Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 8

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 21. Juni 2011

1. **Kugeloszillator (Schriftlich)**

   (a) Zeige, dass der isotrope dreidimensionale harmonische Oszillator durch drei unabhängige eindimensionale Oszillatoren ausgedrückt werden kann. Gib die Eigenwerte und den jeweiligen Entartungsgrad an.

   (b) Analog zum Wasserstoffproblem kann der Winkelteil absepariert werden. Gib dazu die Kommutatoren $\left[\mathbf{L}^2, H\right]$ und $[L_z, H]$ an und schreibe den Hamiltonian in Kugelkoordinaten wieder in Abhängigkeit der Eigenoperatoren zum Drehimpuls.

   (c) Wähle als Ansatz für die Wellenfunktion

   $$\psi(r) = \frac{x_l(r)}{r} Y_{lm}(\phi, \theta) \tag{1}$$

   und leite eine Differentialgleichung für den Radialteil her.

   (d) Zeige, dass aus dem asymptotischen Verhalten der Differentialgleichung für $r \to \infty$ und $r \to 0$ der Reihenansatz

   $$x_l(r) = \exp\left(-r^2/2\right)\, r^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \tag{2}$$

   folgt. Gib eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an und bestimme wiederum die Eigenwerte und die jeweilige Entartung.
   Tipp: Führe den neuen Radius ρ mit $\rho = \sqrt{m\omega/\hbar}\, r$ und anschließend die neue Energie $\varepsilon = 2E/\hbar\omega$ ein. Die Differentialgleichung kann dadurch geschickter dargestellt werden. Der Reihenansatz wird durch den neuen Radius zu

   $$x_l(\rho) = \exp\left(-\rho^2/2\right)\, \rho^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n . \tag{3}$$

2. **Pauli-Lenz-Vektor (Übungsstunde)**

   In der klassischen Mechanik besitzt das Keplerproblem eine weitere Erhaltungsgrösse, den Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{M}$. Dieser liegt entlang der grossen Halbachse in der Bahnebene, steht also senkrecht auf dem Drehimpulsvektor. Wir wollen nun den Runge-Lenz-Vektor in der Quantenmechanik betrachten, den Pauli-Lenz-Vektor. Da $\mathbf{P}$ und $\mathbf{L}$ nicht kommutieren, symmetrisieren wir den Faktor $\mathbf{P}\wedge\mathbf{L}$, was auf die Form

   $$\mathbf{M} = \frac{1}{2me^2}\left(\mathbf{L}\wedge\mathbf{P} - \mathbf{P}\wedge\mathbf{L}\right) + \frac{\mathbf{Q}}{Q} \tag{4}$$

führt. Die Größe $\mathbf{Q}$ ist der zugehörige Ortsvektor und Q dessen Betrag. Für das Quadrat des Pauli-Lenz-Vektors gilt die Relation

$$\mathbf{M}^2 = \frac{2}{me^4} H \left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2 \right) + 1 \,, \tag{5}$$

mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \frac{e^2}{Q}. \tag{6}$$

Zeige,

(a) $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = 0$,

(b) $[\mathbf{L}^2, \mathbf{M}^2] = 0$,

(c) $[L_z, \mathbf{M}^2] = 0$,

(d) $[L_i, M_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} M_k$,

(e) $[H, \mathbf{M}] = 0$.