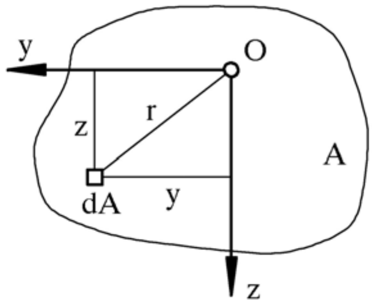
Quadratische Flächenmomente (Flächenmomente 2. Ordnung)

Für jede Fläche A lassen sich bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems (y, z), das in der Ebene der Fläche liegt, die quadratischen Flächenmomente



$$\left.\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2\, dA \\ I_z &= \int_A y^2\, dA \\ I_{yz} &= -\int_A yz\, dA \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

definieren. Die axialen Momente I_y und I_z werden auch als Flächenträgheitsmomente und das gemischte Moment I_{yz} als Deviations− oder Zentrifugalmoment bezeichnet.
Das quadratische Flächenmoment

$$I_p = \int_A r^2\, dA \qquad (2)$$

heißt polares Flächenträgheitsmoment. Wegen $r^2 = y^2 + z^2$ gilt

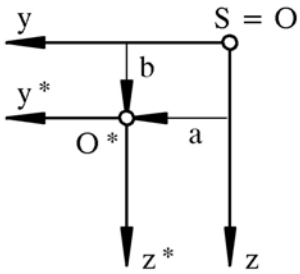
$$I_p = I_y + I_z \qquad (3)$$

Beim Übergang zu einem anderen, ebenfalls in der Ebene von A liegenden Koordinatensystem (y^*, z^*) ändern sich im allg. die Flächenmomente. Dabei können die beiden Systeme parallelverschoben und / oder gedreht sein.

Parallelverschiebung:

Liegt der Ursprung O von (y, z) im Schwerpunkt S der Fläche A, so gilt mit den Gleichungen der Parallelverschiebung $y^* = y - a$ und $z^* = z - b$ nach dem Satz von Huygens−Steiner

$$\left.\begin{aligned} I_y{}^* &= I_y + b^2 A\ , \\ I_z{}^* &= I_z + a^2 A\ , \\ I_{yz}{}^* &= I_{yz} - a\,b\,A\ . \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

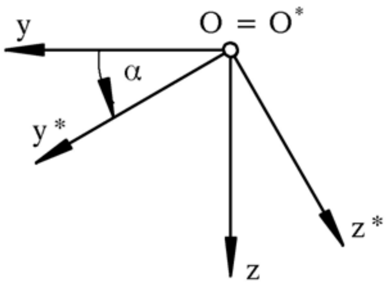


Daraus folgt, daß die Flächenmomente für Achsen durch den Schwerpunkt minimal sind.

Drehung:

Mit den Gleichungen der Koordinatendrehung um den Winkel α, $y^* = y\cos\alpha + z\sin\alpha$ und $z^* = -y\sin\alpha + z\cos\alpha$, folgt

$$\left.\begin{aligned} I_y{}^* &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha\ , \\ I_z{}^* &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha\ , \\ I_{yz}{}^* &= \qquad\qquad\quad -\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha\ . \end{aligned}\right\} (5)$$



Das polare Flächenmoment I_p ist gegenüber Drehungen des Bezugssystems invariant, da es nur von r abhängt.

Ordnen wir die Flächenmomente in einer Matrix bzw. in einem Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

an, so sind (5) gerade die Transformationsformeln, die die Komponenten von $\mathbf{I}$ von System (y, z) in (y^*, z^*) transformieren. Dieser Tensor $\mathbf{I}$ heißt Flächenmomententensor der Fläche A im Punkt O. Wegen der Symmetrie des Flächenmomententensors ist eine Hauptachsentransformation möglich, d.h. es gibt ein spezielles Koordinatensystem (y_H, z_H), in dem das Deviationsmoment I_{yz} verschwindet. Die Momente I_{yH} und I_{zH} sind dann maximal, sie heißen Hauptflächenmomente 2. Ordnung und die Richtungen der Achsen y_H und z_H heißen Hauptachsen von $\mathbf{I}$.

