsymbol{S}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Vektor $\boldsymbol{X}$, der das Vektorprodukt $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ zweier Vektoren als Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen läßt: $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S}_X \boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{S}_Y \boldsymbol{X}$. Damit erhalten wir explizit wegen $(\boldsymbol{R}'^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}'$

$$\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{K}'^{\mathrm{T}-1}\boldsymbol{R}'\mathbf{S}_T\boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}\mathbf{x}'' = 0$$

Die Beziehung ist *bilinear* in den Bildkoordinaten. Mit der sog. *Fundamentalmatrix*

$$\mathbf{F} \doteq \mathbf{K}'^{\mathrm{T}-1}\boldsymbol{R}'\mathbf{S}_T\boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}$$

kann man die Koplanaritätsgleichung als *Bedingung* für die Homologie der Bildpunkte einfach darstellen:

$$\boxed{\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{x}'' = \mathbf{0}} \qquad (17)$$

Diese Form hat wesentliche Eigenschaften:

1. Sie bezieht sich auf die ursprünglichen Meßgrößen, erfordert daher keine vorherige Reduktion der Bildkoordinaten. Die Reduktion ist in der Fundamentalmatrix enthalten.
2. Für alle Punkte $\mathbf{x}''$ im zweiten Bild, die auf der Geraden

$$\boxed{\mathbf{l}'' = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'} \qquad (18)$$

liegen, gilt $\mathbf{l}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = 0$ und daher die Koplanaritätsgleichung. Daher ist $\mathbf{l}''$ die *Epipolargerade* zu P' im zweiten Bild. Sie dient zur *Prädiktion* des geometrischen Ortes von P'' bei gegebenem P'. Sie läßt sich offenbar leicht berechnen, falls die Fundamentalmatrix bekannt ist. Die Kenntnis der einzelnen Parameter der Orientierung der beiden Kameras ist dazu nicht erforderlich. Daher enthält die Fundamentalmatrix die gesamte Information der relativen Orientierung.
3. Die Bilinearform ist auch linear in den Koeffizienten der Fundamentalmatrix. Dies erlaubt eine einfache Bestimmung von $\mathbf{F}$ aus homologen Punkten (s. u.).

Die Fundamentalmatrix hat 9 Elemente. Sie ist singulär mit dem Rang 2, da $\boldsymbol{S}_T$ den Rang 2 hat. Da sie homogen ist, also bei Multiplikation mit einem Skalar die gleiche Koplanaritätsbedingung darstellt, hat sie nur 7 Freiheitsgrade. Bei der Bestimmung von $\mathbf{F}$ ist also die Bedingung $|\mathbf{F}| = 0$ einzuhalten, sie ist kubisch in den Parametern der Fundamentalmatrix.

Die Zahl 7 der Freiheitsgrade der Fundamentalmatrix ergibt sich auch aus der Tatsache, dass die Koordinaten der Raumpunkte, das photogrammetrische Modell, bei unbekannten inneren Orientierungen nur bis auf eine 15 parametrige projektive Transformation bestimmbar ist (FAUGERAS 1992) und pro Kamera 11 Parameter der DLT unbekannt sind: $2*11 - 15 = 7$.

Falls die innere Orientierung der beiden Kameras bekannt ist und wir die Orientierung der ersten Kamera als Referenz verwenden, also $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{I}$ gilt, können wir mit $\boldsymbol{R} \doteq \boldsymbol{R}''$ die Koplanaritätsbedingung für die reduzierten Bildkoordinaten formulieren:

$${}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_T\boldsymbol{R}^{-1}\,{}^k\mathbf{x}'' = 0$$

Die Fundamentalmatrix reduziert sich hier zur sog. *essentiellen Matrix*

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_T\boldsymbol{R}^{-1}$$

und führt ebenfalls auf eine bilineare Form

$${}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\,{}^k\mathbf{x}'' = 0$$

ten die *reduzierten Bildkoordinaten*, gekennzeichnet durch den Hoch-Index ${}^{\prime k\prime}$

$${}^k\mathbf{x}' = \boldsymbol{R}'^{-1}\mathbf{K}'^{-1}\mathbf{x}' \qquad {}^k\mathbf{x}'' = \boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}\mathbf{x}''$$

Sie beziehen sich also auf zwei in negativer z-Richtung ausgerichtete Kameras in $O'(\mathbf{0})$ bzw. $O''(\mathbf{T})$ mit Kamerakonstanten der Länge 1. Die Orientierung der beiden Bild- bzw. Kamerasysteme, die durch den Index k gekennzeichnet sind, ist daher parallel zum Objektkoordinatensystem, in dem auch der Basisvektor $\mathbf{T} \doteq {}^k\mathbf{T}$ angegeben ist.

