Didaktik der Algebra

Modul 5a/c

Jürgen Roth

15.11.2023 juergen-roth.de

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der
Mathematik
Sekundarstufen

Didaktik der Algebra

1. Ziele und Inhalte
2. Terme
3. Funktionen
4. Gleichungen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

3

Didaktik der Algebra

Funktionen

Mathematik lehren 226
Mit Funktionen denken und arbeiten

https://juergen-roth.de/publikationen/

https://roth.tel/funktionen/

https://geogebra.org/m/nmsbbwja

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch
„Funktionen“
https://roth.tel/funktionen

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen

- repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und bilden die Grundlage für das Verstehen
- ermöglichen eine Verbindung zwischen abstrakter Mathematik und außer- sowie innermathematischen Anwendungen
- unterstützen / ermöglichen Repräsentationswechsel

Zwei Typen von Grundvorstellungen

- **Primäre Grundvorstellungen** haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen
- **Sekundäre Grundvorstellungen** werden mit mathematischen Darstellungsmitteln repräsentiert

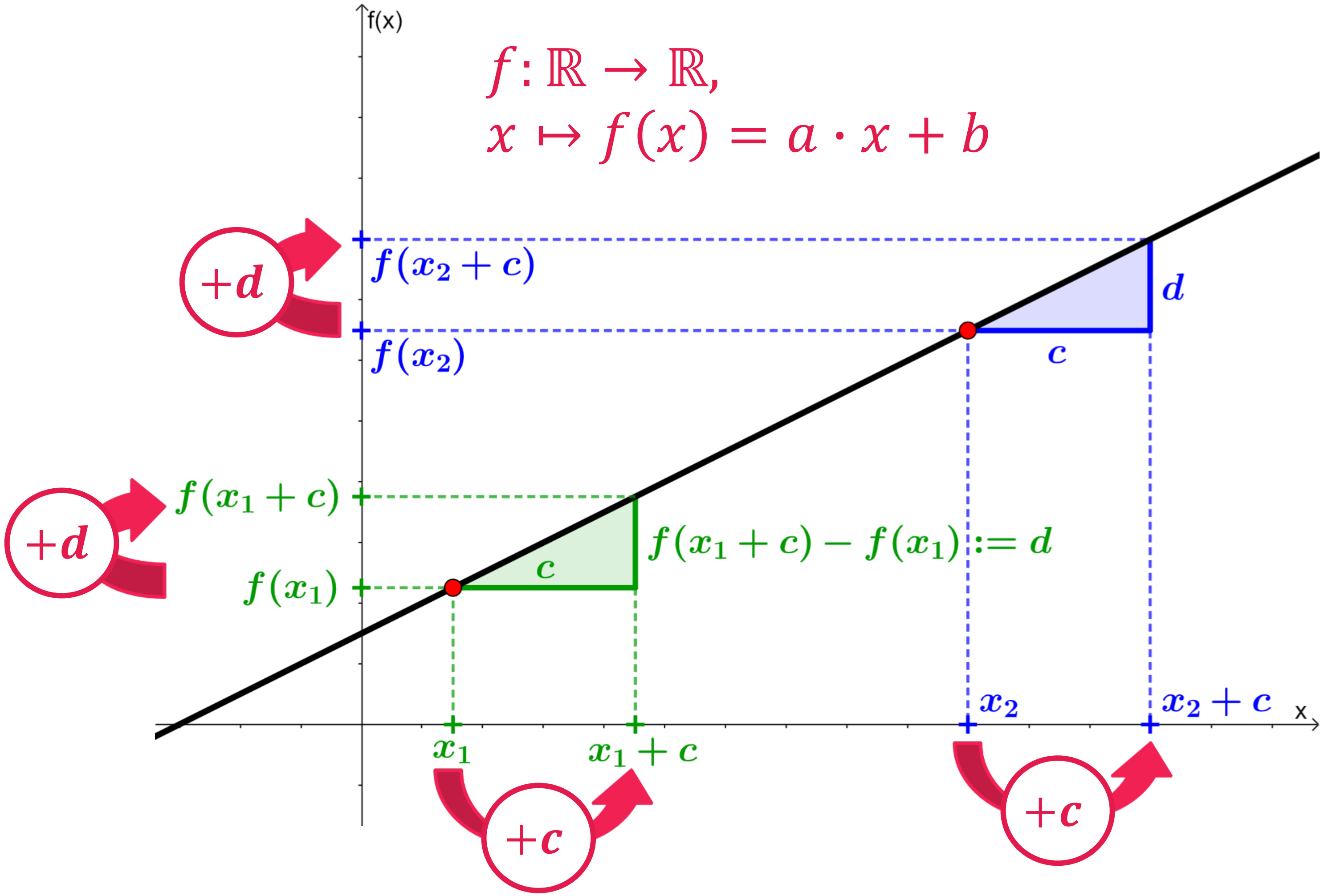
Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

Primäre Grundvorstellungen
Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, S. 2-9

Sekundäre Grundvorstellungen

Dargestellt mit mathematischen Repräsentationen



$$f(x+c)$$
$$= a \cdot (x+c) + b$$
$$\overset{DG}{\triangleq} a \cdot x + a \cdot c + b$$
$$\overset{KG}{\triangleq} \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$
$$= f(x) + d$$

https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. Mathematik lehren, 199, S. 2-9

Verständnisanker

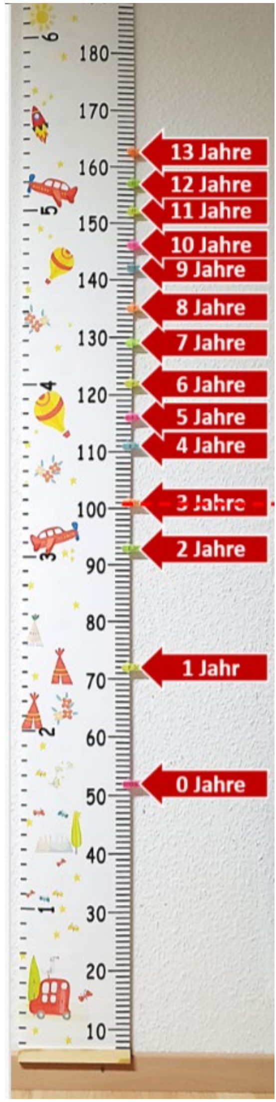
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisanker

- Ein Verständnisanker ist eine prototypische Situation, an der Grundvorstellungen und ein damit verbundener Erklärungskontext zu einem mathematischen Sachverhalt ausgebildet werden.
- Prototypisch meint, dass alle wesentlichen Strukturelemente zum Verständnis des mathematischen Sachverhalts in dieser Situation vorkommen und daran gedeutet werden können.
- Eine Situation eignet sich insbesondere dann als Verständnisanker, wenn sie leicht durchschaut werden kann.
- Lernende können einen Verständnisanker aufbauen und in neuen Situationen, in der derselbe mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, darauf zurückkommen und, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

- Ein möglicher Verständnisanker für Grundvorstellungen zu Funktionen ist z. B. der Zusammenhang zwischen dem Lebensalter und der Körpergröße eines Menschen.
- Dieser Zusammenhang ist allen Menschen vertraut und die Grundvorstellungen zu Funktionen können daran erfasst & durchschaut werden.
- Näheres zu diesem Verständnisanker: Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.



https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

Grundvorstellungen zu Funktionen

Experiment:
Schüler/innen …

- rennen eine Treppe hinauf,
- messen nach dem Lauf in Abständen von 30s ihren Puls,
- halten den Zusammenhang paarweise in einer Tabelle fest.

Erfahrung: Jedem Zeitpunkt wird (genau) ein Puls zugeordnet.

Zuordnung
Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Fragestellung

Wie ändert sich der Puls in gleichen Zeitschritten? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder zunächst langsamer und dann schneller oder … ?

- Hierfür reicht es nicht einzelne Wertepaare zu betrachten.
- Es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden.

Änderungsverhalten / Kovariation

Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Fragestellung

Wie sieht der funktionale Zusammenhang zwischen Zeitpunkt und Puls als Ganzes aus?

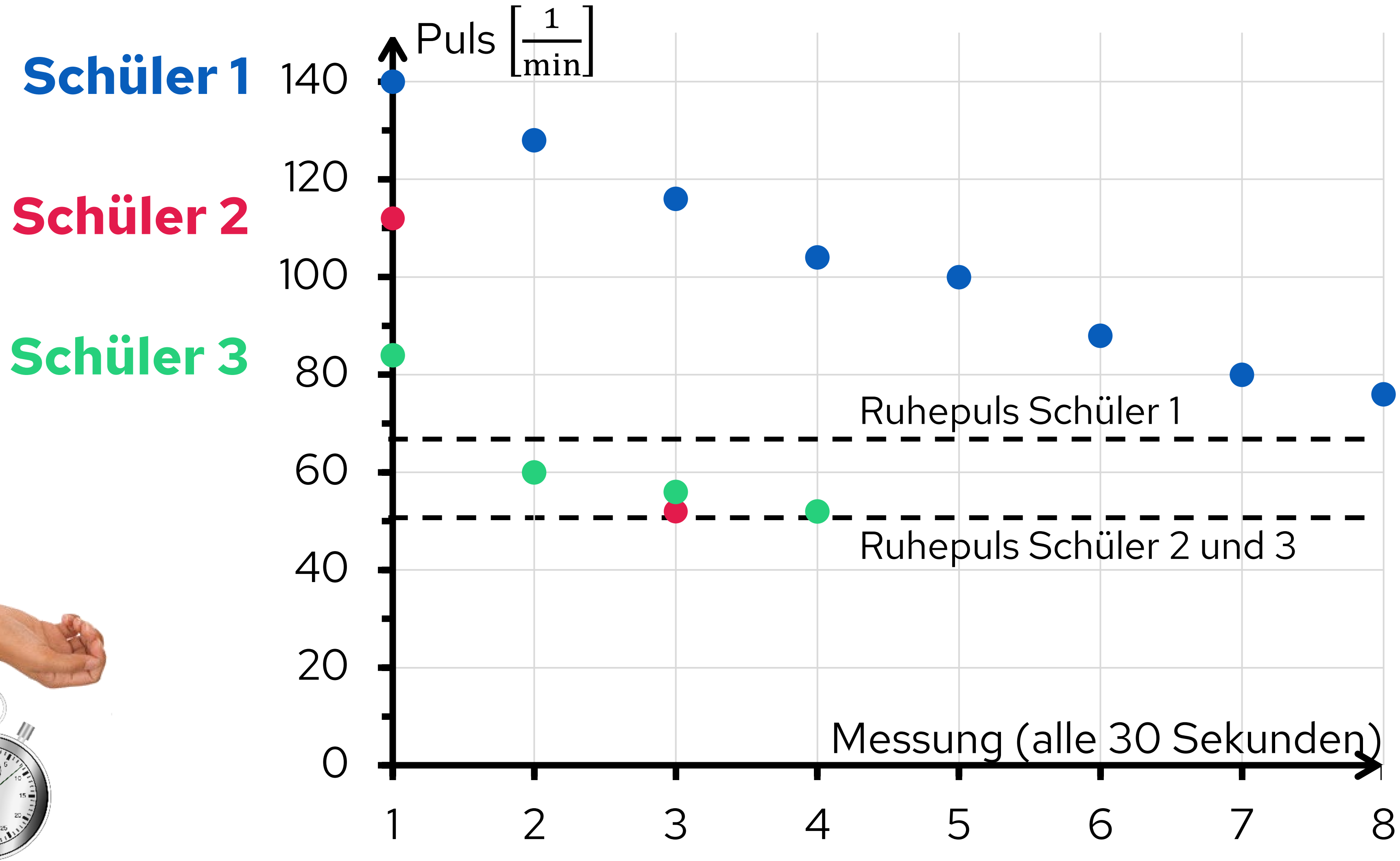
- Dazu muss man
  → systematisch Daten aufnehmen,
  → in Tabelle festhalten,
  → Graph zeichnen
- Kann erst am Graph als Ganzes betrachtet und anhand der Verläufe für verschiedene Läufer verglichen werden → Fitness.

Funktion als Ganzes

Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

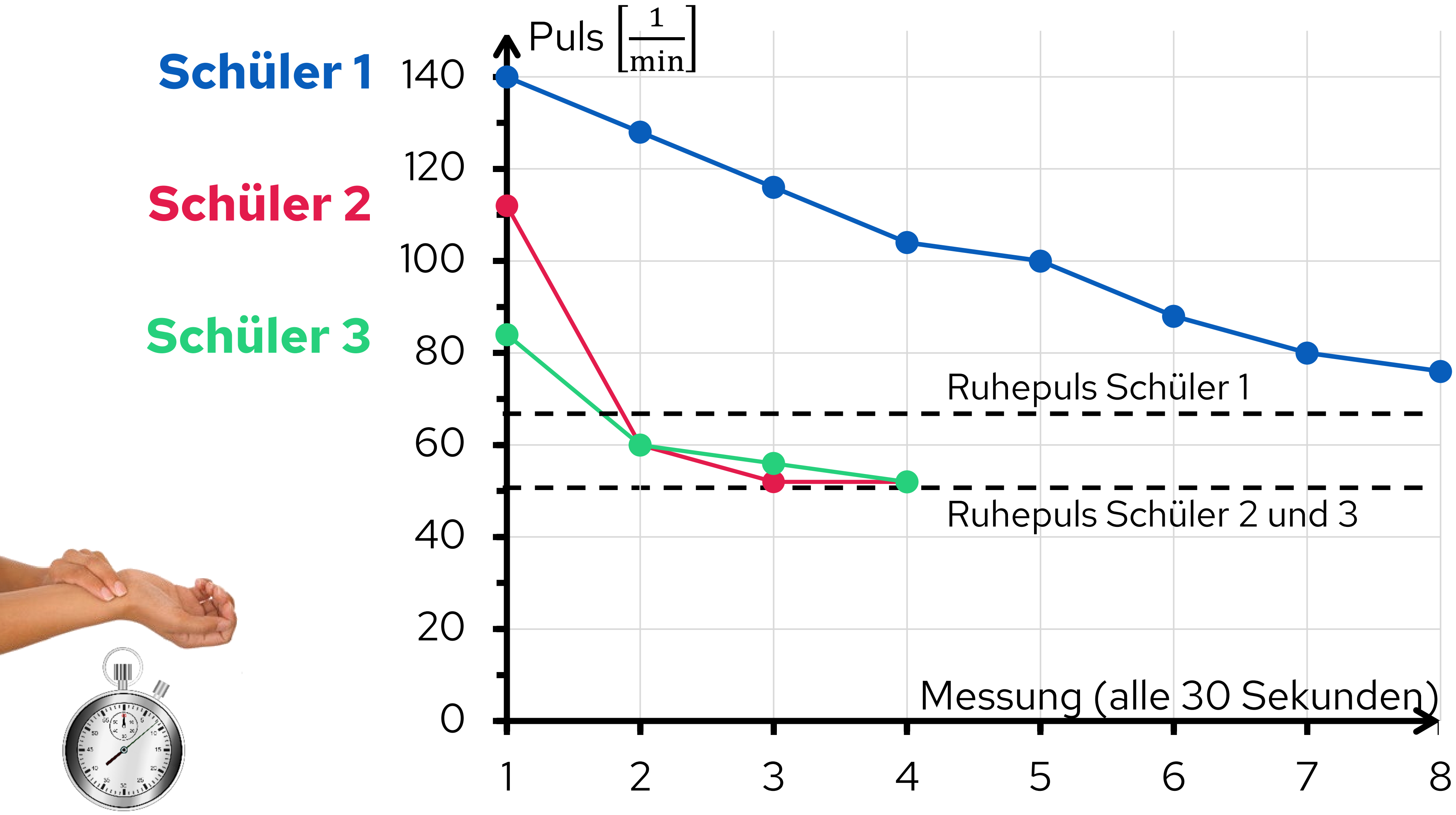
Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Fitness der Läufer: Sicht als Ganzes



Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Fitness der Läufer: **Sicht als Ganzes**



Perspektiven zur **Sicht als Ganzes** bei Funktionsgraphen:

(1) Vergleich von Abschnitten im selben Graph

(2) Vergleich verschiedener Graphen

(3) Für einen Funktionstyp typischer Verlauf

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Grundvorstellungen zu Funktionen

Zuordnung
Funktionen beschreiben bzw. stiften Zusammenhänge zwischen Größen: Einer Größe wird genau eine zweite Größe zugeordnet.

Änderungsverhalten / Kovariation
Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf die Änderung einer von ihr abhängigen Größe auswirkt.

Funktion als Ganzes
Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht einzelne Wertepaare sondern die Menge aller Wertepaare.

Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. MU, 60(6), 37-43

Ziele beim Ausbilden von Grundvorstellungen

Sinnzusammenhänge herstellen

- An bekannte Situationen / Handlungsvorstellungen anknüpfen

Prototypisches Beispiel als Verständnisanker

Mentalen Repräsentationen aufbauen

- Mentales operatives Handeln ermöglichen

Struktur in neuen Situationen anwenden

- Erkennen der Struktur in Sachzusammenhängen
- Modellieren von Phänomenen mit Hilfe der mathematischen Struktur

Vgl. vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 118*, 4-8

Aspekte des Funktionsbegriffs

Aspekte des Funktionsbegriffs

- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

Tabelle

Variation

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

+1 +1 +1 +1

+2 +2 +2 +2

Kovariation

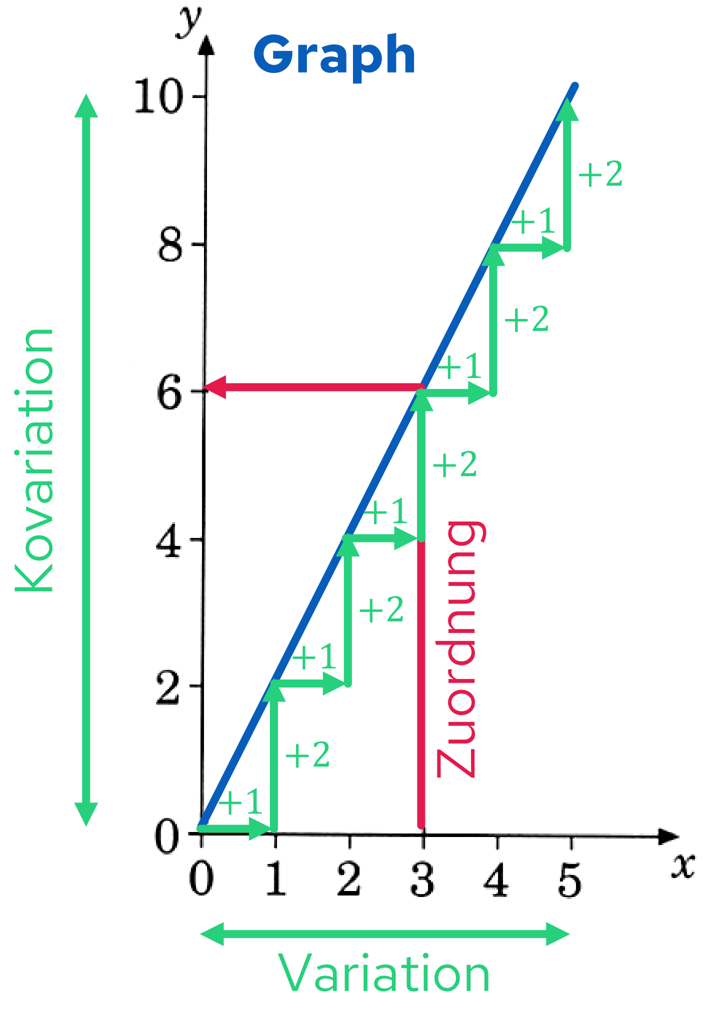
Zuordnung

Funktionsterm

$$f(x) = 2 \cdot x$$

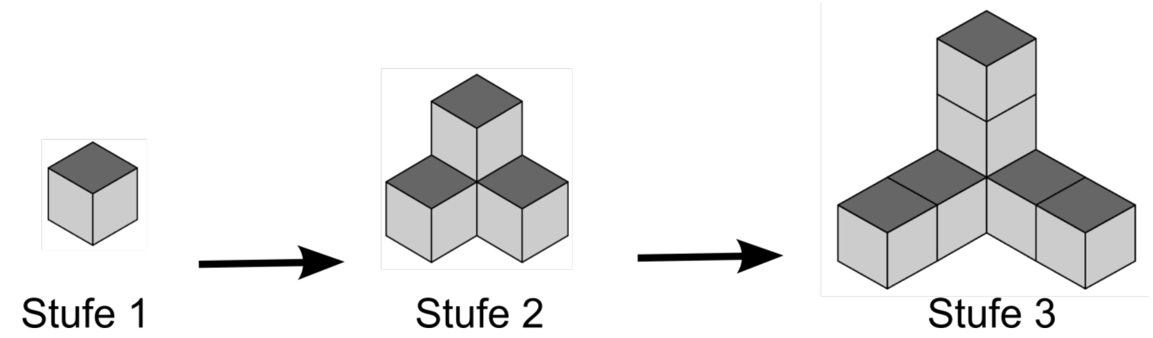
Zuordnung

Graph



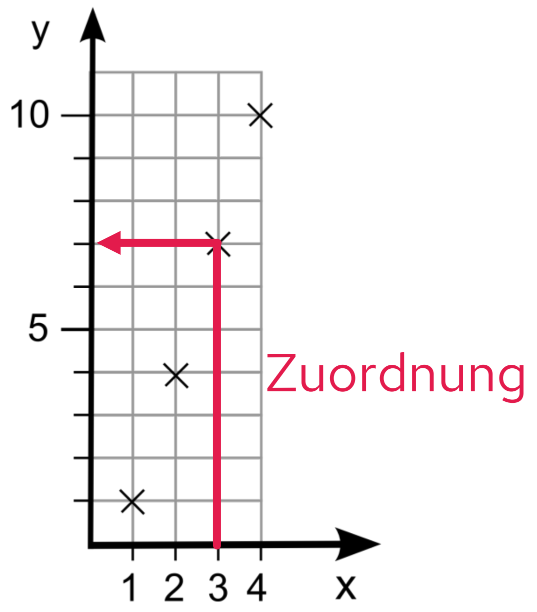
Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007³). *Algebra in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag, 140
Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren, 103*, 8–11