Die Hauptachsentransformation kann rechnerisch und zeichnerisch durchgeführt werden:

a) **Rechnerische Transformation**

Aus der Säkulargleichung

$$\det(\mathbf{I} - I\mathbf{E}) = 0 \quad , \qquad \mathbf{E} \text{ Einheitstensor},$$

folgt ein Polynom 2. Grades für I, dessen Lösung die Hauptflächenmomente I_{yH} und I_{zH} sind. Die dazugehörenden Hauptrichtungen $\mathbf{r}_{yH}$ und $\mathbf{r}_{zH}$ ergeben sich durch Einsetzen von I_{yH} bzw. I_{zH} in die Eigenwertgleichungen

$$(\mathbf{I} - I_{yH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{yH} = \mathbf{0} \ , \text{ bzw. } (\mathbf{I} - I_{zH}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{r}_{zH} = \mathbf{0} \ .$$

Das Hauptachsensystem (y_H, z_H) geht aus dem System (y, z) durch Drehung um die x−Achse mit dem Winkel α_H hervor.

Durch Ausrechnen der obigen Beziehung folgt für die Hauptflächenmomente

$$I_{yH} = I_1 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

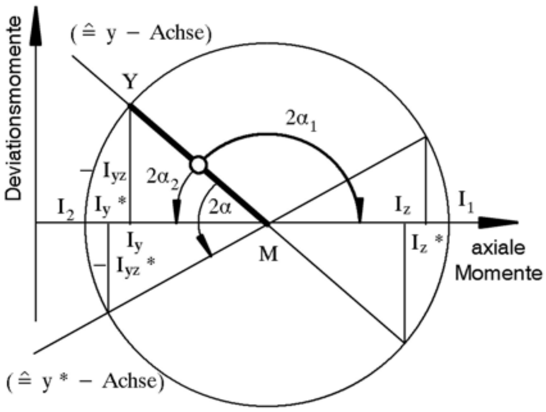
$$I_{zH} = I_2 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) - \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

und für den Drehwinkel α_H

$$\tan 2\alpha_H = \frac{2 I_{yz}}{I_y - I_z}$$

b) **Zeichnerische Transformation mit dem Mohrschen Kreis**

Wie beim Hauptspannungsproblem lassen sich die Hauptflächenmomente und die dazugehörigen Hauptachsen graphisch aus dem Mohrschen Kreis gewinnen. Dazu trägt man auf der Abszisse die nach (1) berechneten Flächenmomente I_y und I_z ab. Das Deviationsmoment $-I_{yz}$ wird über I_y aufgetragen und man kommt so zu zwei Punkten des Kreises. Der Kreis schneidet die Abszisse in den beiden Hauptflächenmomenten I_1 und I_2, für die $I_1 > I_2$ gelten soll. Die Winkel $2\alpha_1$ und $2\alpha_2$ zwischen YM (≙ der y−Achse in der Zeichnung) und der Abszisse sind die doppelten Drehwinkel, die nötig sind, um die y−Achse in die 1. bzw. 2. Hauptachse überzuführen.



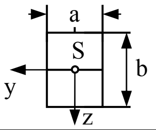
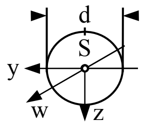
Soll nun bei gegebenem Mohrschen Kreis das Flächen− und das Deviationsmoment bezüglich eines Systems $(y^*,\ z^*)$, das um den Winkel α gegenüber dem System (y, z) gedreht ist, bestimmt werden, so ergibt sich der zugehörige Punkt auf dem Mohrschen Kreis, indem man die Gerade YM um 2α im gleichen Sinne dreht.

Das Bestimmen der Hauptachsen wird stark vereinfacht, wenn die Fläche Symmetrieeigenschaften hat:

Jede Symmetrieachse von A durch O ist zugleich Hauptachse von $\mathbf{I}$.

Jede Achse durch O senkrecht zu einer Symmetrieachse von A ist Hauptachse von $\mathbf{I}$.

Die Hauptflächenträgheitsmomente gängiger Flächen bezogen auf Achsen durch den Schwerpunkt sind tabelliert (z.B. Hütte I, 28.Aufl.,S.673 ff; Dubbel I, 13.Aufl., S.371 ff).

Fläche	Flächenmoment	Fläche	Flächenmoment
	$I_y = \frac{a\,b^3}{12}\,,\ I_z = \frac{b\,a^3}{12}$ Quadrat: $a = b$		$I_y = I_z = I_w = \frac{\pi\,d^4}{64}$