Die Bedingung, daß sich die Strahlen schneiden sollen, verlangt die Koplanarität von $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ und $\mathbf{T}$, dargestellt im gleichen Koordinatensystem, also:

$${}^k\mathbf{x}' \cdot ({}^k\mathbf{T} \times {}^k\mathbf{x}'') = {}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_T{}^k\mathbf{x}''$$

mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$\boldsymbol{S}_X = \boldsymbol{S}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -X_3 & X_2 \\ X_3 & 0 & -X_1 \\ -X_2 & X_1 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Vektor X, der das Vektorprodukt $Z = X \times Y$ zweier Vektoren als Matrix-Vektor-Multiplikation darstellen läßt: $Z = \boldsymbol{S}_X Y = -\boldsymbol{S}_Y X$. Damit erhalten wir explizit wegen $(\boldsymbol{R}'^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}'$

$$\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{K}'^{\mathrm{T}-1}\boldsymbol{R}'\mathbf{S}_T\boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}\mathbf{x}'' = 0$$

Die Beziehung ist *bilinear* in den Bildkoordinaten. Mit der sog. *Fundamentalmatrix*

$$\mathbf{F} \doteq \mathbf{K}'^{\mathrm{T}-1}\boldsymbol{R}'\mathbf{S}_T\boldsymbol{R}''^{-1}\mathbf{K}''^{-1}$$

kann man die Koplanaritätsgleichung als *Bedingung* für die Homologie der Bildpunkte einfach darstellen:

$$\boxed{\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{x}'' = \mathbf{0}} \qquad (17)$$

Diese Form hat wesentliche Eigenschaften:

1. Sie bezieht sich auf die ursprünglichen Meßgrößen, erfordert daher keine vorherige Reduktion der Bildkoordinaten. Die Reduktion ist in der Fundamentalmatrix enthalten.
2. Für alle Punkte $\mathbf{x}''$ im zweiten Bild, die auf der Geraden

$$\boxed{\mathbf{l}'' = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'} \qquad (18)$$

liegen, gilt $\mathbf{l}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = 0$ und daher die Koplanaritätsgleichung. Daher ist $\mathbf{l}''$ die *Epipolargerade* zu P' im zweiten Bild. Sie dient zur *Prädiktion* des geometrischen Ortes von P'' bei gegebenem P'. Sie läßt sich offenbar leicht berechnen, falls die Fundamentalmatrix bekannt ist. Die Kenntnis der einzelnen Parameter der Orientierung der beiden Kameras ist dazu nicht erforderlich. Daher enthält die Fundamentalmatrix die gesamte Information der relativen Orientierung.
3. Die Bilinearform ist auch linear in den Koeffizienten der Fundamentalmatrix. Dies erlaubt eine einfache Bestimmung von $\mathbf{F}$ aus homologen Punkten (s. u.).

Die Fundamentalmatrix hat 9 Elemente. Sie ist singulär mit dem Rang 2, da $\boldsymbol{S}_T$ den Rang 2 hat. Da sie homogen ist, also bei Multiplikation mit einem Skalar die gleiche Koplanaritätsbedingung darstellt, hat sie nur 7 Freiheitsgrade. Bei der Bestimmung von $\mathbf{F}$ ist also die Bedingung $|\mathbf{F}| = 0$ einzuhalten, sie ist kubisch in den Parametern der Fundamentalmatrix.

Die Zahl 7 der Freiheitsgrade der Fundamentalmatrix ergibt sich auch aus der Tatsache, dass die Koordinaten der Raumpunkte, das photogrammetrische Modell, bei unbekannten inneren Orientierungen nur bis auf eine 15 parametrige projektive Transformation bestimmbar ist (FAUGERAS 1992) und pro Kamera 11 Parameter der DLT unbekannt sind: $2*11 - 15 = 7$.