Zuordnung

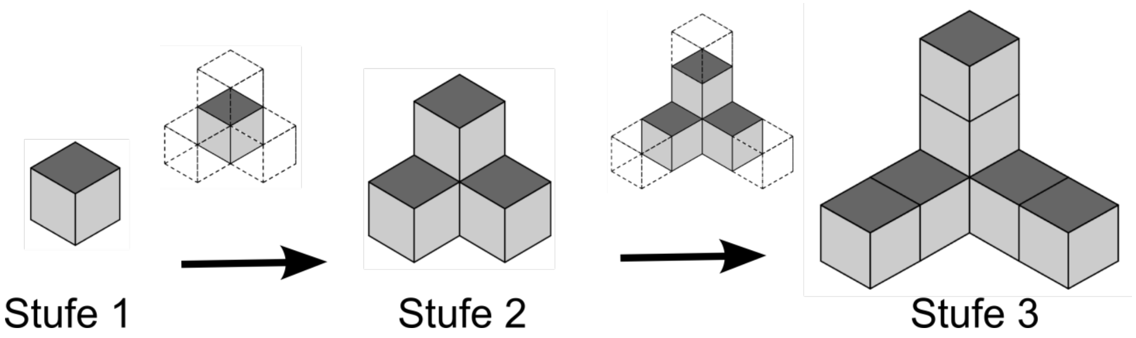


x	y
1	1
2	4
3	7
4	10

Zuordnung



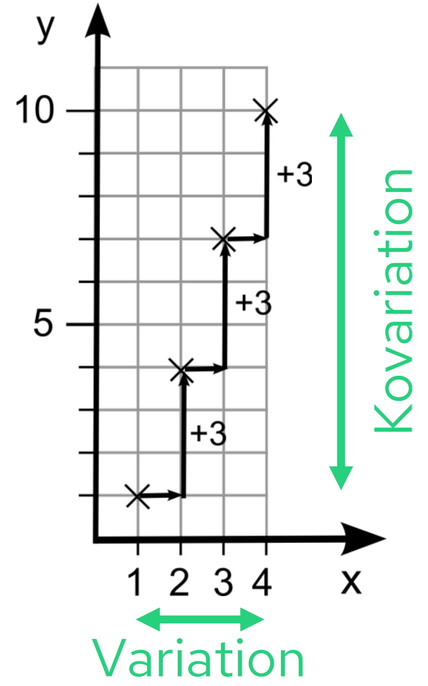
Änderungsverhalten (Kovariation)



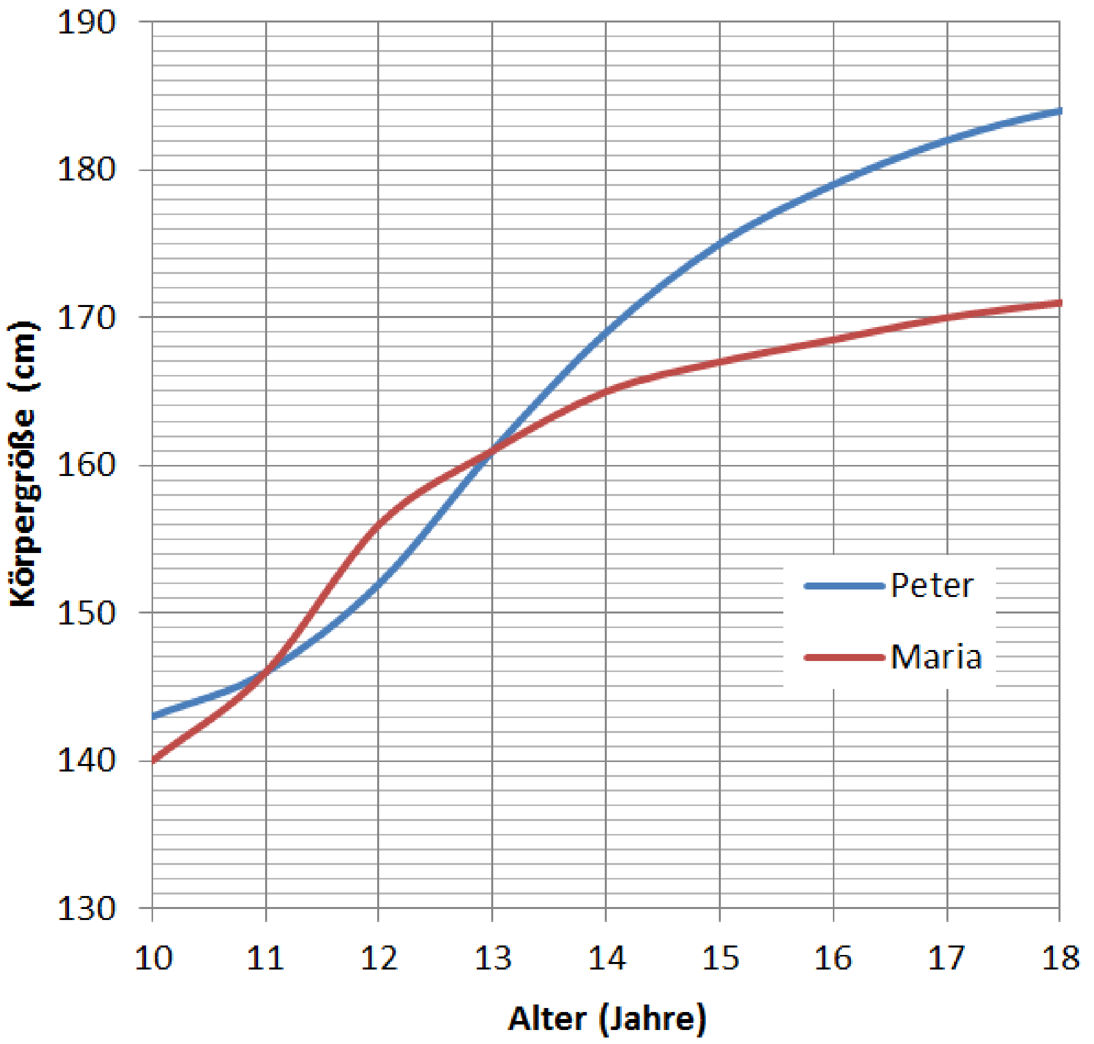
Variation +1 +1 +1

x	y
1	1
2	4
3	7
4	10

+3 +3 +3 Kovariation



Zuordnung und Kovariation



Zuordnung

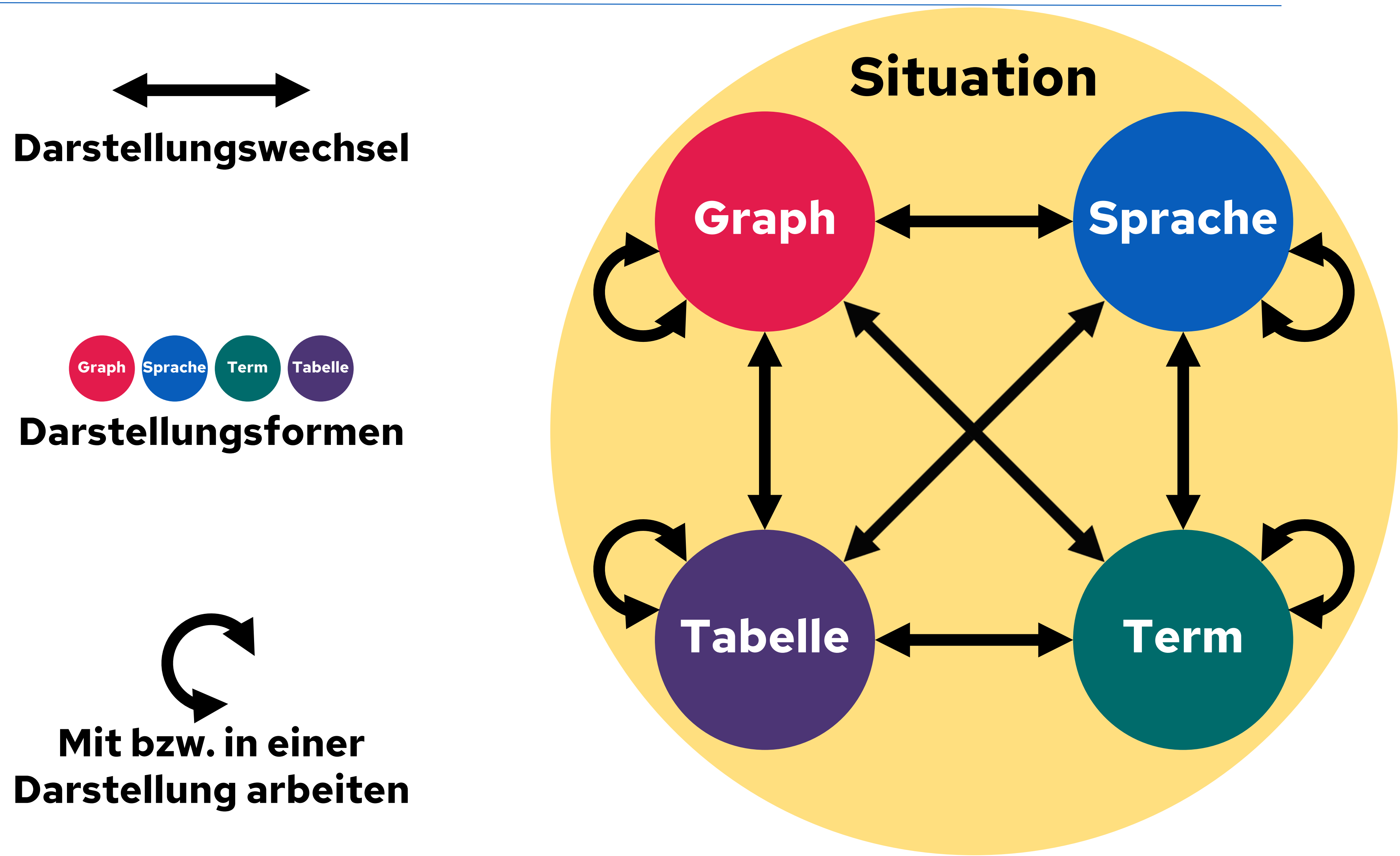
Wie groß ist Peter mit 15 Jahren?

Kovariation

Welche Aussage über das Wachstum im Alter von 11 Jahren ist richtig?

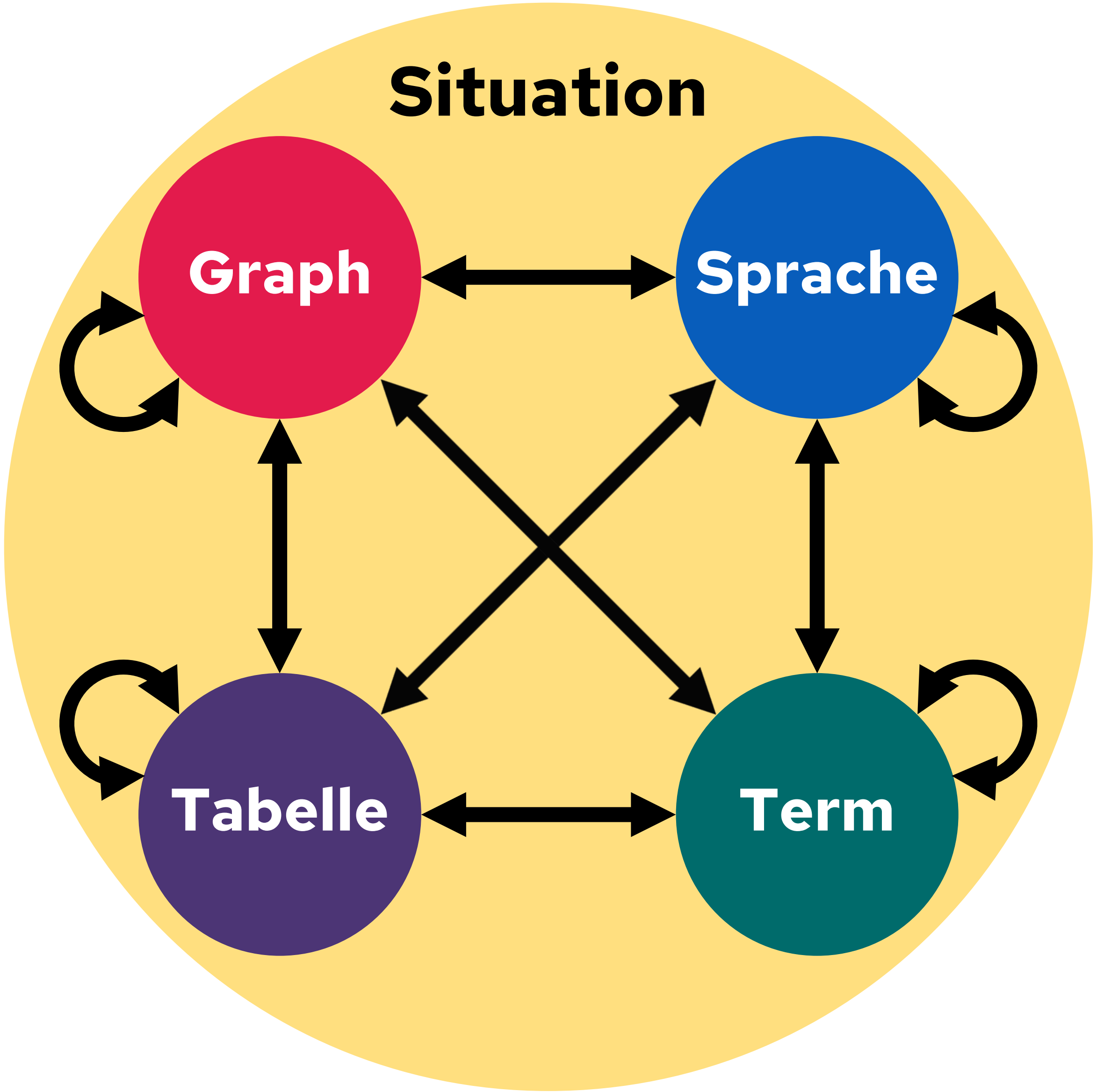
- O Peter wächst schneller als Maria.
- O Maria wächst schneller als Peter.
- O Maria und Peter wachsen gleich schnell.

Funktionale Zusammenhänge in Situationen: Darstellungsformen



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Der Funktionsbegriff im MU



Ziele

- Den Funktionsbegriff erfassen.
- Wichtige Funktionstypen & ihre Eigenschaften kennen lernen.
- Funktionen zum Erkennen, Beschreiben oder Herstellen von Zusammenhängen nutzen.

 Malle, G. (2000). Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema. *Mathematik lehren, 103*, S. 4-7

Darstellungsformen ↔ Grundvorstellungen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

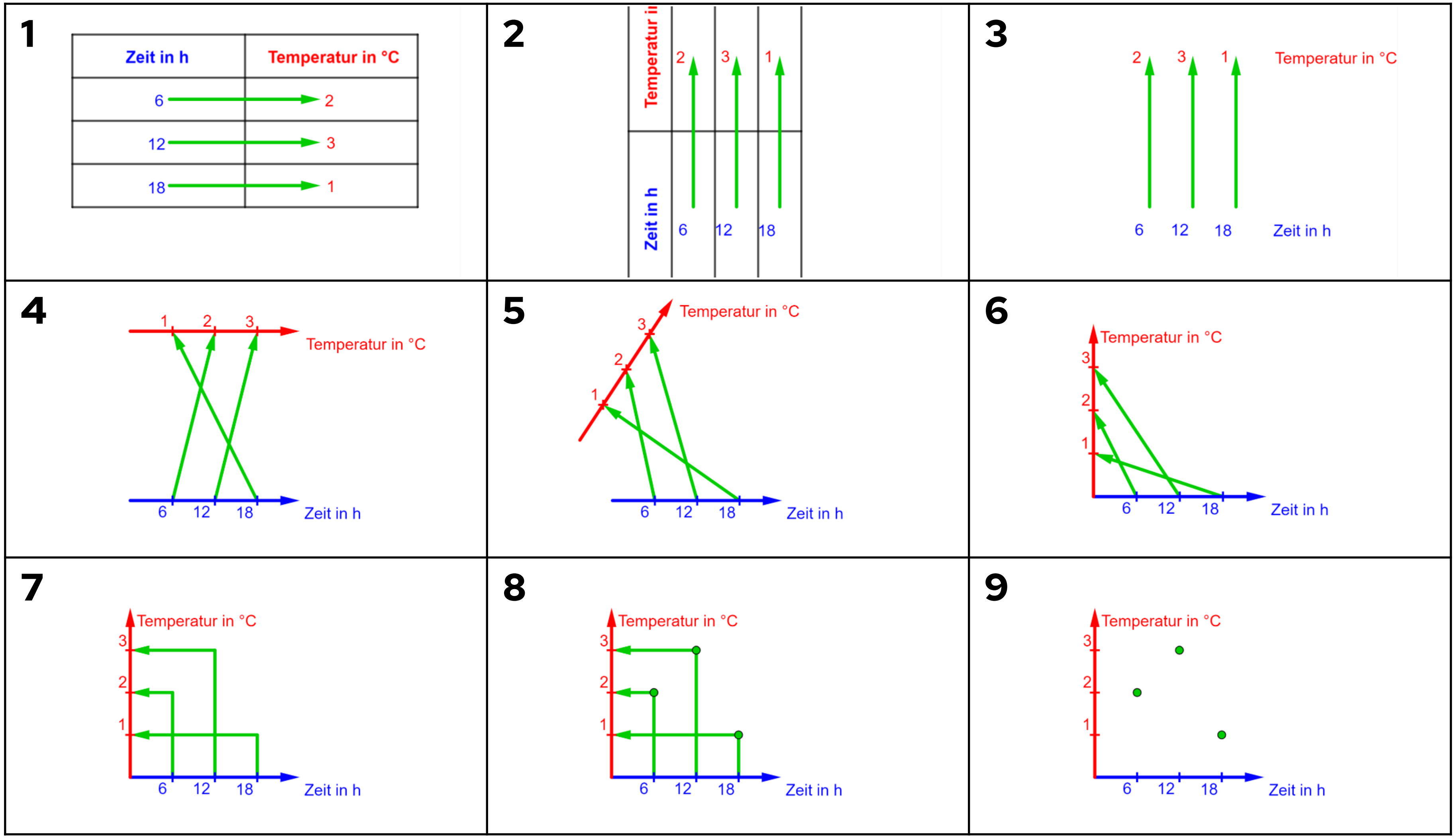
Darstellungsformen →

Grundvorstellungen ↓

	Graph	Tabelle	Term	Sprache
Zuordnung	**Tätigkeit:** Einem Wert auf der 1. Achse wird ein Wert auf der 2. Achse zugeordnet. **Hauptzweck:** Markante Punkte erfassen	**Tätigkeit:** Einem Wert in der 1. Spalte wird ein Wert in der 2. Spalte zugeordnet. **Hauptzweck:** Ablesen/Eintragen konkreter Zuordnungen	**Tätigkeit:** Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet. **Hauptzweck:** Bestimmen einzelner Werte	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen. **Hauptzweck:** Erfassen einzelner Werte
Kovariation	**Tätigkeit:** Unterteilung in Abschnitte mitunterschied-lichem Änderungsverhalten **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ erfassen	**Tätigkeit:** Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Ablesen bzw. Bestimmen entsprechender Kenngrößen. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten quantifizieren	**Tätigkeit:** Dekodieren von Informationen zum Änderungsverhalten. **Hauptzweck:** Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Sicht als Ganzes	**Tätigkeit:** Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristischen Verlauf erfassen	**Tätigkeit:** Differenzen-, Produkt-, Quotientengleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen. **Hauptzweck:** Quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	**Tätigkeit:** Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren. **Hauptzweck:** Charakteristika quantitativ erfassen	**Tätigkeit:** Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus. **Hauptzweck:** Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