Falls die innere Orientierung der beiden Kameras bekannt ist und wir die Orientierung der ersten Kamera als Referenz verwenden, also $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{I}$ gilt, können wir mit $\boldsymbol{R} \doteq \boldsymbol{R}''$ die Koplanaritätsbedingung für die reduzierten Bildkoordinaten formulieren:

$${}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_T\boldsymbol{R}^{-1}\,{}^k\mathbf{x}'' = 0$$

Die Fundamentalmatrix reduziert sich hier zur sog. *essentiellen Matrix*

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}_T\boldsymbol{R}^{-1}$$

und führt ebenfalls auf eine bilineare Form

$${}^k\mathbf{x}'^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\,{}^k\mathbf{x}'' = 0$$

Der geschätzte Basisvektor $\widehat{\mathbf{T}}$ ergibt sich daher als geeignet normierter Linkseigenvektor von $\widehat{\mathbf{E}}$ zum kleinsten Eigenwert.

Da $\boldsymbol{S}_{\widehat{T}}$ den Rang 2 hat, und daher auch $\widehat{\mathbf{E}}$ nahezu singulär sein wird, kann man Gl. (20) nicht unmittelbar nach $\widehat{\boldsymbol{R}}$ auflösen. Mit der Singulärwertzerlegung

$$\widehat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{\widehat{T}} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

worin Λ die Diagonalmatrix der Singulärwerte darstellt, erhalten wir aber in Anlehnung an (Arun et al. 1987) unmittelbar diejenige Rotationsmatrix

$$\widehat{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

die die Frobeniusnorm $|\widehat{\mathbf{E}} - \boldsymbol{S}_{\widehat{T}}\widehat{\boldsymbol{R}}^{-1}|$ minimiert.

Falls von der inneren Orientierung der beiden Kameras mehr als zwei Parameter unbekannt sind, kann man die relative Orientierung nicht bestimmen.

Eine direkte Lösung für den Fall, dass neben der Basis und der Rotation allein die beiden Kammerkonstanten c' und c'' unbekannt sind, ist in Pan (1999) angegeben.

Beobachtete Raumgeraden können nicht zur relativen Orientierung verwendet werden, da für sie keine Bedingung für die Orientierungsparameter formulierbar ist; denn für beliebige Bildgeraden läßt sich bei beliebiger Orientierung immer eine Raumgerade angeben, die die Bildgeraden erklärt.

5 Orientierung des Bildtripels

Die Orientierung von Bildtripeln hat gegenüber dem Bildpaar eine Reihe von Vorteilen, die z. T. schon Mikhail (1963) diskutierte:

- Die Orientierung kann sich gleichermaßen auf homologe Punkte wie auf homologe Geraden Stützen, die leicht und mit hoher Genauigkeit aus Bildern extrahierbar sind (Spetsakis & Aloimonos 1990).
- Die Bedingungen für homologe Punkte sind ebenso wie für homologe Geraden linear in den beobachteten homogenen Koordinaten. Sie sind zusätzlich linear von den Elementen eines $3 \times 3 \times 3$ Tensor $\mathbf{T}$ – also von drei 3×3-Matrizen – dem sog. Trifokaltensor (Hartley 1995), abhängig, in völliger Analogie zur Fundamentalmatrix $\mathbf{F}$ beim Bildpaar.
- Die Prädiktion von Punkten und Geraden im dritten Bild ist mit Hilfe des Trifokaltensors auf einfache Weise möglich, ohne daß die Punkte bzw. Geraden im Raum bestimmt werden müssen, in völliger Analogie zur Bestimmung der Epipolarlinie beim Bildpaar. Im Unterschied zum Bildpaar führt allerdings hier die Prädiktion zu einem eindeutigen Ergebnis.
Im allgemeinen kann diese Prädiktion durch den Schnitt der Epipolarlinie im dritten Bild bezogen auf die ersten beiden Bilder erfolgen (Faugeras & Robert 1994). Dies gilt allerdings nur, falls ein Punkt nicht in der Trifokalebene durch die drei Projektionszentren liegt oder die Projektionszentren nicht kollinear sind, da dann die Epipolarebenen zusammenfallen. Die Prädiktion von Punkten ins dritte Bild mit dem Trifokaltensor ist auch in diesem praktisch wichtigen Fall ohne den Umweg über den 3D-Punkt möglich, wie etwa bei der Punktübertragung innerhalb eines Flugstreifens oder innerhalb von Video-Bildfolgen. Die Prädiktion von Geraden unterliegt noch Einschränkungen: sie dürfen nicht durch O' oder O'' gehen oder in einer Epipolarebene durch $O'O''$ liegen.

5.1 *Trilineare Bedingungen für homologe Bildmerkmale*

5.1.1 *Homologe Geraden*

Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine Raumgerade in drei Bildern beobachtet wurde. Die Bedingung für die Homologie der Bildgeraden $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}''$ und $\mathbf{l}'''$ kann man für allgemeine Projektionsmatrizen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ der drei Bilder einfach darstellen.

Wir gehen dazu von der Inzidenzbeziehung $\mathbf{l}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' = 0$ von Punkt und Gerade im ersten Bild aus, die mit $\mathbf{x}' = \mathbf{P}_1\mathbf{X}$ auf $\mathbf{l}'^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{X} = 0$ führt. Offenbar stellt $\mathbf{A}' = \mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{l}'$ die Parameter der projizierenden Ebene, d.h. der Ebene durch die Bildgerade $\mathbf{l}'$ und das Projektionszentrum O' dar (Hartley 1994a), da $\mathbf{A}'^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{0}$. Analog können wir die projizierenden Ebenen $\mathbf{A}''$ und $\mathbf{A}'''$ der Bildgeraden $\mathbf{l}''$ und $\mathbf{l}'''$ bilden.

Die drei Bildgeraden sind dann homolog, wenn die drei projizierenden Ebenen $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$ und $\mathbf{A}'''$ sich in einer Raumgeraden schneiden. Die drei Ebenen schneiden sich in einer Raumgeraden, falls sie mindestens zwei andere und untereinander verschiedene Ebenen in einem Punkt schneiden. Wenn wir dazu zwei der drei Ebenen **1**, **2** oder **3** aus der Projektionsmatrix P_1 wählen, müssen mindestens zwei der drei folgenden *Bedingungen* erfüllt sein.

$$\boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{1}, \mathsf{P}_1^T \mathbf{l}', \mathsf{P}_2^T \mathbf{l}'', \mathsf{P}_3^T \mathbf{l}'''| = 0 \\ |\mathbf{2}, \mathsf{P}_1^T \mathbf{l}', \mathsf{P}_2^T \mathbf{l}'', \mathsf{P}_3^T \mathbf{l}'''| = 0 \\ |\mathbf{3}, \mathsf{P}_1^T \mathbf{l}', \mathsf{P}_2^T \mathbf{l}'', \mathsf{P}_3^T \mathbf{l}'''| = 0 \end{array}} \qquad (21)$$

Denn vier Ebenen schneiden sich in einem Punkt, falls die 4×4 Determinante ihrer Parameter gleich 0 ist (vgl. Gl. (19)). Die Bedingungen sind linear in den Parametern der Bildgeraden, da sie jeweils nur einmal in der Determinante vorkommen.

Wir wollen nun einen geschlossenen Ausdruck für die Parameter der Geraden $\mathbf{l}'$ angeben, der nur von den beiden Bildgeraden $\mathbf{l}''$ und $\mathbf{l}'''$ und den Orientierungsparametern abhängt.

Zur Vereinfachung nehmen wir $\mathsf{P}_1 = (\boldsymbol{I}|\mathbf{0})$, $\mathsf{P}_2 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$ und $\mathsf{P}_3 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4)$ an.

Dann ergibt sich mit $\mathbf{l}' = (a', b', c')^T$ für die erste Bedingung: $|\mathbf{e}_1, \mathsf{P}_1^T \mathbf{l}', \mathsf{P}_2^T \mathbf{l}'', \mathsf{P}_3^T \mathbf{l}'''| = 0$ oder

$$\begin{vmatrix} 1 & a' & r_1^T \mathbf{l}'' & s_1^T \mathbf{l}''' \\ 0 & b' & r_2^T \mathbf{l}'' & s_2^T \mathbf{l}''' \\ 0 & c' & r_3^T \mathbf{l}'' & s_3^T \mathbf{l}''' \\ 0 & 0 & r_4^T \mathbf{l}'' & s_4^T \mathbf{l}''' \end{vmatrix} = 0$$