Verändert nach Hußmann, S. & Laakmann (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. Darstellen und Darstellungen wechseln. *PM (53)38*, S. 2-13

Darstellungsformen erfassen:
Das Beispiel Funktionsgraph

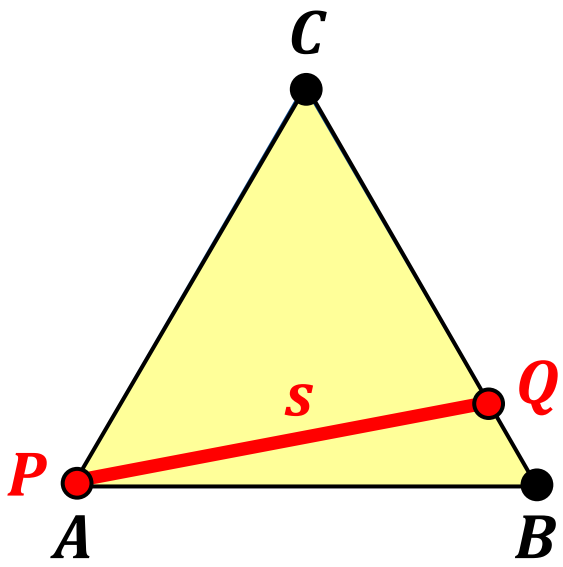


Das Applet zeigt, wie aus den Zuordnungen von Zeit und Temperatur, die oben links in der Tabelle dargestellt sind, der Funktionsgraph der Zeit-Temperatur-Funktion unten rechts entsteht.
Dafür müssen die Elemente der beteiligten Mengen jeweils der Größe nach angeordnet werden können.

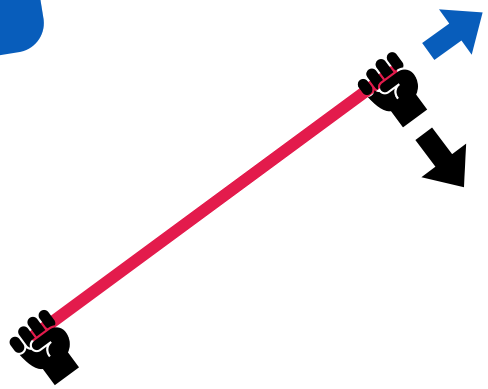
Grundvorstellung Zuordnung

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/kknpe5u9

Beispiel: Dreieckssehne



Gummiband-modell

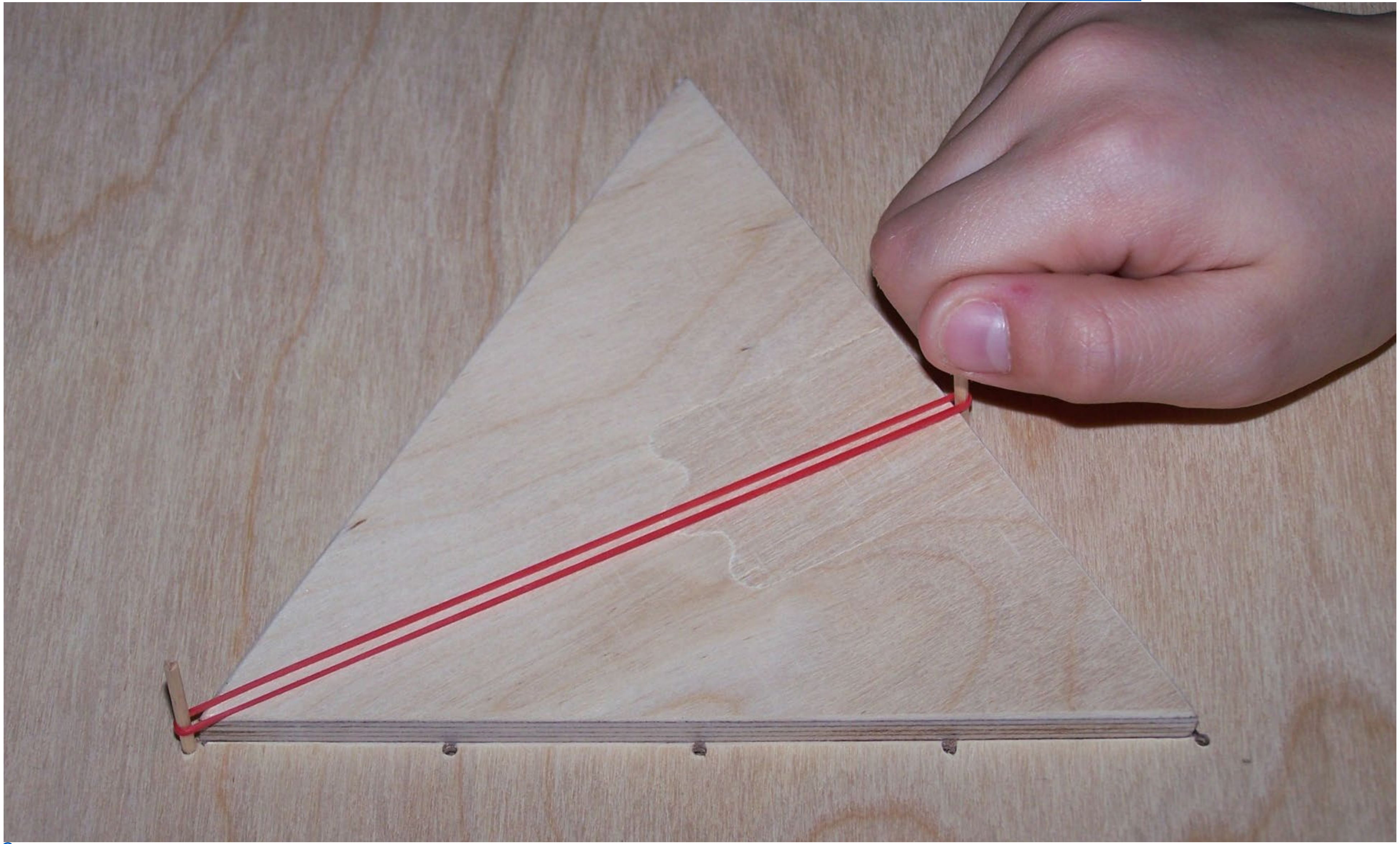


- Zuordnung
- Änderungsverhalten (Kovariation)
- Sicht als Ganzes

Roth, J. (2005). Kurvenerzeugende Sehnen. *Mathematik lehren, 130*, S. 8-10

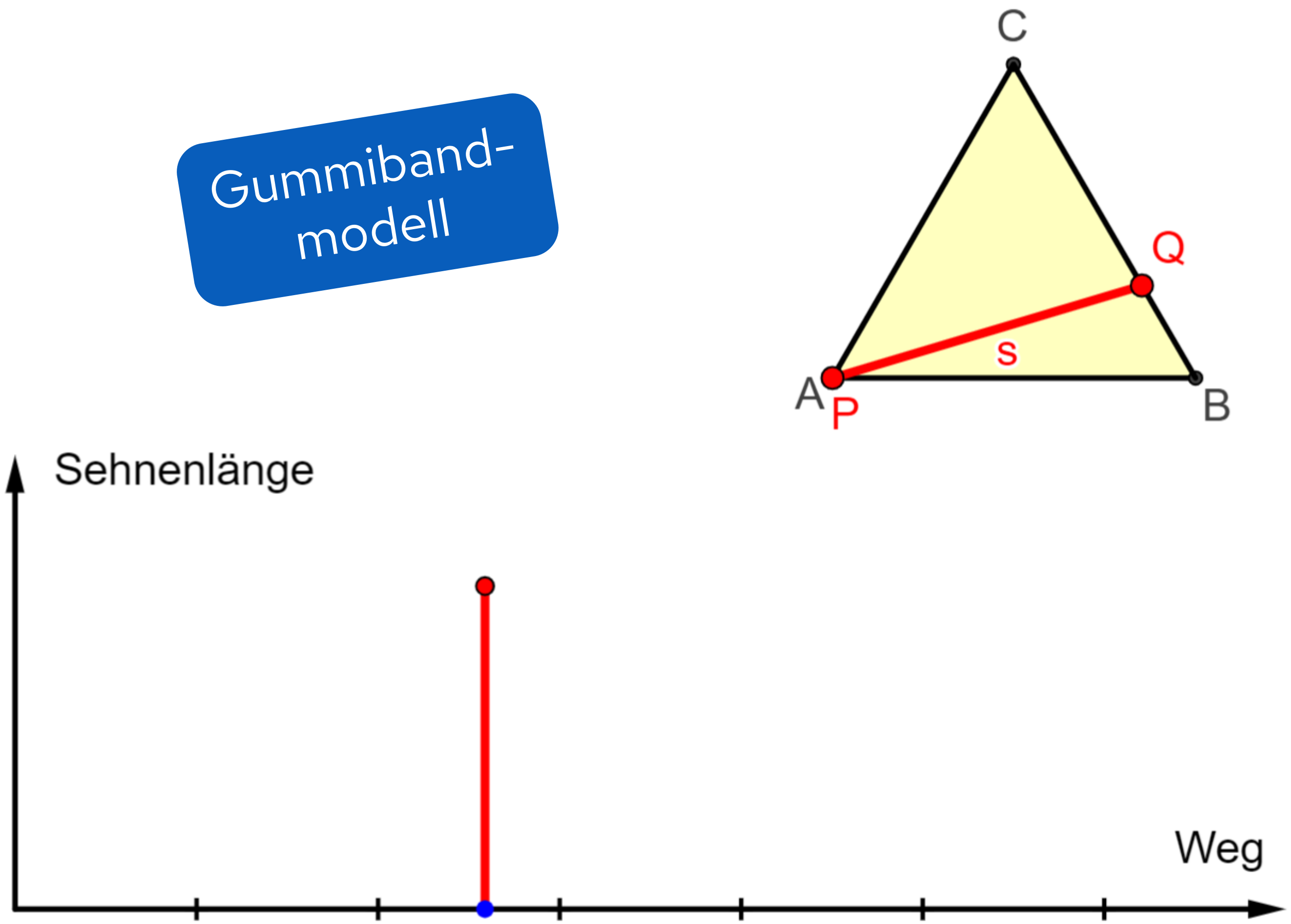
https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Holzmodell: Dreieckssehne



Arbeitsaufträge: Dreieckssehne

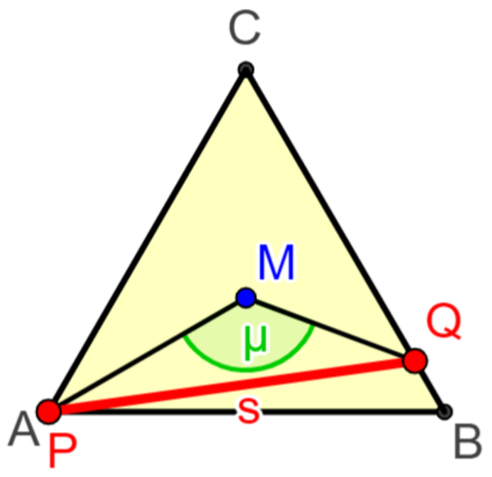
Gummiband-
modell

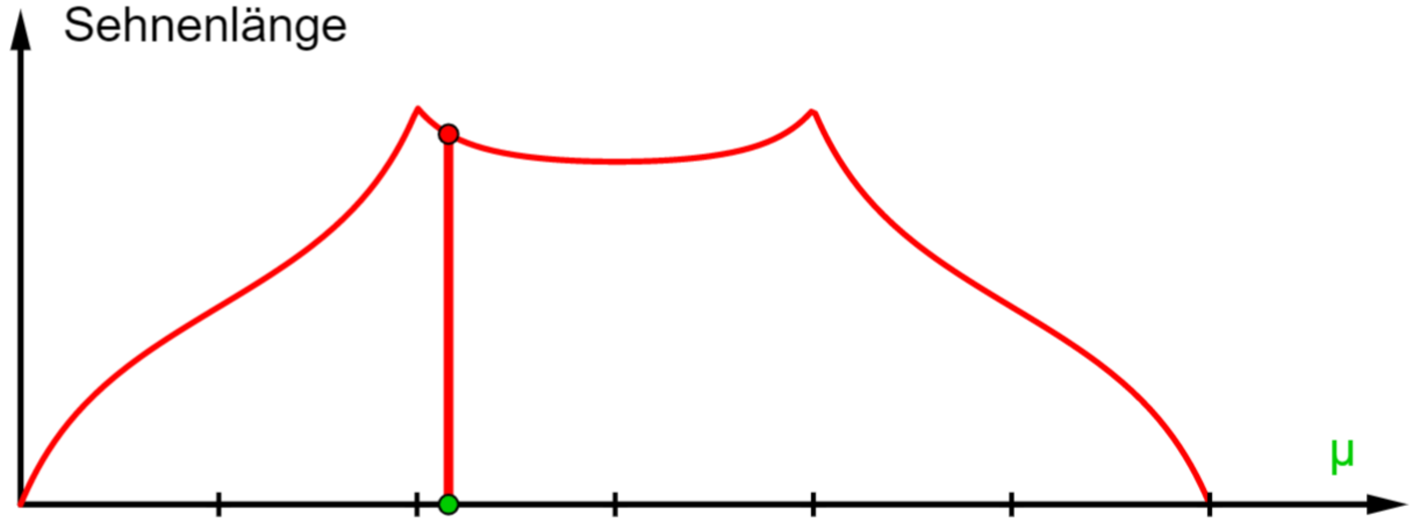


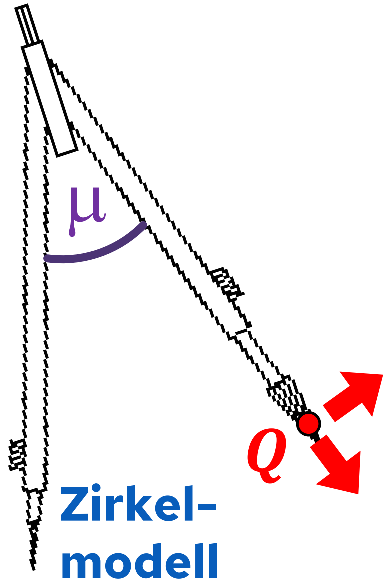
Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Graphen der Zuordnung $x \mapsto s(x)$.

- Achten Sie dabei insbesondere auch auf das Änderungsverhalten.
- Diskutieren Sie alle Details des Verlaufs Ihres Graphen in der Gruppe.
- Interpretieren und erklären Sie Eigenschaften des Graphen anhand von Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks und umgekehrt.

Dreieckssehne: Modellierung der Bewegung von Q eindeutig?







 https://www.geogebra.org/classroom/jykdjfdm https://www.geogebra.org/m/wjgQ3PQB

Einsatz von Werkzeugen

Bilder

- Denkprozesse anstoßen
- Ergebnisse zusammenfassen

„Modelle"

- Verständnisgrundlagen anbieten (vgl. „Gummibandmodell")