Mit den drei 3×3-Matrizen

$$\mathsf{T}_i = r_i s_4^T - r_4 s_i^T$$

oder in einem $3 \times 3 \times 3$-Tensor

$$\boxed{T_{ijk} = r_{ij} s_{k4} - r_{4j} s_{ki}} \qquad (22)$$

ergibt sich nach Ausmultiplizieren der rechten unteren 3×3-Determinante

$$b' \mathbf{l}''^T \mathsf{T}_3 \mathbf{l}''' - c' \mathbf{l}''^T \mathsf{T}_2 \mathbf{l}''' = 0$$

also $b' : c' = (\mathbf{l}''^T \mathsf{T}_2 \mathbf{l}''') : (\mathbf{l}''^T \mathsf{T}_3 \mathbf{l}''')$. Analog können wir die anderen Bedingungen in (21) verarbeiten und erhalten

$$a' : b' : c' (\mathbf{l}''^T \mathsf{T}_1 \mathbf{l}''') : (\mathbf{l}''^T \mathsf{T}_2 \mathbf{l}''') : (\mathbf{l}''^T \mathsf{T}_3 \mathbf{l}''')$$

oder als *Prädiktionsgleichung* für die Bildgerade $\mathbf{l}'$

$$\mathbf{l}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}''^T \mathsf{T}_1 \mathbf{l}''' \\ \mathbf{l}''^T \mathsf{T}_2 \mathbf{l}''' \\ \mathbf{l}''^T \mathsf{T}_3 \mathbf{l}''' \end{pmatrix}$$

oder komponentenweise mit (22)

$$\boxed{l'_i = \textstyle\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 l''_j \, l'''_k \, T_{ijk} \quad i = 1, 2, 3} \qquad (23)$$

Die Prädiktion von homologen Bildgeraden stellt sich so mit Hilfe des Trifokaltensors (22) besonders einfach durch Bilinearformen dar.

5.1.2 Homologe Punkte

Bei homologen Punkten $P'(\mathbf{x}')$, $P''(\mathbf{x}'')$ und $P'''(\mathbf{x}''')$ sind die Beziehungen etwas komplizierter.

Für die 6 beobachteten Bildkoordinaten sind drei *Bedingungen* erforderlich, da der Raumpunkt durch drei unabhängige Koordinaten bestimmt ist. Bei Punkten, die nicht in der sog. Trifokalebene durch die drei Projektionszentren liegen, kann man die paarweisen Epipolarbedingungen verwenden. Anderenfalls sind wenigstens zwei Bedingungen erforderlich, an denen Koordinaten aller Bilder beteiligt sind. Ein Beispiel für ein solches Tripel von Bedingungen ist (FÖRSTNER 2000a):

$$\boxed{\begin{array}{l} |\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2| = 0 \\ |\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3| = 0 \\ |\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_3| = 0 \end{array}} \qquad (24)$$

In allen drei Bedingungen spannen die beiden ersten Ebenen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{B}_1$ den ersten Projektionsstrahl auf. Der Schnitt mit der x-Koordinatenebene $\mathbf{A}_2$ bestimmt den Raumpunkt P eindeutig. Dieser Raumpunkt muß auf der y-Koordinatenebene der zweiten Kamera liegen, was identisch mit der Epipolarbedingung (**19**) ist. Außerdem soll er gemäß der beiden folgenden Bedingungen durch den durch $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{B}_3$ aufgespannten dritten Raumstrahl gehen.

Die Prädiktion ist hier etwas komplizierter. Die Koordinaten x'''_k des Punktes im dritten Bild ergeben sich aus den Koordinaten der Punkte im ersten und zweiten Bild aus (HARTLEY 1995a:)

$$x_l''' = \sum_{k=1}^{3} x_k'(x_i'' T_{kjl} - x_j'' T_{kil}) \quad i,j = 1,2 \text{ wählbar} \tag{25}$$

Die Prädiktion ist für den Fall verrauschter Daten nicht eindeutig, da die Indizes i und j frei wählbar sind, es sei denn, die homologen Punkte in den Bildern 1 und 2 erfüllen die Epipolarbedingung. Für Standardfälle kann man Regeln für die Wahl der Indizes angeben (FÖRSTNER 2000a).

5.2 *Schätzung des Trifokaltensors*

5.2.1 Lineare Parametrisierung

Man kann wegen der Linearität der Bedingungen in den Tensorkoeffizienten den Trifokaltensor aus Punkt- und Geradenkorrespondenzen analog zur Projektionsmatrix und zur Fundamentalmatrix aus einem homogenen Gleichungssystem direkt bestimmen, falls wenigstens 26 Bedingungen vorliegen. Diese Lösungen sind allerdings instabil (HARTLEY 1994b), da der Trifokaltensor die Geometrie des Bildtripels überparametrisiert.

5.2.2 Minimale Parametrisierung

Tatsächlich weist der Trifokaltensor maximal 18 Freiheitsgrade auf, da die Projektionsmatrizen dreier Kameras (33 Parameter) nur bis auf eine projektive Transformation des Raums (15 Parameter) bestimmbar sind. Daher sind $27 - 18 = 9$ i. a. nichtlineare Bedingungen bei der Bestimmung zu berücksichtigen (FAUGERAS & PAPADOPOULO 1998) oder der Trifokaltensor minimal zu parametrisieren (TORR & ZISSERMAN 1997).

5.2.3 Euklidische Parametrisierung

Falls die innere Orientierung der Kameras bekannt ist, kann man den Trifokaltensor auch mit 11 Parametern euklidisch parametrisieren, da 5 Parameter für die relative Orientierung und 6 für den Folgebildanschluß erforderlich sind (STEINES & ABRAHAM 1999, ABRAHAM 2000). Im Gegensatz zu den vorigen Methoden liegen hier die Orientierungsparameter unmittelbar vor, dafür werden allerdings auch Näherungswerte für diese Parameter benötigt.

5.3 *Bestimmung der Orientierungsparameter*

Zwischen den Koeffizienten des Trifokaltensors, den Fundamentalmatrizen der drei beteiligten Bildpaare und den drei Projektionsmatrizen bestehen enge Beziehungen. Sie können dazu verwendet werden, aus einem geschätzten Trifokaltensor die drei Fundamentalmatrizen und, nach Vorgabe eines Koordinatensystems, die Projektionsmatrizen zu bestimmen (HARTLEY 1994a, HARTLEY 1994b, FAUGERAS & PAPADOPOULO 1998).

Nach unseren Erfahrungen (ABRAHAM 2000) kann die lokale Geometrie eines Bildstreifens mit Hilfe eines Bildtripels wesentlich genauer und vor allem robuster bestimmt werden als mit den schwach überbestimmten Bildpaaren.

6 Ausblick

Die Darstellung der Orientierungsverfahren hat sich auf die algebraischen und geometrischen Prinzipien konzentriert. Die Verfahren, die ohne die Kenntnis der inneren Orientierung auskommen, sind mit den klassischen Verfahren bzgl. Genauigkeit und Robustheit zu vergleichen. Insbesondere bei der Integration in automatische Zuordnungsalgorithmen spielt die Berücksichtigung von Singularitäten eine besondere Rolle. Die Singularitäten beim Bildtripel sind noch nicht vollständig bekannt.

Darüber hinaus existiert eine Reihe von Arbeiten zur Orientierung von monoskopischen und stereoskopischen Bildfolgen, bei denen die innere Orientierung wegen Zoomings nicht oder nur teilweise bekannt ist. Auch hier liegen erste Arbeiten zur Untersuchung singulärer Fälle vor.

Schließlich steht der Vergleich mit optimalen Verfahren aus, um die Leistungsfähigkeit der suboptimalen Verfahren abschätzen zu können. Wir Photogrammeter könnten die Erfahrungen mit selbstkalibrierender Bündelausgleichung hier einbringen.

Dank: Ich danke Prof. H. Mayer und Prof. B. Wrobel für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Literatur

ABRAHAM, S., 2000: Kamera-Kalibrierung und Metrische Auswertung von Bildfolgen. – Shaker Verlag, Aachen.

ARUN, K.S., HUANG, T.S. & BLOSTEIN, S.B., 1987: Least-Squares Fitting of Two 3D Point Sets. – IEEE T-PAMI **9** (5): 698–700.

BOPP, H. & KRAUS, H., 1978: Ein Orientierungs- und Kalibrierungsverfahren für nicht-topographische Anwendungen. – AVN **5**: 182–188.

FAUGERAS, O., 1992: What can be Seen in Three Dimensions with an Uncalibrated Stereo Rig? In: SANDINI, G. (Hrsg.): Computer Vision. – ECCV '92 vol. 588 of LNCS, Springer, pp. 563–578.

FAUGERAS, O., 1993: Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint. – The MIT Press.

FAUGERAS, O. & MOURRAIN, B., 1995: On the Geometry and Algebra of the Point and Line Correspondencies between N Images. – ICCV '95, pp. 951–956.