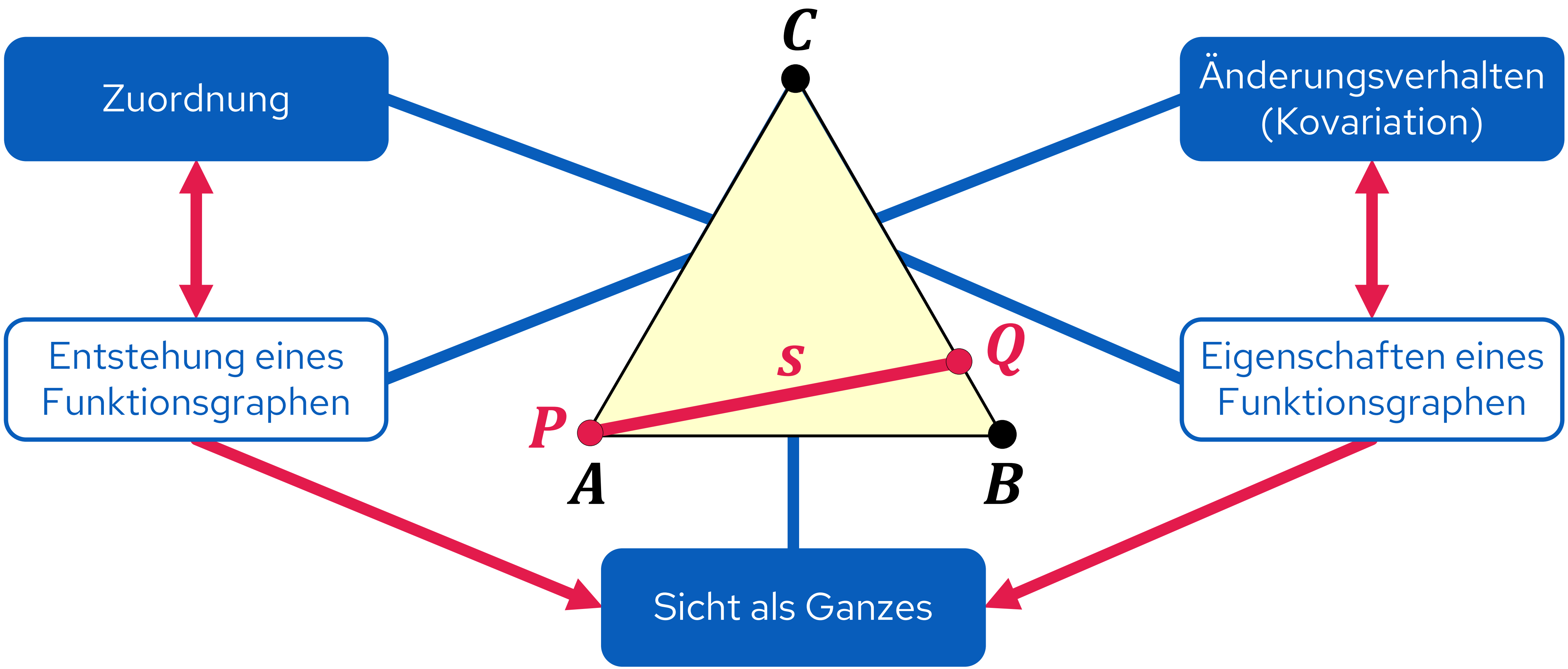
Grundsätzlich

- Werkzeuge dosiert einsetzen
- Einsatz von Werkzeugen soll zum Denken anregen

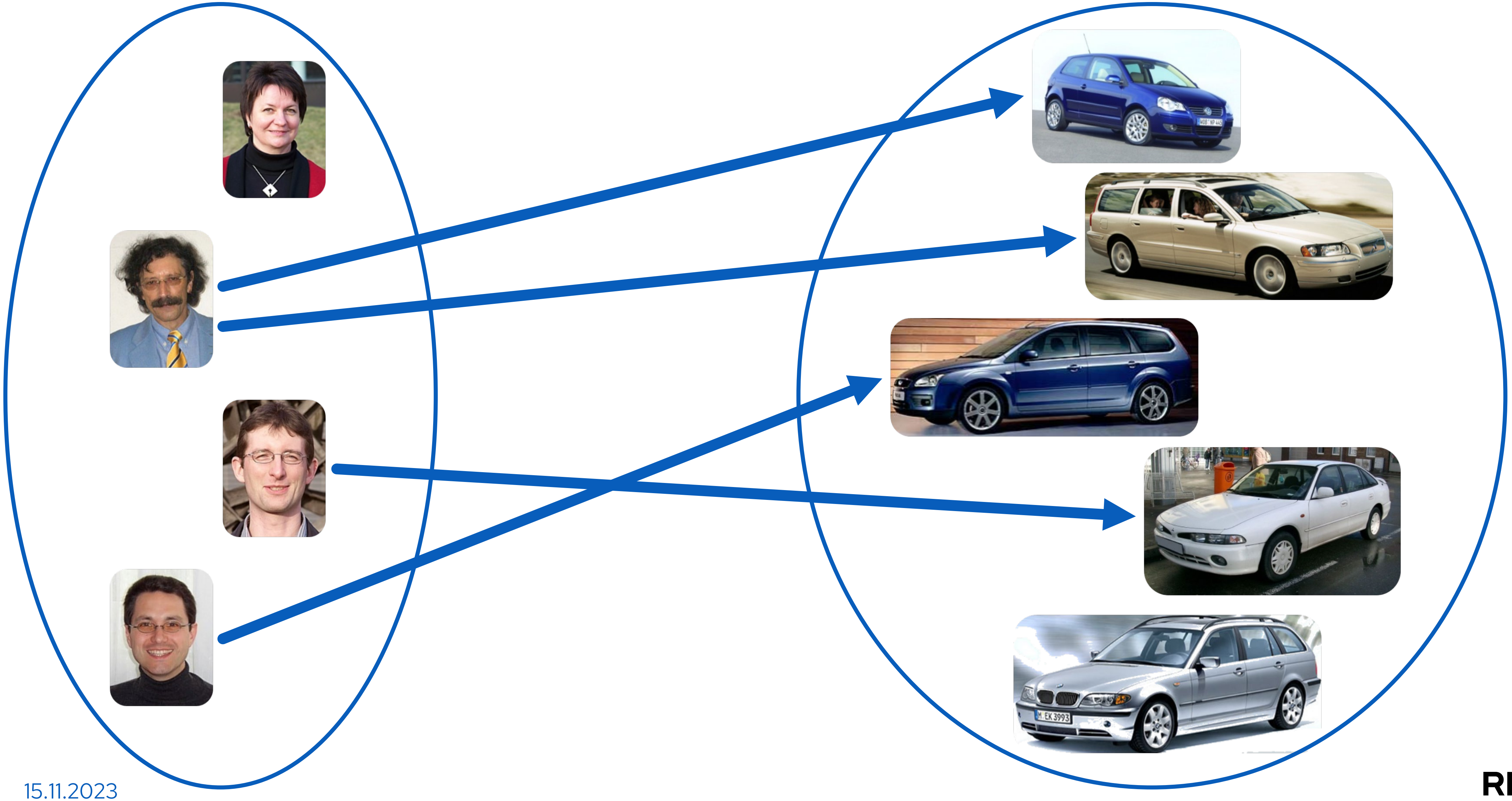
Computerwerkzeuge

- Kontrollinstanz
  - „Im Kopf" abgelaufene Denkvorgänge überprüfen und hinterfragen
- Kommunikationsmittel
  - Aufmerksamkeit fokussieren
  - Änderungsverhalten durch „Vorführen" von Veränderungen veranschaulichen
- „Denkzeug"
  - Komplexität reduzieren
  - Gedächtnis entlasten
  - Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation

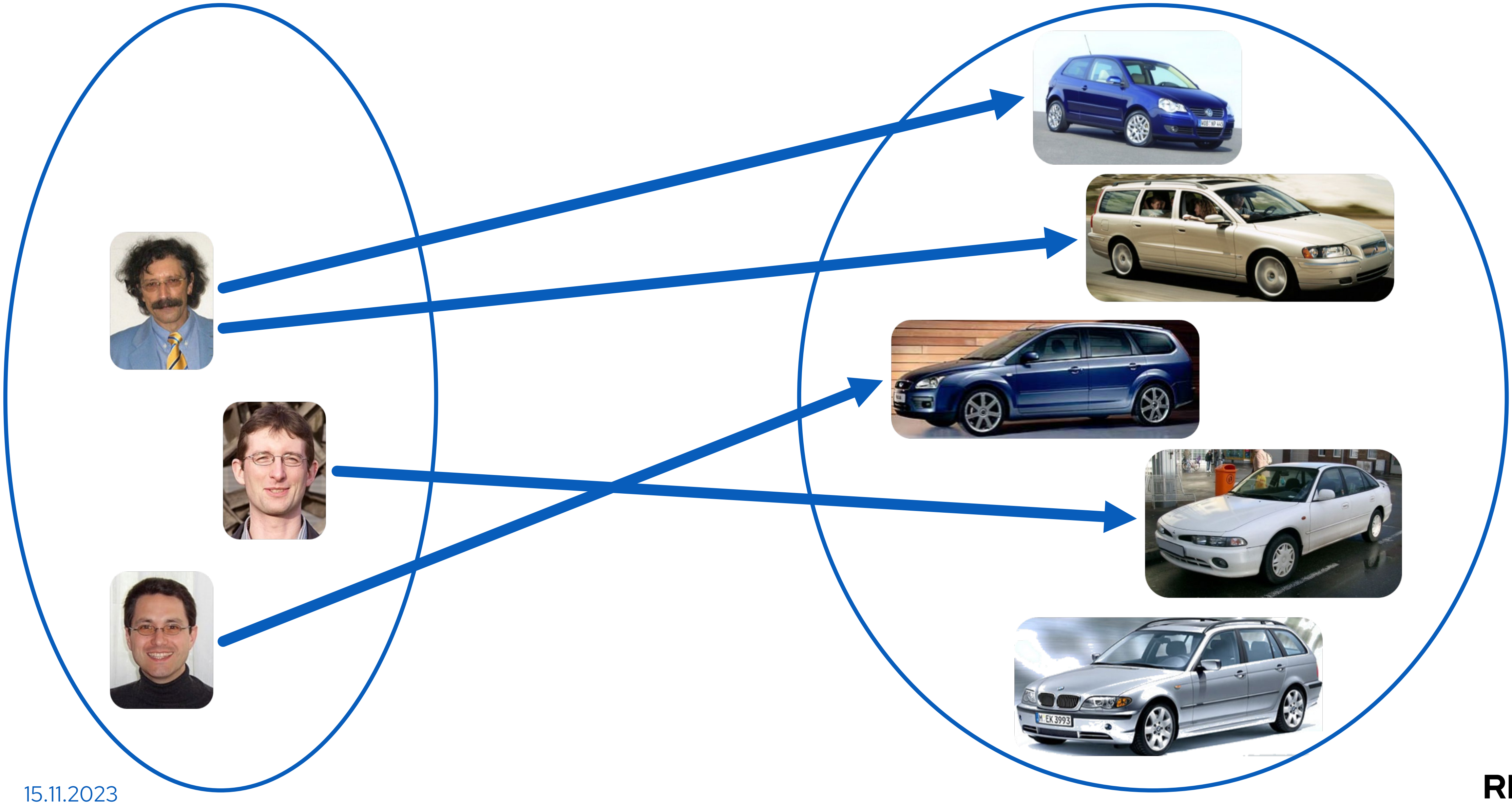
Figuren verändern – Funktionen verstehen



Was ist eigentlich eine Funktion?

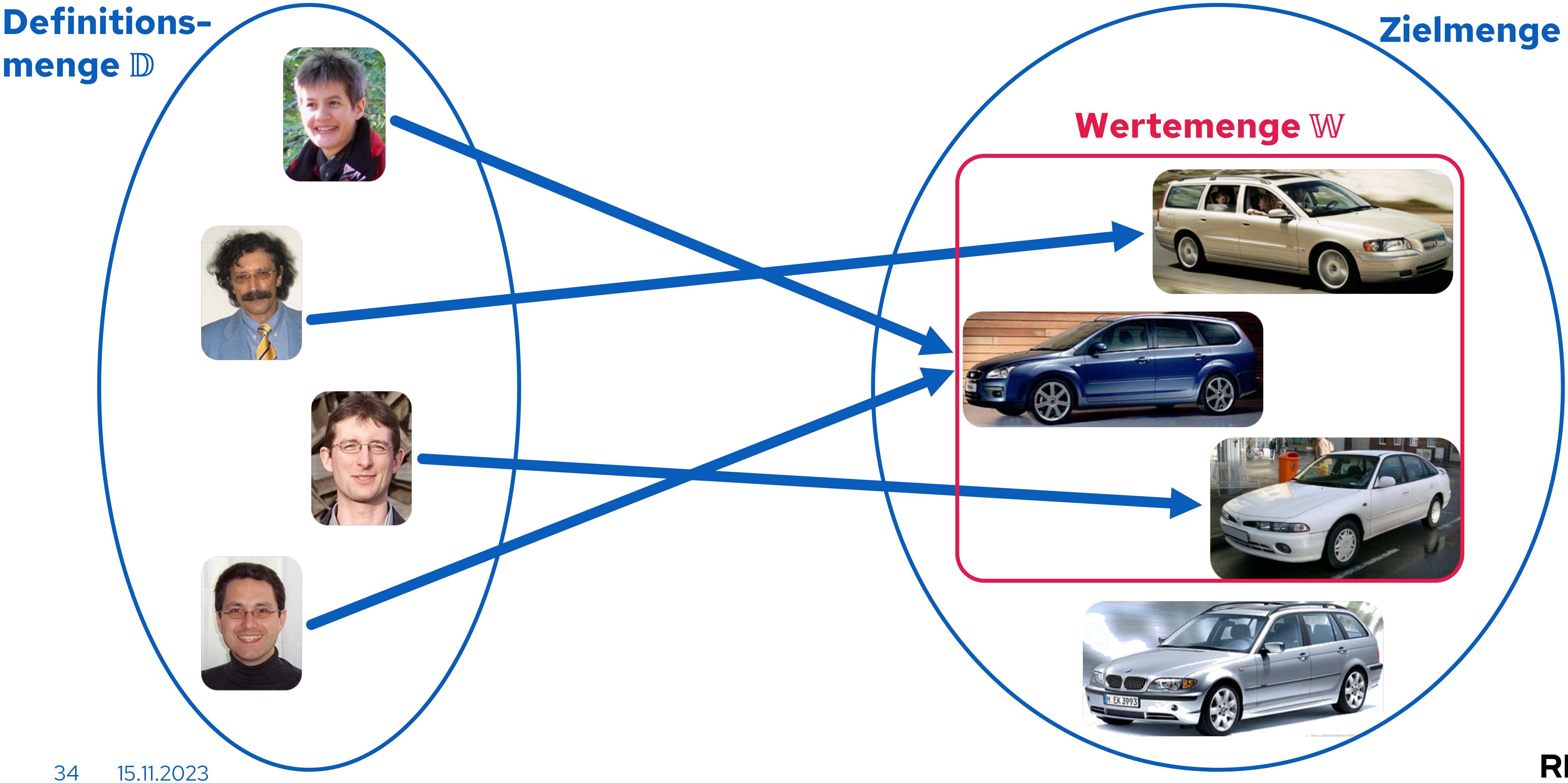


Was ist eigentlich eine Funktion?



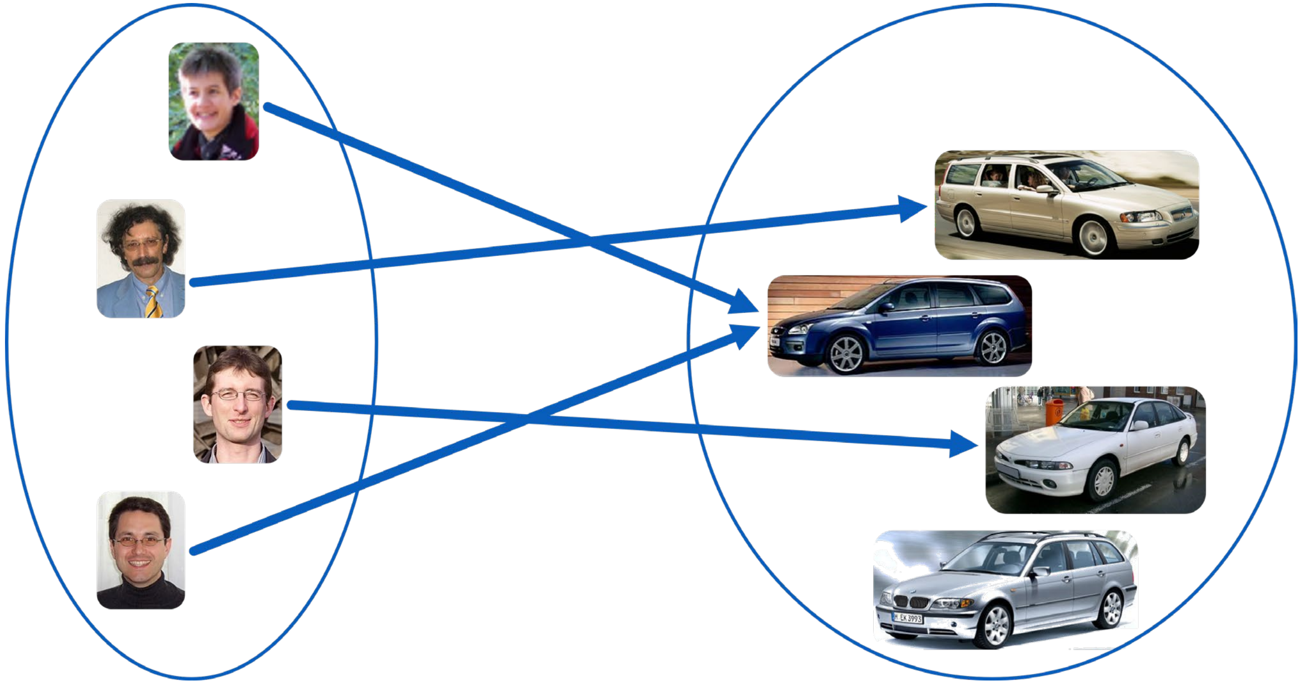
Was ist eigentlich eine Funktion?

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Was ist eigentlich eine Funktion?

Definition Funktion (1)
Eine Funktion ist eine Zuordnung zwischen einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und einer (Ziel-) Menge $\mathbb{M}$, die **jedem** Element aus $\mathbb{D}$ **genau ein** Element aus $\mathbb{M}$ zuordnet.



Definition Funktion (2)
Eine Funktion ist eine **linkstotale** und **rechtseindeutige** Relation.

Definition Relation
Eine Relation ist eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ zweier Mengen A und B.

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

Grundlegende Aspekte beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

Konstruktion

- Achsen korrekt beschriften
  - Welche Zusammenhänge werden dargestellt?
- Skalierung geeignet wählen
  - Schüler/innen nehmen häufig fälschlich an, dass die Achsen identisch skaliert sein müssen.
- Negative Bereiche beachten
  - Daten mit negativen Koordinaten im II., III. oder IV. Quadranten darstellen.

Ziel: SuS können funktionale Zusammen-hänge angemessen darstellen.

Interpretation

- Achsenbeschriftung beachten
  - Dargestellten Zusammenhang richtig erfassen
- Achsenskalierung beachten
  - Dargestellten Zusammenhang richtig erfassen
  - Verschiedene Zusammenhänge fehlerfrei vergleichen
  - Täuschungen und Übertreibungen erkennen

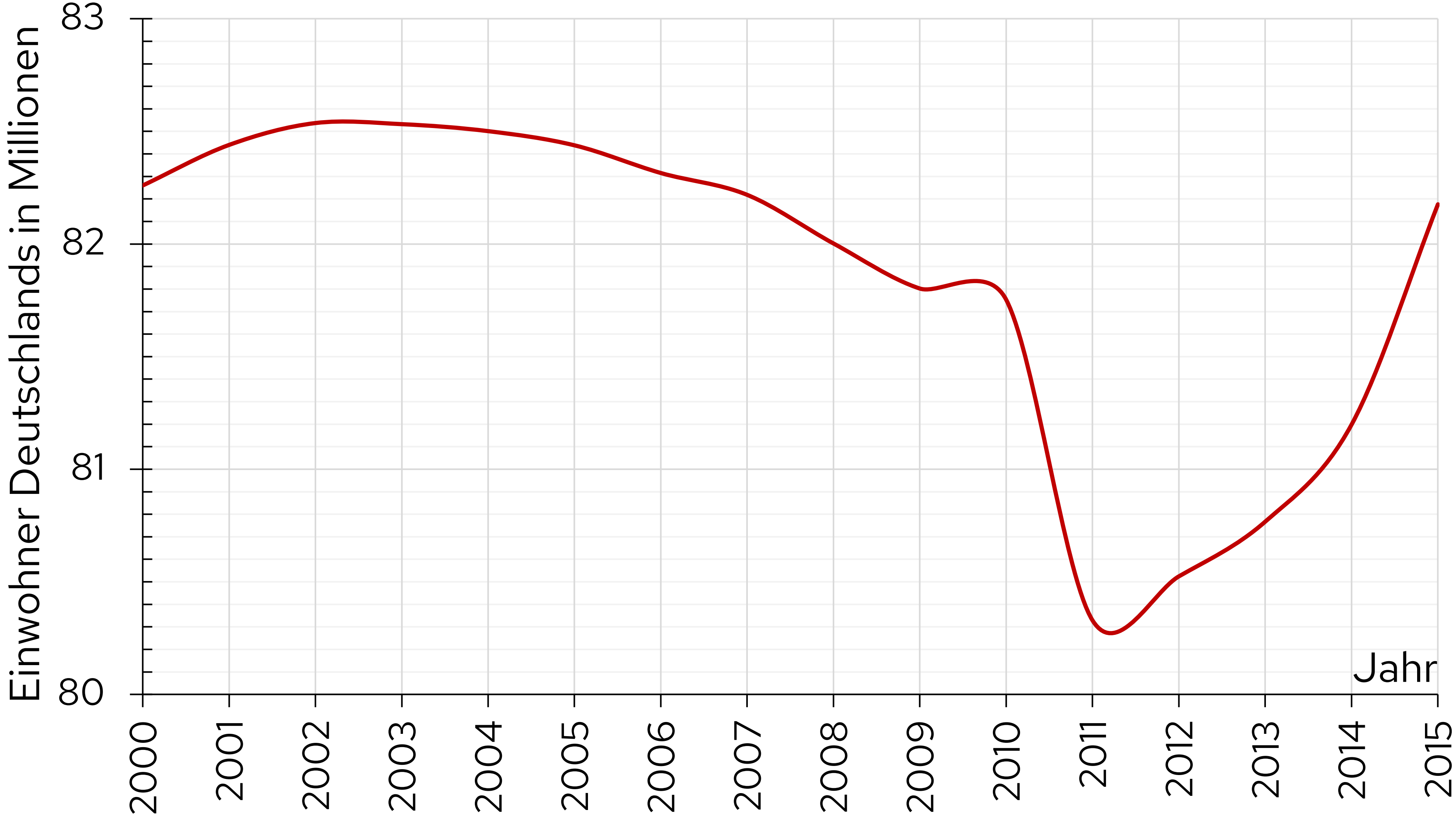
Ziel: SuS können Darstellungen funktionaler Zusammenhänge kritisch beurteilen.

Fähigkeiten beim Arbeiten mit Funktionsgraphen

<table>
<tr><th colspan="3">Informationsentnahme</th><th colspan="2">Konstruktion</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Identifizieren</td><td colspan="2">dargestellten Zusammenhang erkennen</td><td>passenden Diagrammtyp wählen</td><td rowspan="4">Aufbau d. Rahmens</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Zuordnung der Größen zu den Achsen (Achsenbeschriftung) erfassen</td><td>Größen den Achsen zuordnen</td></tr>
<tr><td>Achsen beschriften</td></tr>
<tr><td colspan="2">Achsenskalierung beachten</td><td>Achsen skalieren</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ablesen</td><td>1. Ordnung</td><td>einen Wert ablesen</td><td>Punktwerte eintragen</td><td rowspan="4">Eintragen der Daten</td></tr>
<tr><td>2. Ordnung</td><td>zwei Werte vergleichen oder Trend erkennen (qualitativ / quantitativ)</td><td>Verbindungslinie zwischen Punkten oder Trendlinie skizzieren</td></tr>
<tr><td>3. Ordnung</td><td>mehrerer Werte oder Trends vergleichen (qualitativ / quantitativ)</td><td>mehrere Trendlinien skizzieren</td></tr>
<tr><td></td><td>Extrapolieren / Vorhersagen</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Integration</td></tr>
</table>

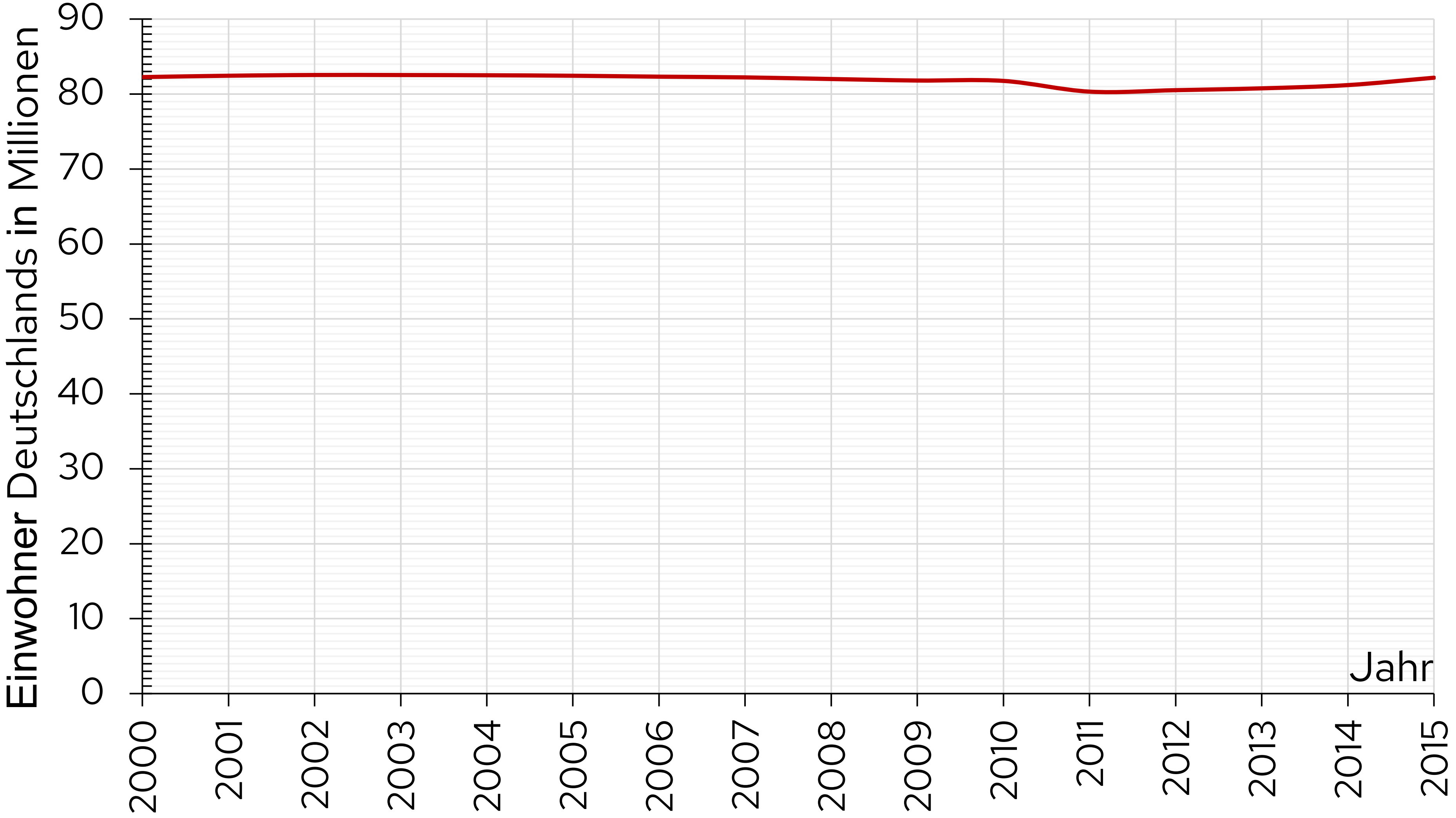
Nach: Lachmayer, S., Nerdel, C. & Prechtl, H. (2007). Modellierung kognitiver Fähigkeiten beim Umgang mit Diagrammen. *ZfDN 13*, 145-160

Bevölkerungsstand in Deutschland



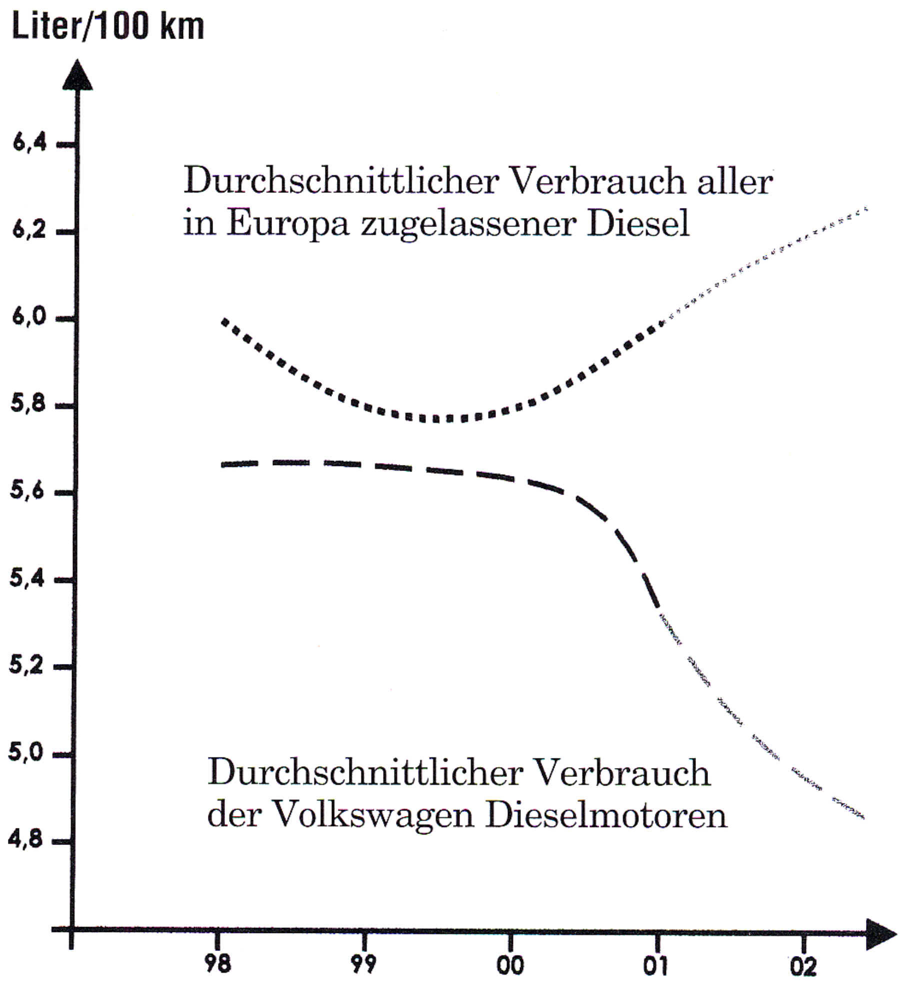
Daten: Statistisches Bundesamt

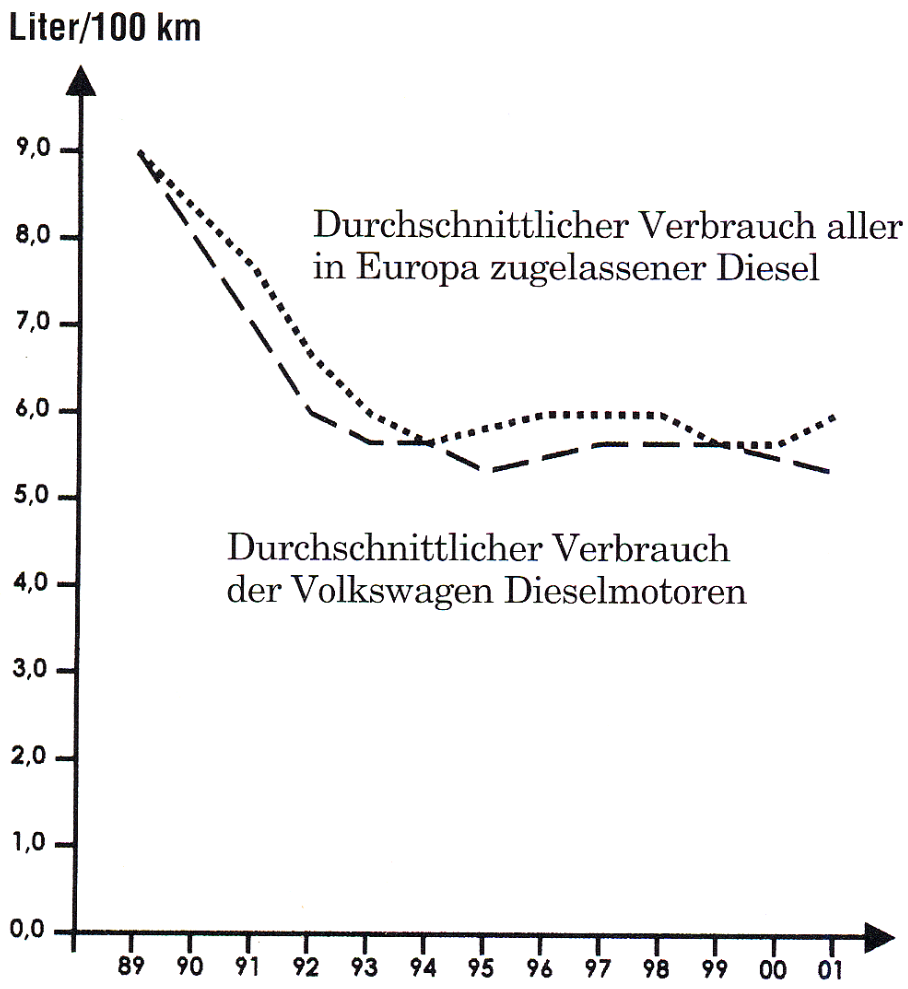
Bevölkerungsstand in Deutschland



 Daten: Statistisches Bundesamt

Daten unterschiedlich darstellen





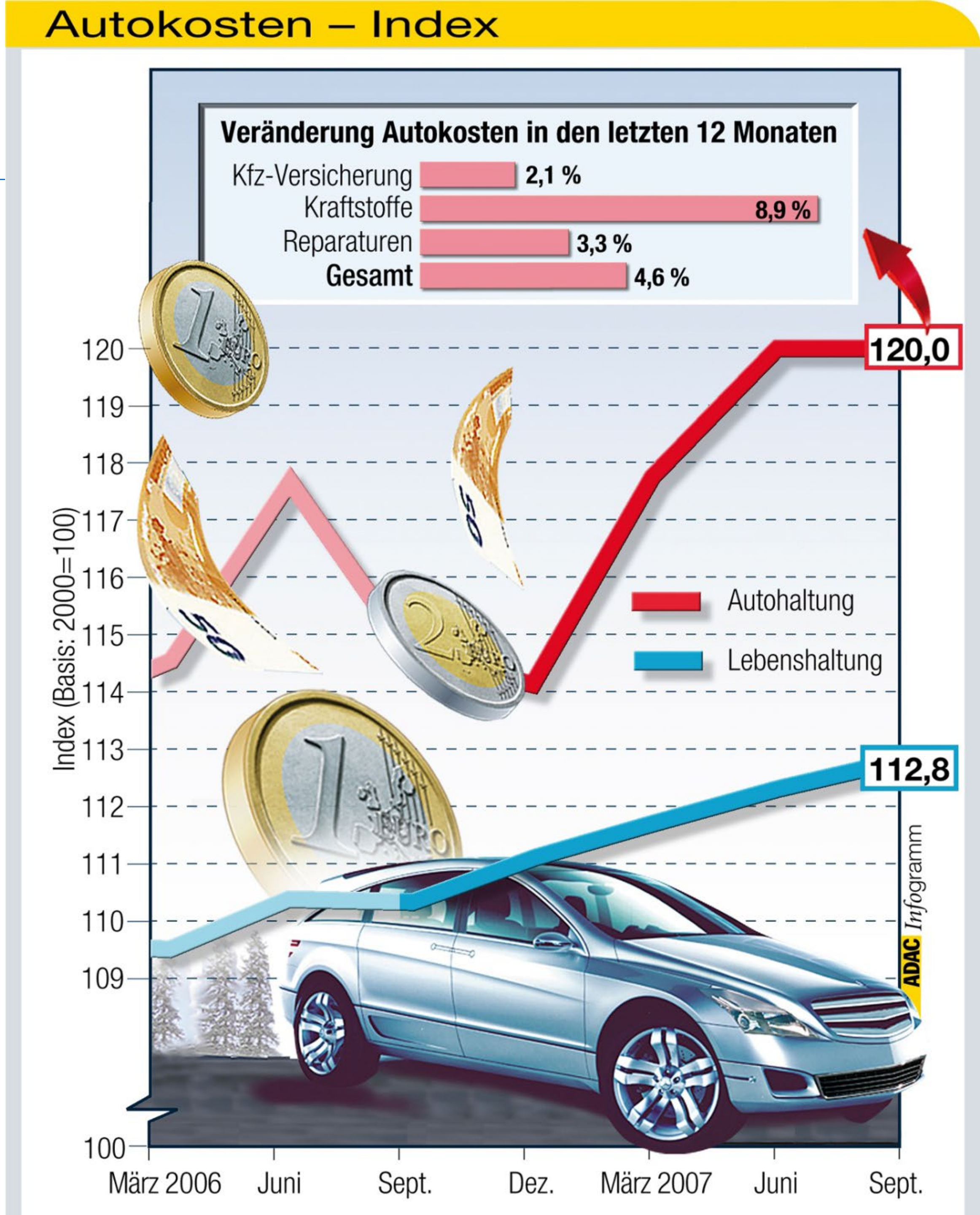
 Halbach (2001). Eine Statistik – Viele Interpretationen. *Mathematik lehren 109*, S. 46–48

„Misstrauensregeln“ für Diagramme

- Verstöße gegen Proportionalität?
- Verstöße gegen perspektivische Verzerrungen?
- Stauchungen oder Streckungen von Achsen?
- Klare Achseneinteilung?
- Achsen vollständig dargestellt?
- Informationsbeitrag von Farben?
- Passen die Daten zur Interpretation?
- Welche Daten hätte ich gerne zum Thema erfahren?
- Passen die Daten zu meiner Einschätzung?
- Wie und wann wurden die Daten gewonnen?
- Interesse des Autors?
- Inhaltlicher Beitrag der Zahlen und Graphiken zur Botschaft?

 Halbach (2001). Eine Statistik – Viele Interpretationen. *Mathematik lehren 109*, 46-48

„Misstrauensregeln“ anwenden



http://presse.adac.de/meldungen/Geld_Kosten/Autokosten_Index_Herbst_2007.asp?ComponentID=189519&SourcePageID=14990#0 (Abgerufen am 30.10.2007)

R TU P Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

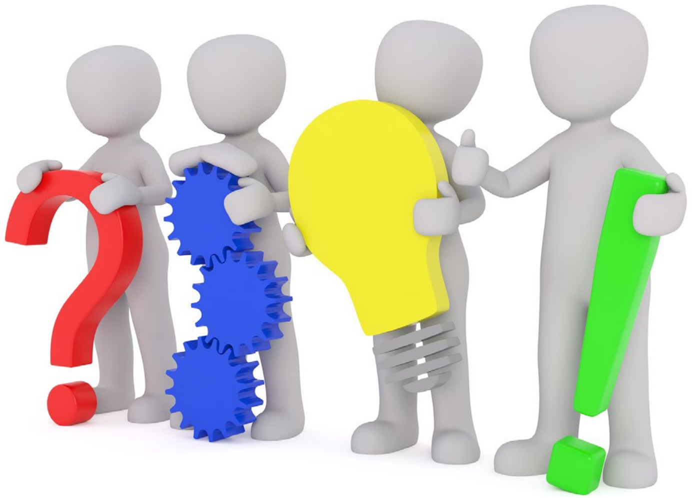
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

Typische Schülerfehler beim Arbeiten mit Funktionsgraphen



Lesen Sie den Text Hofmann & Roth (2021).

- Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten
- Probleme beim Herstellen eines Bezugs zur Situation
- „Graph als Bild“-Fehler
- Verwechslung von Bestand und Änderung
- Concept Image ↔ Concept Definition

Hofmann, R. & Roth, J. (2021). Lernfortschritte identifizieren – Typische Fehler im Umgang mit Funktionen. *Mathematik lehren, 226*, 15-19.

Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten

Konstruktion

- Eindeutigkeit missachtet
  - Vgl. Grundvorstellung Zuordnung
- Trugschluss: Eindeutigkeit → Injektivität
  - Annahme: Da jedem x genau ein y zugeordnet wird, darf auch jedes y nur einmal vorkommen.