FAUGERAS, O. & PAPADOPOULO, T., 1997: A Nonlinear Method for Estimating the Projective Geometry of Three Views. Technical Report RR No. 3221, INRIA.

FAUGERAS, O. & PAPADOPOULO, T., 1998: A Nonlinear Method for Estimating the Projective Geometry of Three Views. – ICCV '98.

FAUGERAS, O. & ROBERT, L., 1994: What can two Images tell us about a third one. – J.-O. Eklundh (Hrsg.): Computervision – ECCV, LNCS 800 Springer Verlag, pp. 485–492.

FISCHER, G., 1985: Analytische Geometrie. – vieweg studium.

FISCHLER, M.A. & BOLLES, R.C., 1981: Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. – Commision ACM **24**: 381–395.

FÖRSTNER, W., 2000a: On Weighting and Choosing Constraints for Optimally Reconstructing the Geometry of Image Triplets. – In: VERNON, D. (Hrsg.): Computer Vision. – ECCV '00 , LNCS, Springer.

FÖRSTNER, W., 2000b: Repräsentation und Prüfung von Beziehungen unsicherer geometrischer Elemente im Raum. – In: ALBERTZ, J. (Hrsg.): Photogrammetrie und Fernerkundung – Neue Sensoren/Neue Anwendungen. – vol. 8, DGPF, Berlin.

HARTLEY, R:I., 1994a: Projective Reconstruction from Line Correspondencies. – Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 903–907.

HARTLEY, R., 1994b: Lines and Points in Three Views – a Unified Approach. – Image Understanding Workshop, Monterey, California, ARPA, pp. 1009–1016.

HARTLEY, R., 1995: A Linear Method for Reconstruction from Lines and Points. – ICCV, IEEE CS Press pp. 882–887.

HARTLEY, R. 1995b: In Defense of the 8-point Algorithm, ICCV '95, IEEE CS Press, pp. 1064–1070.

HUANG, T.S. & FAUGERAS, O.D., 1989: Some Properties of the E-Matrix in Two-View Motion Estimation. – IEEE PAMI **11** (12): 1310–1312.

HUANG, T.S. & NETRAVALI, A.N., 1994: Motion and Structure from Feature Correspondences: A Review. – Proceedings of the IEEE **82** (2): 252–268.

MIKHAIL, E.M. (1963): Use of Two-Directional Triplets in a Sub-Block Approach for Aerotriangulation. – Photogr. Eng. **29**: 1014–1024

PAN, H.-P., 1999: A Direct Closed-Form Solution to General Relative Orientation of Two Stereo Views. – Digital Signal Processing, **9** (3), 195–211, Academic Press.

RAGIA, L. & LAING, R., 2000: Qualitätsprüfung von Gebäudedaten aus photogrammetrischen Auswertungen. – PFG 2000 (3): 211–220.

ROUSSEEUW, P.J. & LEROY, A.M., 1987: Robust Regression and Outlier Detection. – Wiley NY.

SEMPLE, J.G. & KNEEBONE, G.T., 1952: Algebraic Projective Geometry. – Oxford Science.

SPETSAKIS, M.E. & ALOIMONOS, J., 1990: Structure from motion using line correspondences. – IJCV **4**: 171–183.

STEINES, B., 1998: Bewegungsschätzung aus Bildfolgen. – Master's thesis, Institut für Photogrammetrie, Universität Bonn.

STEINES, B. & ABRAHAM, S., 1999: Metrischer Trifokaltensor für die Auswertung von Bildfolgen. – In: FÖRSTNER, W. & BUHMANN, J. (Hrsg.): Mustererkennung '99, Informatik Aktuell.

THOMPSON, E.H., 1968: A Projective Theory of Relative Orientation. – Photogrammetria **23**: 67–75.

TORR, P.H.S. & ZISSERMAN, A., 1997: Robust Parametrization and Computation of the Trifocal Tensor. – Image Vision and Computing **15**: 591–605.

ZHANG, Z., 1996: Determining the epipolar geometry and its uncertainty: A review. – Technical Report 2927, INRIA-Spohia Antipolis.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr.-Ing. WOLFGANG FÖRSTNER,
Institut für Photogrammetrie
Universität Bonn
Nussallee 15
D-53121 Bonn
wf@ipb.uni-bonn.de

Manuskript eingereicht: März 2000
Angenommen: April 2000