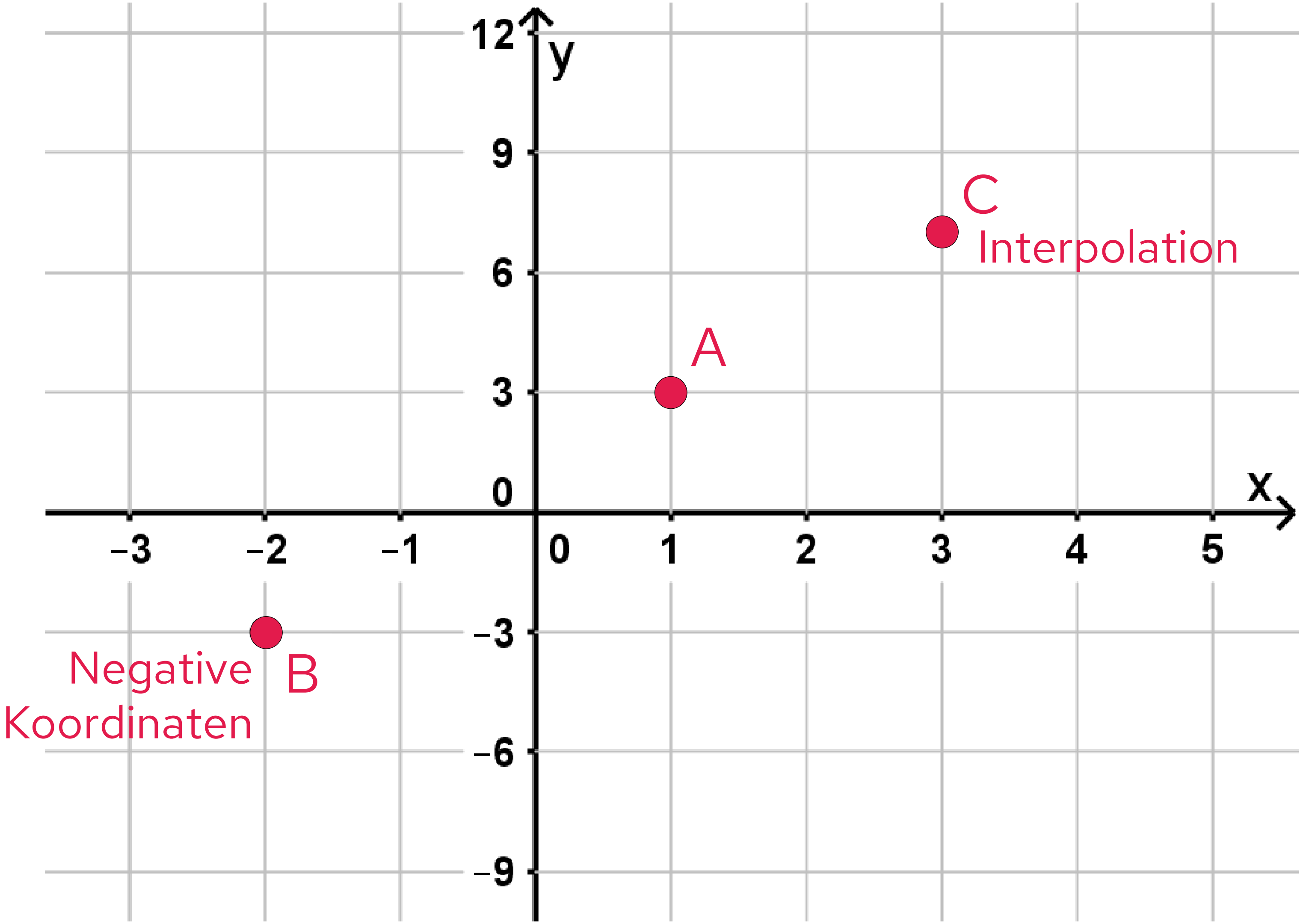
Konstruktion & Ablesen

- x- und y-Koordinate werden vertauscht
  - Vgl. Grundvorstellung Zuordnung
- Achsenskalierung missachtet

Konstruktion & Ablesen

- Probleme
  - mit negativen Koordinaten
  - bei der Interpolation
  - beim Ablesen des x-Werts zu einem y-Wert
  - beim Bestimmen von Steigungen
  - beim Vergleich von Steigungen in verschiedenen Abschnitten oder Graphen
- **Annahme:** Sichtbarer Graph zeigt die gesamte Funktion (Probleme beim Treffen von Vorhersagen)

Probleme beim Einzeichnen und Ablesen von Punkten



Schwierigkeitsgrad?

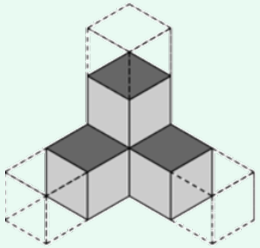
Probleme beim Herstellen eines Bezugs zur Situation

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Konstruktion

Unsicherheit,

- welche für die Situation markanten Punkte sich für die Konstruktion des Graphen nutzen lassen
- ob das Verbinden von Punkten in der Situation erlaubt bzw. sinnvoll ist



- wie Punkte ggf. verbunden werden müssen (Typ des funktionalen Zusammenhangs) → Oft wird fälschlich linear oder stückweise linear verbunden.
- Keine Änderung ↔ Funktionswert 0

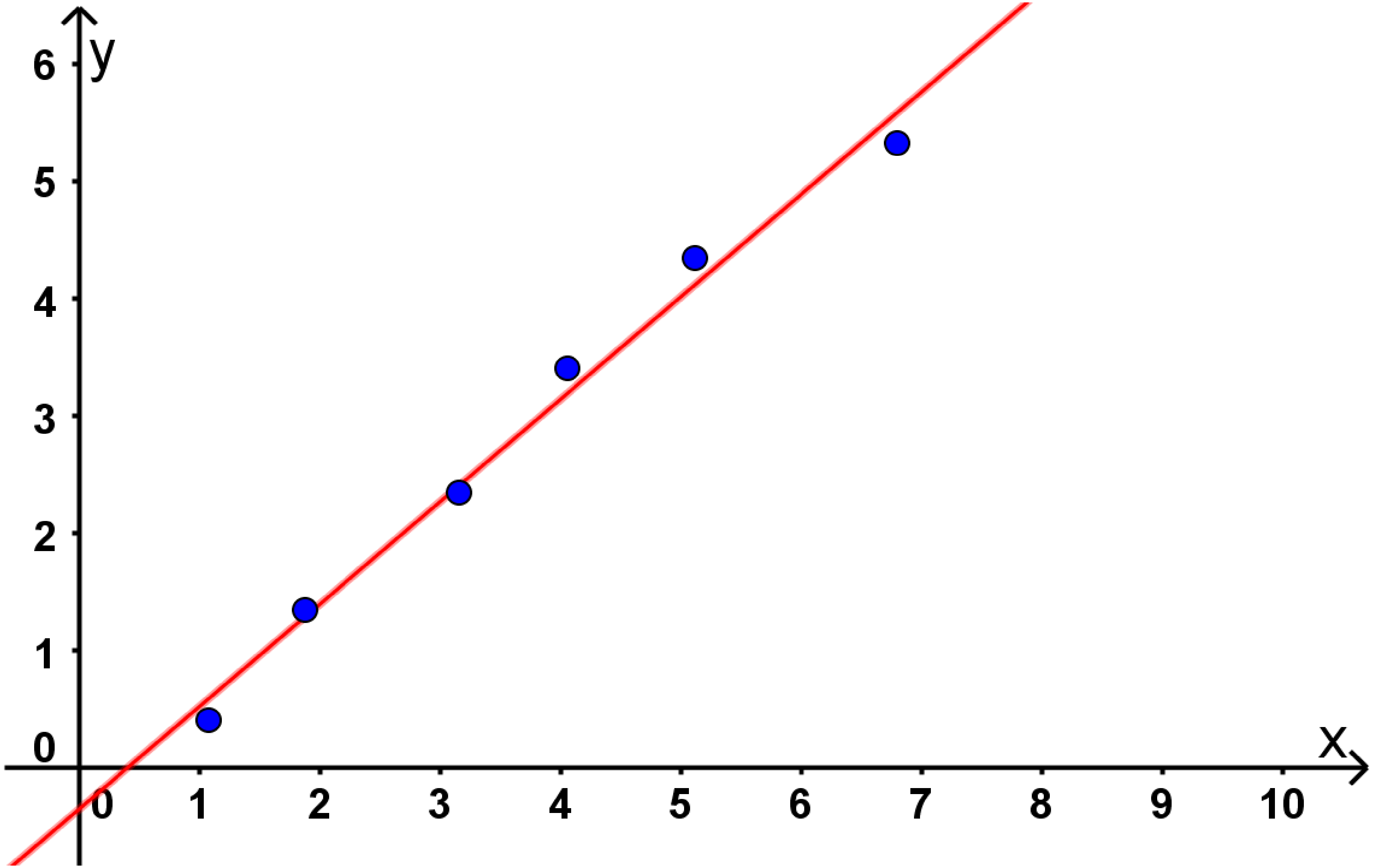
Interpretation

Unsicherheit, wie

- Punkte
- Achsenabschnitte
- Schnittpunkte von Graphen
- konstante Graphen-Abschnitte (Graph parallel zur x-Achse)
- Linie durch Punkte (Funktionsgraph; Interpolations- bzw. Ausgleichsgerade; Visualisierung von Veränderungen)
- Steigung des Graphen insgesamt / in verschiedenen Abschnitten
- verschiedene Graphen zu einer Situation im Vergleich

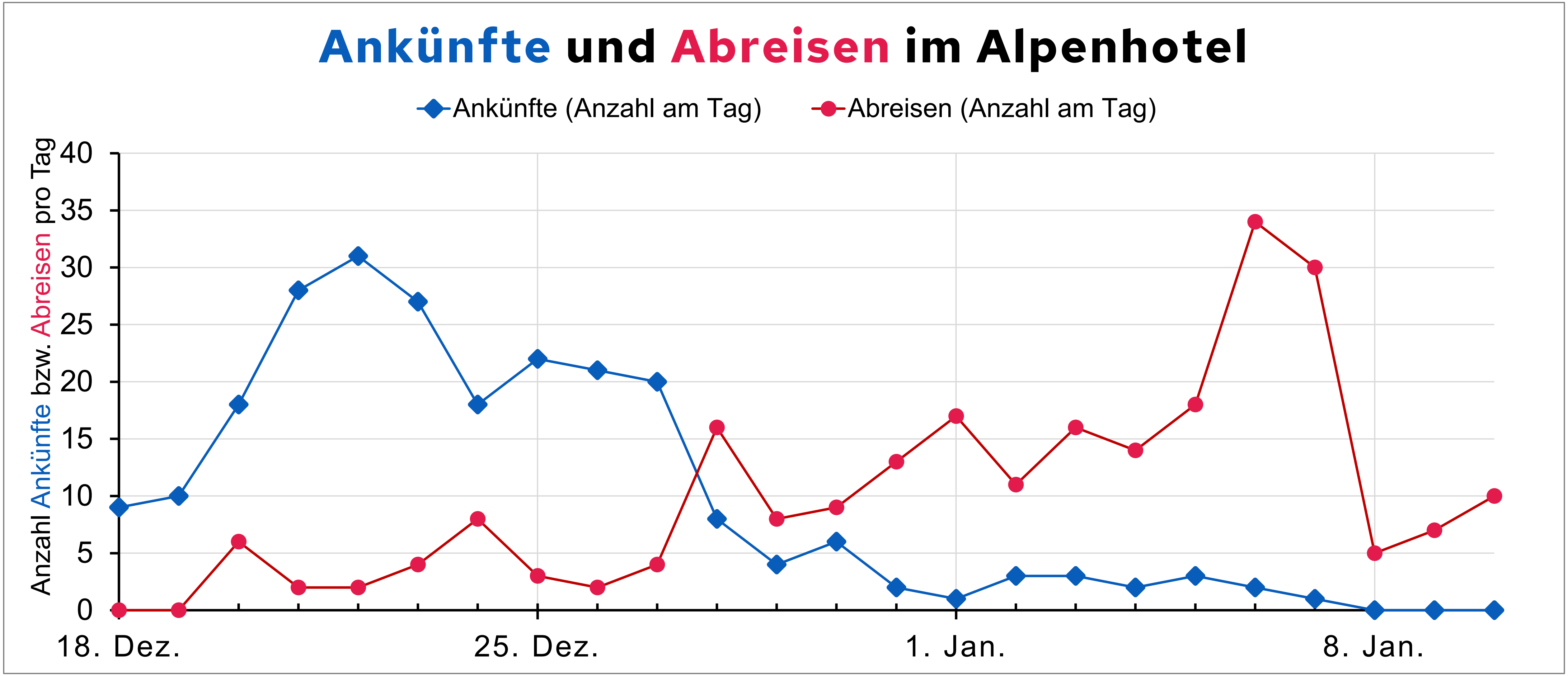
(bzgl. der Situation) zu interpretieren sind.

Probleme beim Herstellen eines Bezugs zur Situation



Bestand und Änderung

Wann waren die meisten Gäste im Hotel?



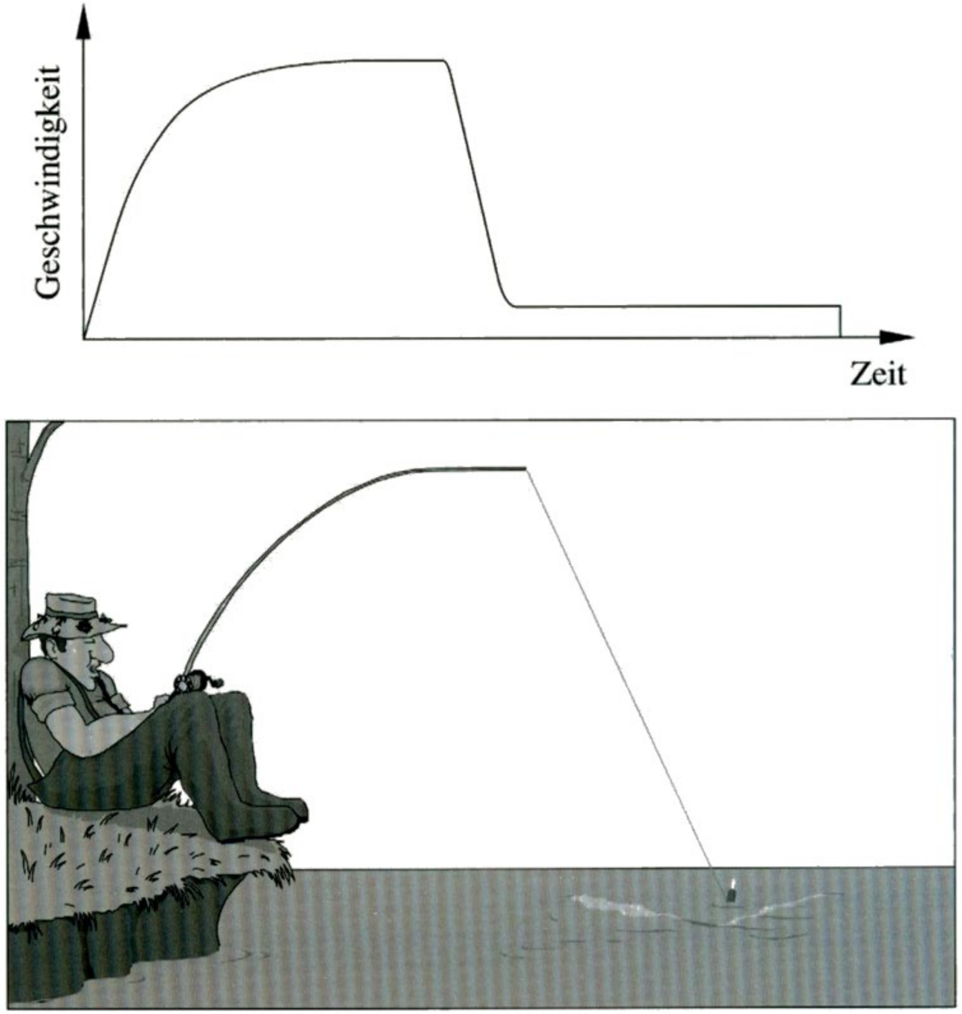
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

„Graph als Bild"-Fehler

Konstruktion & Interpretation

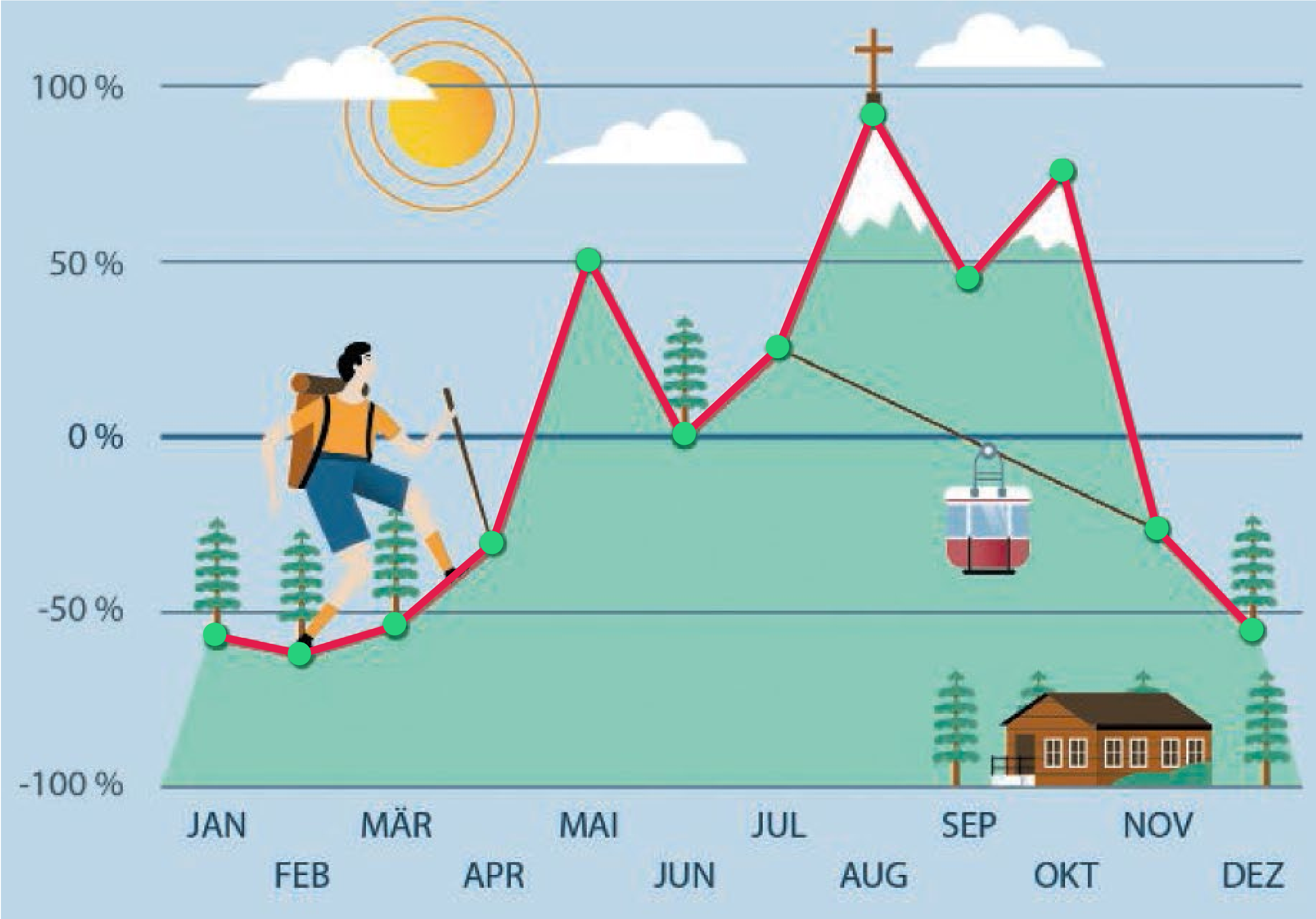
- Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs sondern als Abbild (Foto) der Realität interpretiert bzw. konstruiert.
- Tritt häufig auf, wenn die Funktion einen Zusammenhang zwischen zurückgeleg-tem Weg oder Geschwindigkeit und Zeit darstellt.
- Der Funktionsgraph wird dann oft als zurückgelegte Strecke bzw. Strecken-verlauf interpretiert.



Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 175–193). Washington, DC: MAA.
Clement (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the 9th PME, Noordwijkerhout, The Netherlands

„Graph als Bild“-Fehler

Müllers Lust im August
In diesem Monat wird gewandert wie sonst nie – jedenfalls wenn die Fotocommunity Instagram als Gipfelindikator gilt: Wir haben ermittelt, in welchem Monat wie viele Fotos mit dem Schlagwort #wandern gepostet werden. Die Null-Prozent-Linie zeigt den Durchschnittswert.

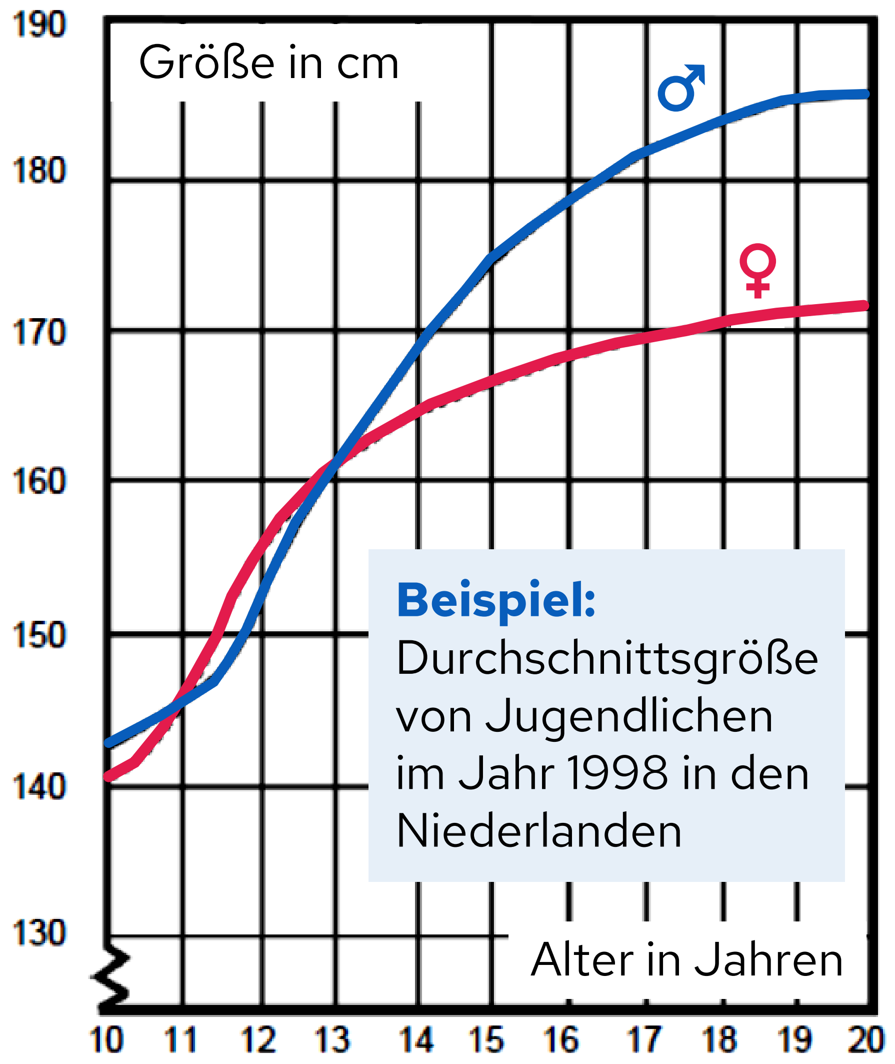


Verwechslung von Bestand und Änderung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Interpretation und gelegentlich Konstruktion

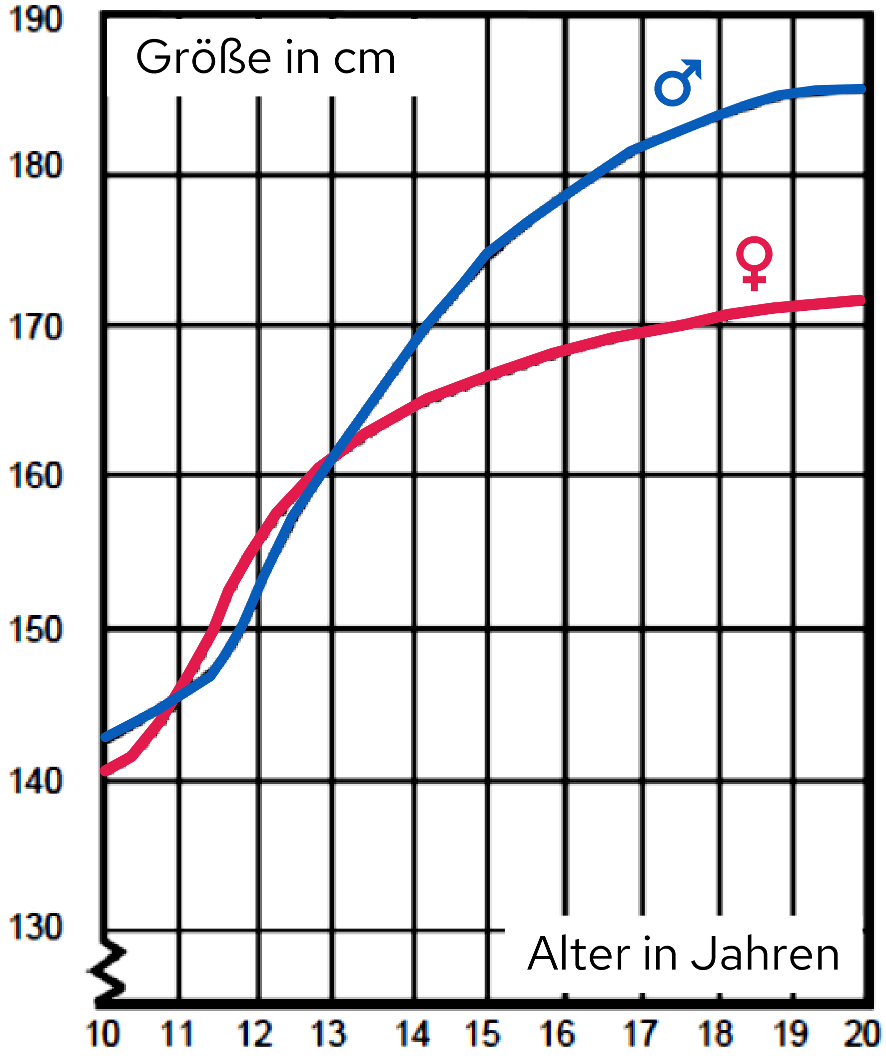
- Diese Verwechslung findet sich, wenn nach der Steigung (also der Änderung) an einer bestimmten Stelle bzw. in einem bestimmten Bereich gefragt wird.
- Statt der Änderung wird dann häufig der Bestand (d.h. der y-Wert an dieser Stelle bzw. die y-Werte in diesem Bereich) fokussiert.
- Dieser Fehler tritt auch auf, wenn mehrere Graphen oder verschiedene Teilbereiche eines Graphen miteinander verglichen werden und beispielsweise nach der größeren Änderung gefragt wird.



Beispiel: Durchschnittsgröße von Jugendlichen im Jahr 1998 in den Niederlanden

McDermott et al. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. Am. J. Phys. 55(6), 503-513
Clement (1985). Misconceptions in graphing. Proceedings of the 9th PME, Noordwijkerhout, The Netherlands

Verwechslung von Bestand und Änderung



Beispiel: Durchschnittsgrößen von Jugendlichen im Jahr 1998 in den Niederlanden

Vergleich innerhalb eines Graphen

- Innerhalb welchen Jahres wachsen die Jungen am stärksten?

Vergleich zwischen zwei Graphen

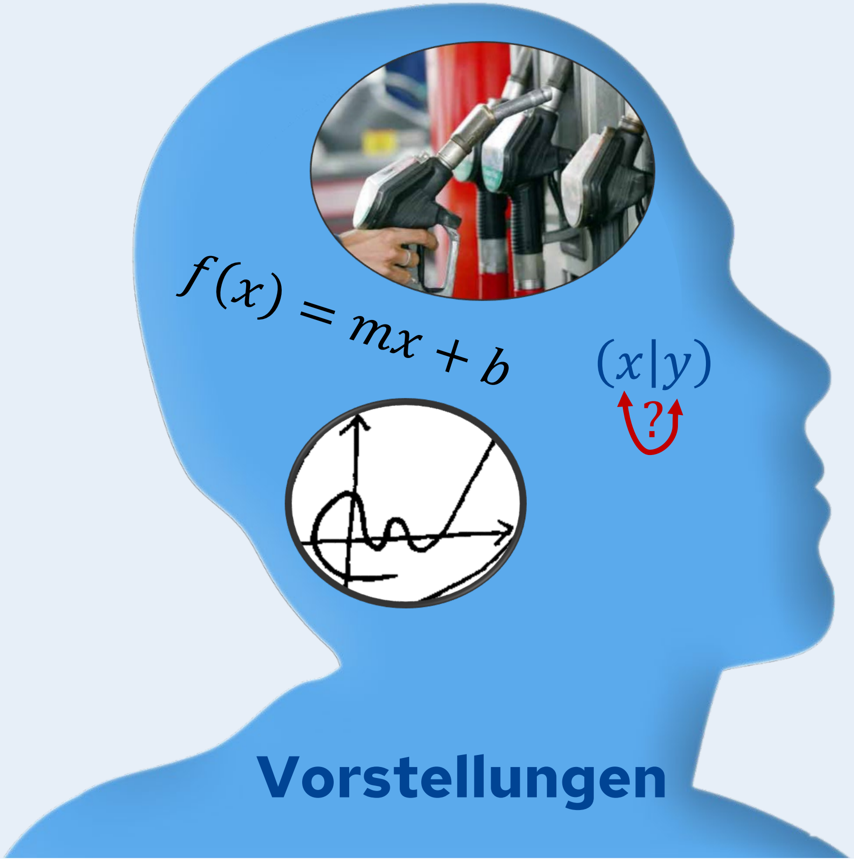
- Welche Jugendliche wachsen im Zeitraum zwischen 10 und 11 Jahren stärker – männliche oder weibliche?

Concept Image ↔ Concept Definition

Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education I (pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Concept Image

Durch Erfahrungen entstandene mentale Bilder die mit dem Konstrukt verbunden werden.



↔

Concept Definition

Definition des Konstrukts, die von der Person akzeptiert wurde.

Eine **Funktion** ist eine Zuordnung zwischen einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ und einer (Ziel-)Menge $\mathbb{M}$, die *jedem* Element aus $\mathbb{D}$ *genau ein* Element aus $\mathbb{M}$ zuordnet.

konventionelle Definition

Tall, D.O.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169

Concept Image ↔ Concept Definition

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Concept Image & Concept Definition

existieren nebeneinander und sind oft miteinander vereinbar. Allerdings sind sie nicht immer gleichzusetzen und können sich gegenseitig stören.

- Graphen, die ungewohnt erscheinen, mit denen man noch keine Erfahrung gesammelt hat, passen z.B. nicht zu den mentalen Bildern und somit nicht ins **Concept Image**.
- Aus diesem Grund werden sie oft nicht als Funktionen angesehen, obwohl sie definitionsgemäß Funktionen sind und die Definition einer Funktion (**Concept Definition**) von den jeweiligen Lernenden durchaus verinnerlicht wurde.

Konstruktion

Häufige Annahme von Schüler*innen:

- Graph beginnt immer im Ursprung

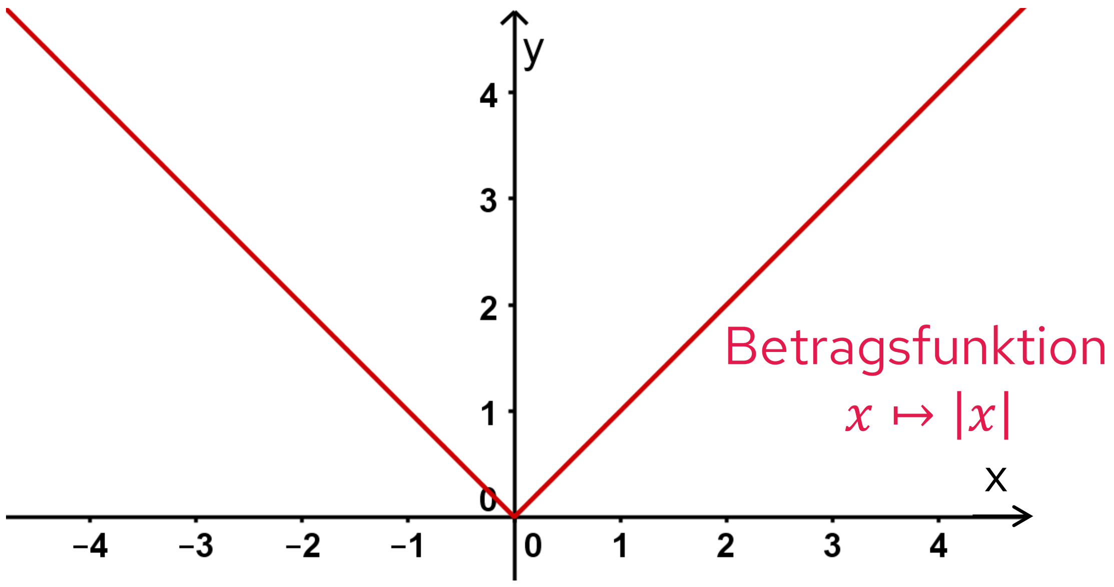
Interpretation & Konstruktion

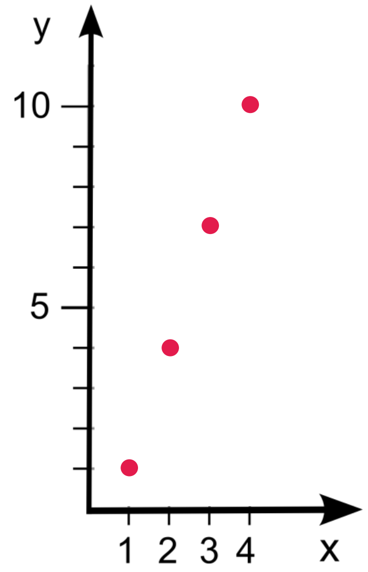
Häufige Annahmen von Schüler*innen:

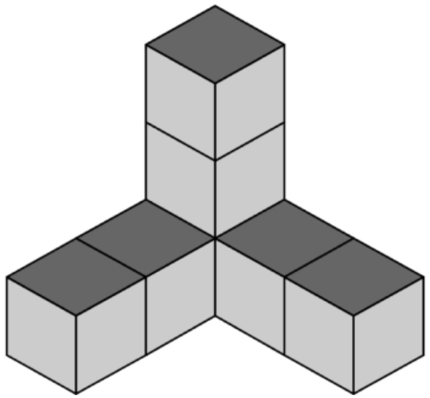
- Keine „richtigen" Funktionen sind (wenn noch nicht explizit im Unterricht thematisiert):
  - Abschnittsweise definierte Funktionen
  - Unstetige und diskrete Funktionen
  - Konstante Funktionen

Tall, D.O.; Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169

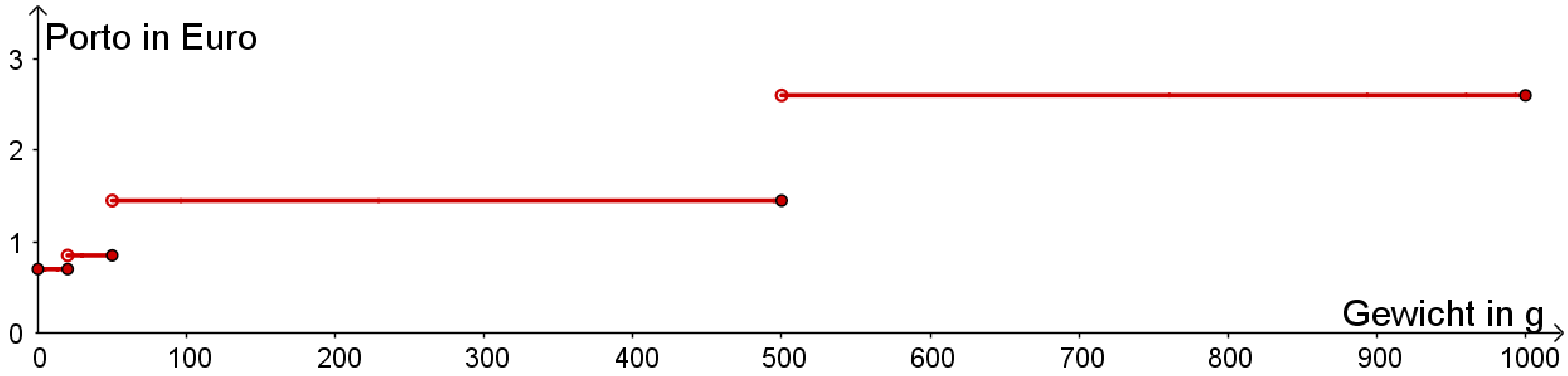
Concept Image ↔ Concept Definition





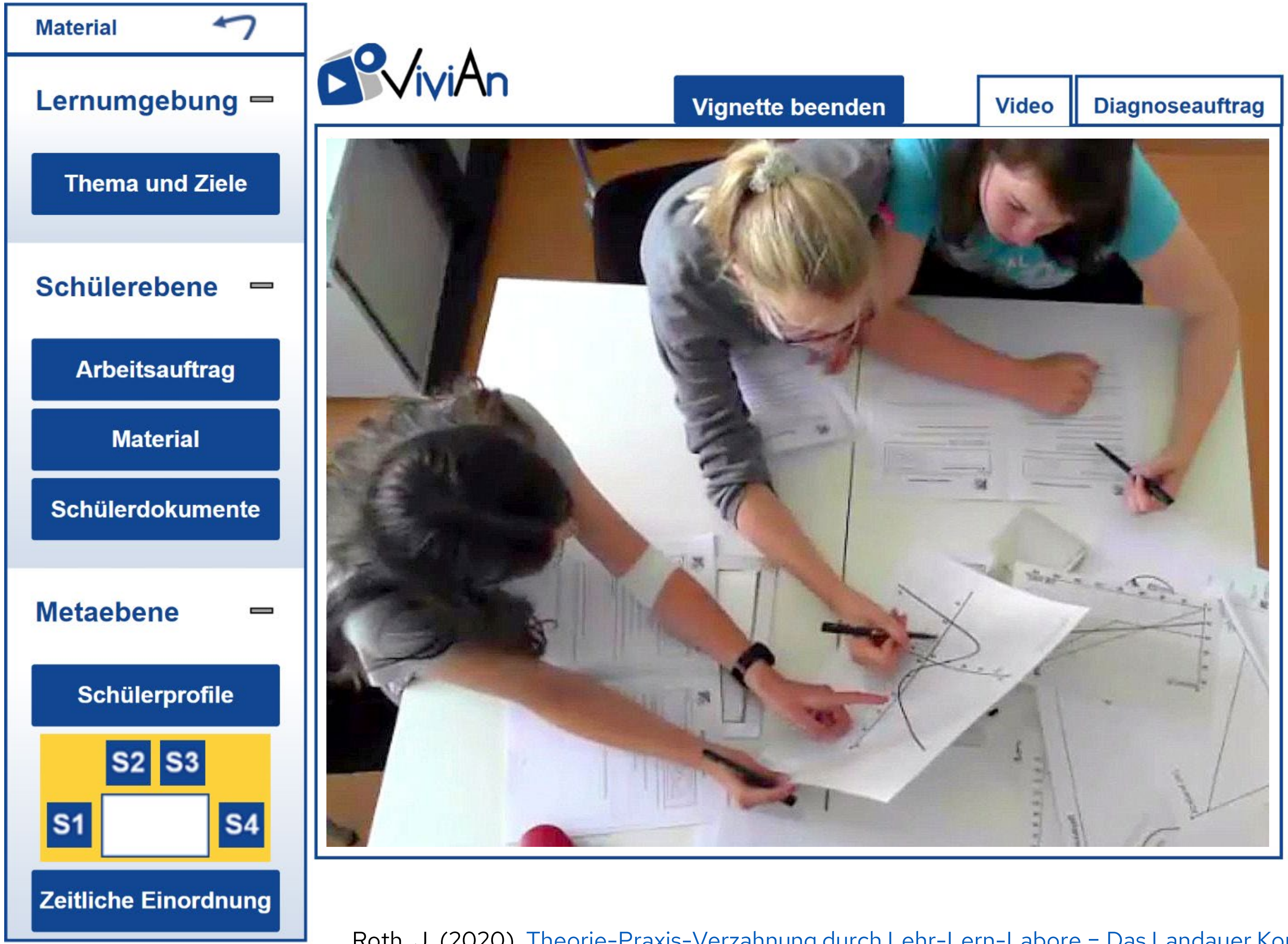


Portofunktion



Videovignetten zur Analyse von Unterrichtsprozessen

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

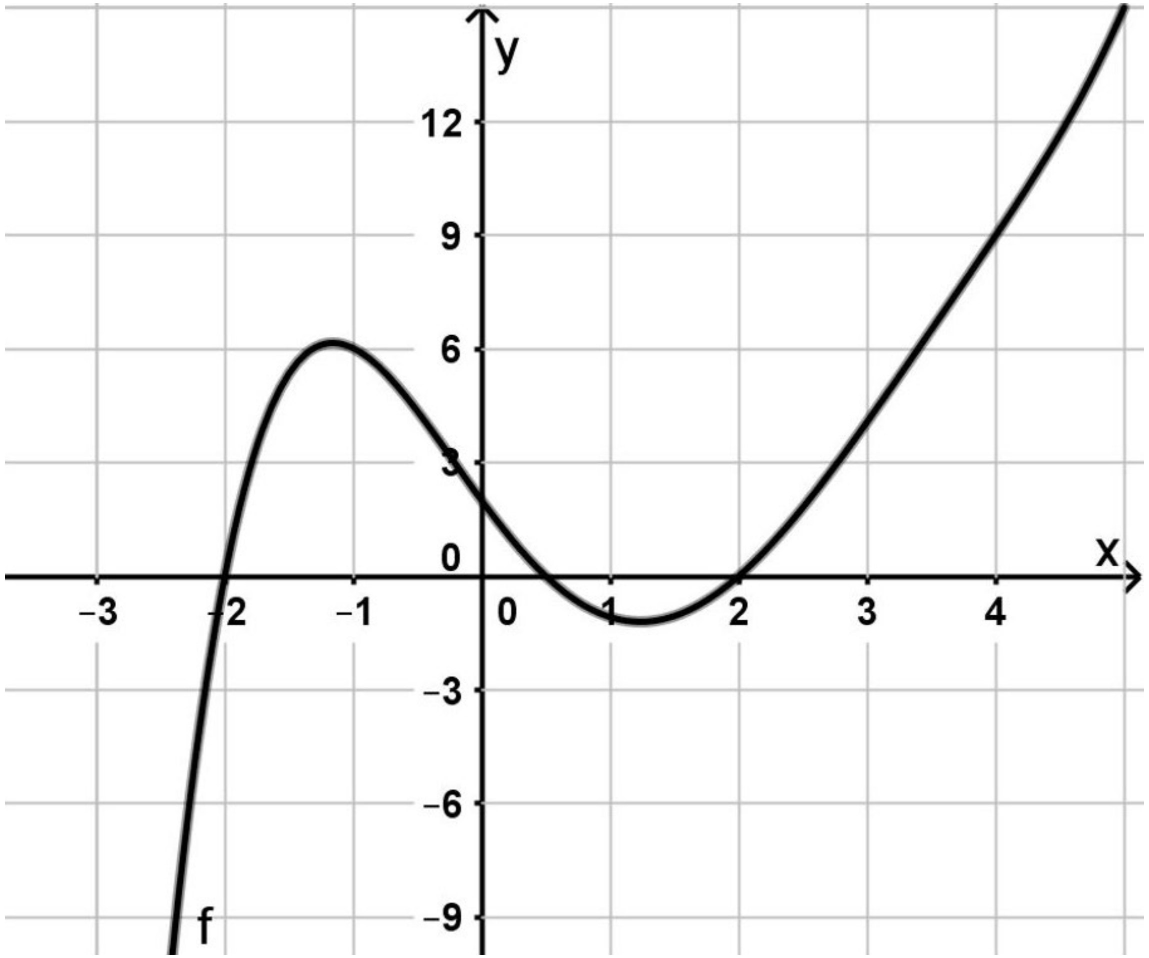


ViviAn

https://vivian.projects.rptu.de

Roth, J. (2020). Theorie-Praxis-Verzahnung durch Lehr-Lern-Labore – Das Landauer Konzept der mathematikdidaktischen Lehramtsausbildung. In B. Priemer & J. Roth (Hrsg.), Lehr-Lern-Labore – Konzepte und deren Wirksamkeit in der MINT-Lehrpersonenbildung (S. 59-83). Heidelberg: Springer Spektrum.

Arbeitsaufträge



Links seht ihr den Graphen der Funktion f. Beantwortet dazu folgende Fragen.

a) Welche der folgenden Punkte liegen auf dem Graphen?

$A(0|-2),\ C(9|4),\ B(2|0),\ D(2{,}5|1{,}5)$

b) Welchen Funktionswert hat die Funktion an der Stelle 0?

c) Welchen Funktionswert hat die Funktion an der Stelle -1?

d) Was ist der maximale Funktionswert im dargestellten Koordinatensystem?

e) Hat die Funktion über das dargestellte Koordinatensystem hinaus noch größere Funktionswerte? Begründet eure Antwort.

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

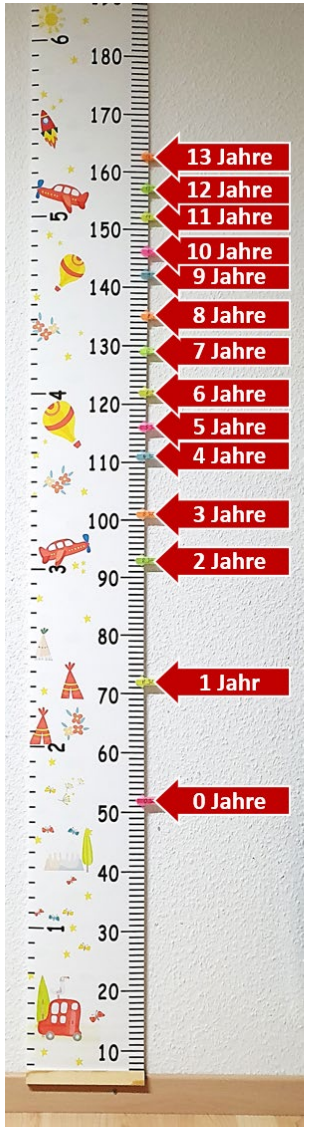
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

Stufen beim Lernen des Funktionsbegriffs



Intuitives Begriffsverständnis

- Begriff als Phänomen
- Beispiele kennen

Inhaltliches Begriffsverständnis

- Begriff als Träger von Eigenschaften
- Eigenschaften kennen

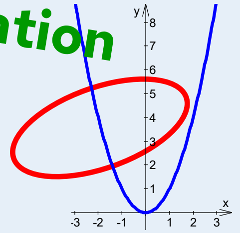
Nullstellen

Extrema

Integriertes Begriffsverständnis

- Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
- Beziehungen von Eigenschaften untereinander und Beziehungen zu anderen Begriffen kennen

Relation



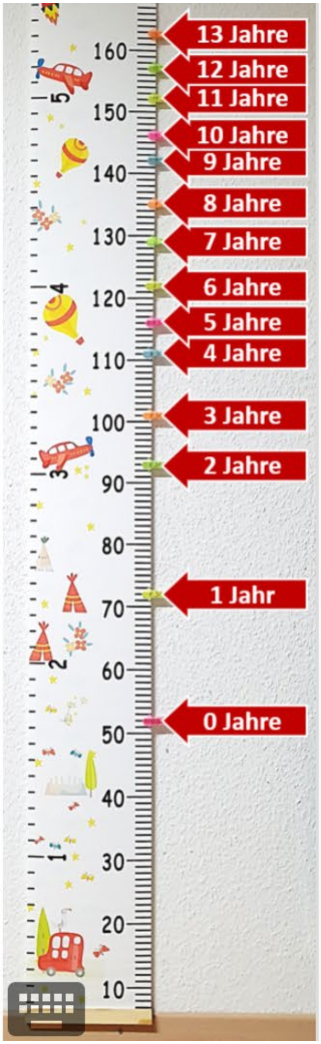
Strukturelles (formales) Begriffsverständnis

- Begriff als Objekt zum operieren
- Begriffe als Objekte die verknüpft werden können.

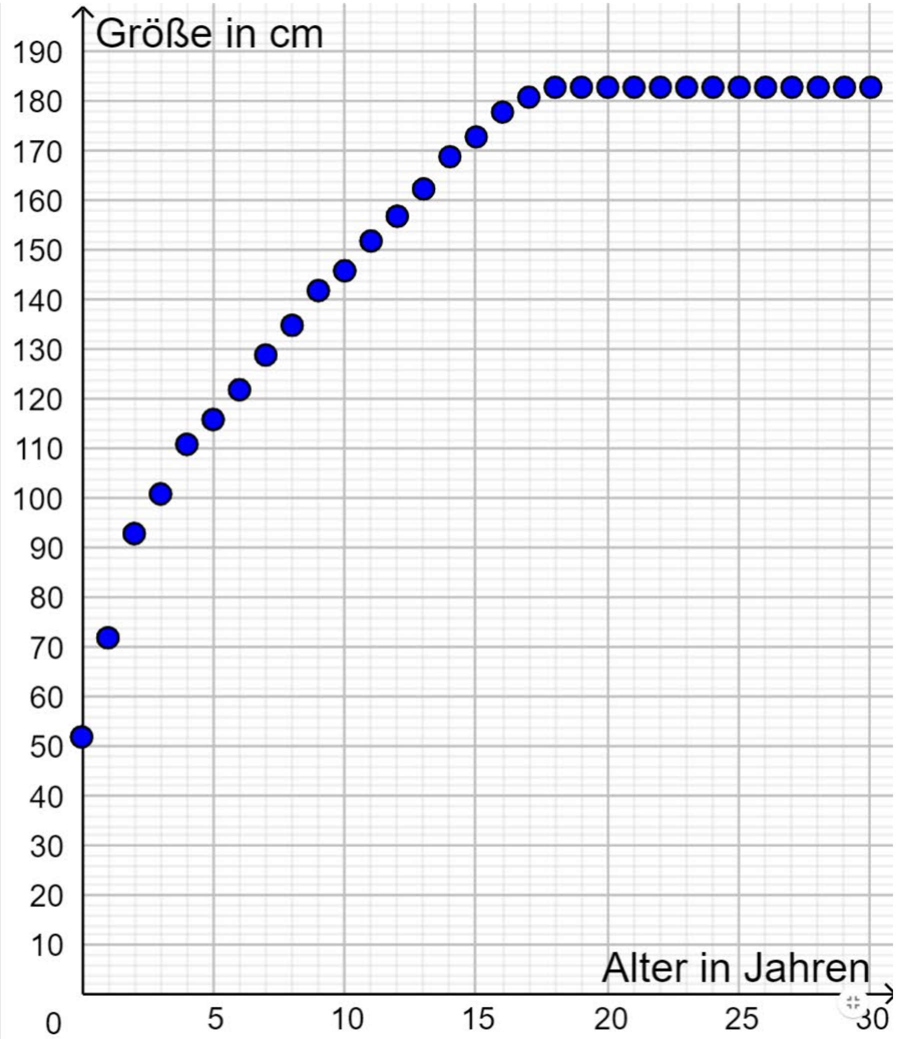
$f \circ g$ $f \cdot g$ $f + g$

 Vollrath, H.-J. (1984). Methodik des Begriffslehrens im MU. Ernst Klett Verlag, S. 215-217

Zusammenhang: Alter ↦ Körpergröße



	A	B
1	Alter in Jahren	Größe in cm
2	0	52
3	1	72
4	2	93
5	3	101
6	4	111
7	5	116
8	6	122
9	7	129
10	8	135
11	9	142
12	10	146
13	11	152
14	12	157
15	13	162.5



Grundvorstellung **Zuordnung**

Grundvorstellung **Kovariation**

Grundvorstellung **Funktion als Ganzes**

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.
https://www.geogebra.org/m/vxj3b49w

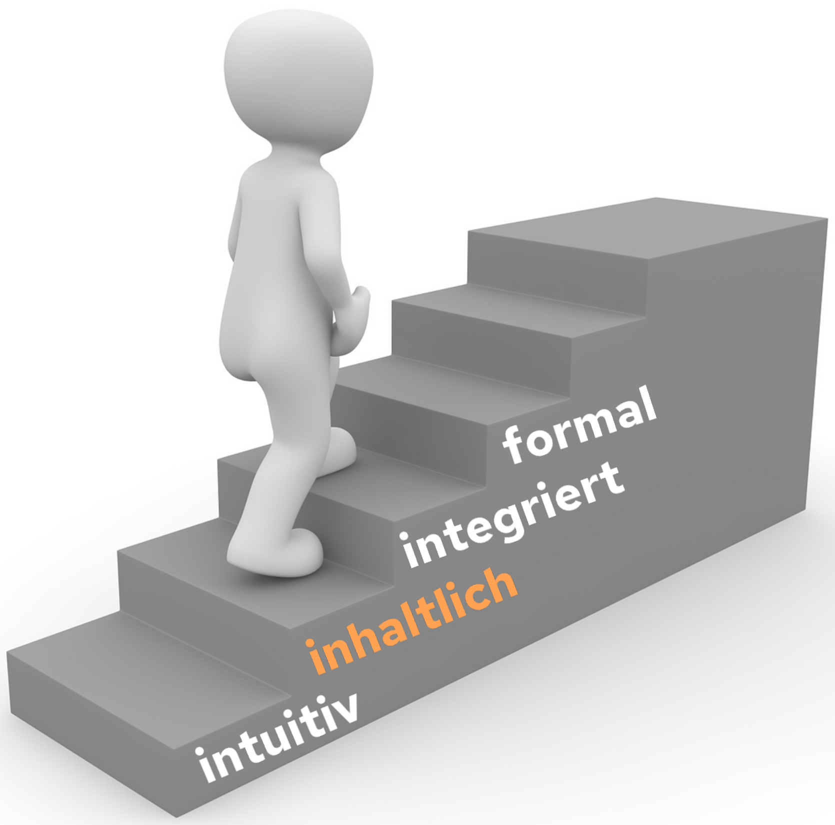
1. Begriff als Phänomen

Das **intuitive Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen Zusammenhänge zwischen Größen und können sie beschreiben
- kennen wichtige Beispiele für Funktionen
- verbinden Vorstellungen wie Kurve, Schaubild, Pfeil-diagramm, Tabelle usw. mit dem Funktionsbegriff
- können diese Ausdrucksmittel zum Lösen einfacher Probleme einsetzen.
- haben die Eindeutigkeit der Zuordnung als kennzeichnende Eigenschaft erkannt

2. Begriff als Träger von Eigenschaften

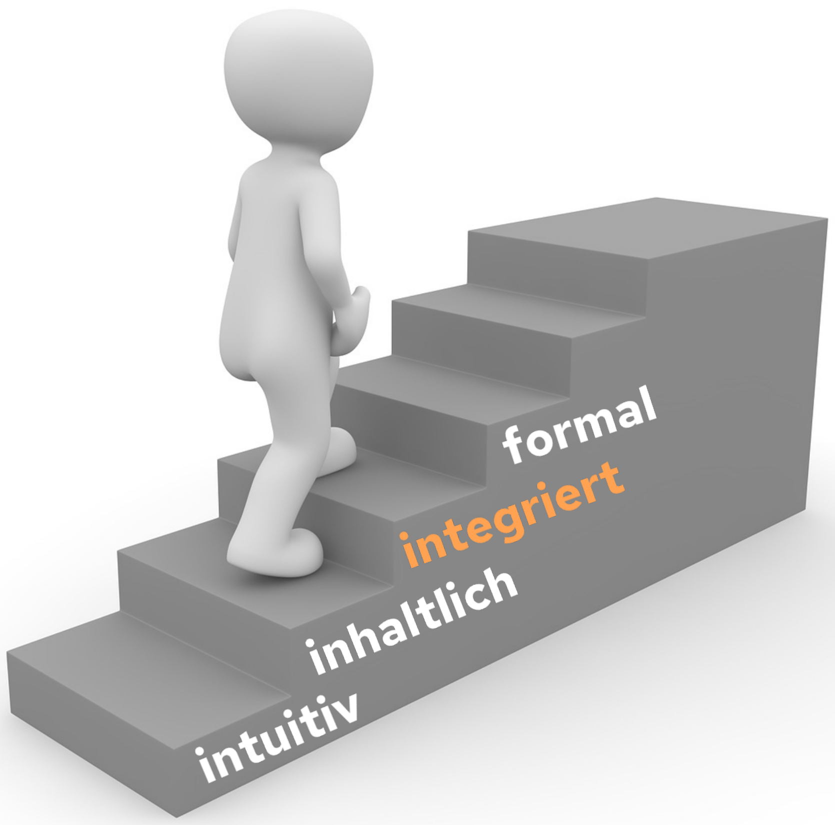


Das **inhaltliche Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen grundlegende Eigenschaften von Funktionen
- verbinden Vorstellungen über die Eigenschaften mit verschiedenen Darstellungsformen
- können Argumente für die erkannten Eigenschaften angeben & benutzen dazu geeignete Darstellungen
- können entdeckte Eigenschaften zur Lösung von Problemen nutzen

3. Begriff als Teil eines Begriffsnetzes

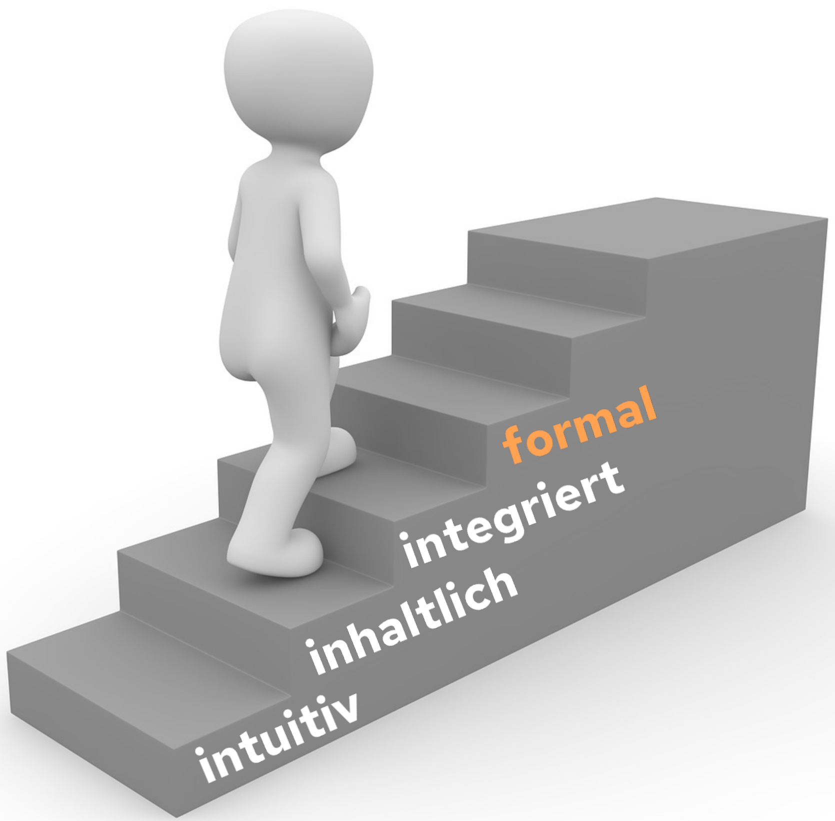


Das **integrierte Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen Zusammenhänge zwischen Eigenschaften
- erkennen mögliche charakterisierende Eigenschaften und können daraus Definitionen bilden
- können Funktionseigenschaften formal ausdrücken und in Beweisen verwenden
- kennen für wichtige Funktionstypen unterschiedliche Definitionen und sind sich deren Äquivalenz bewusst

4. Begriff als Objekt zum Operieren

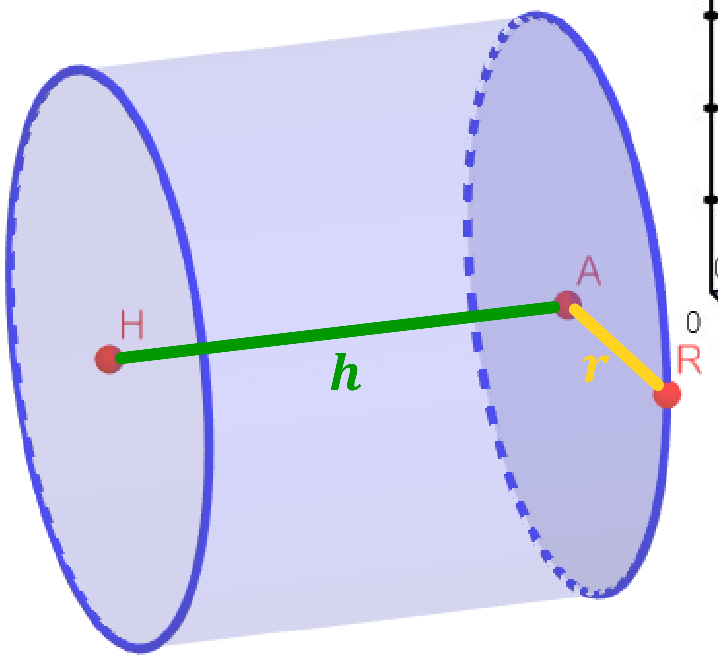


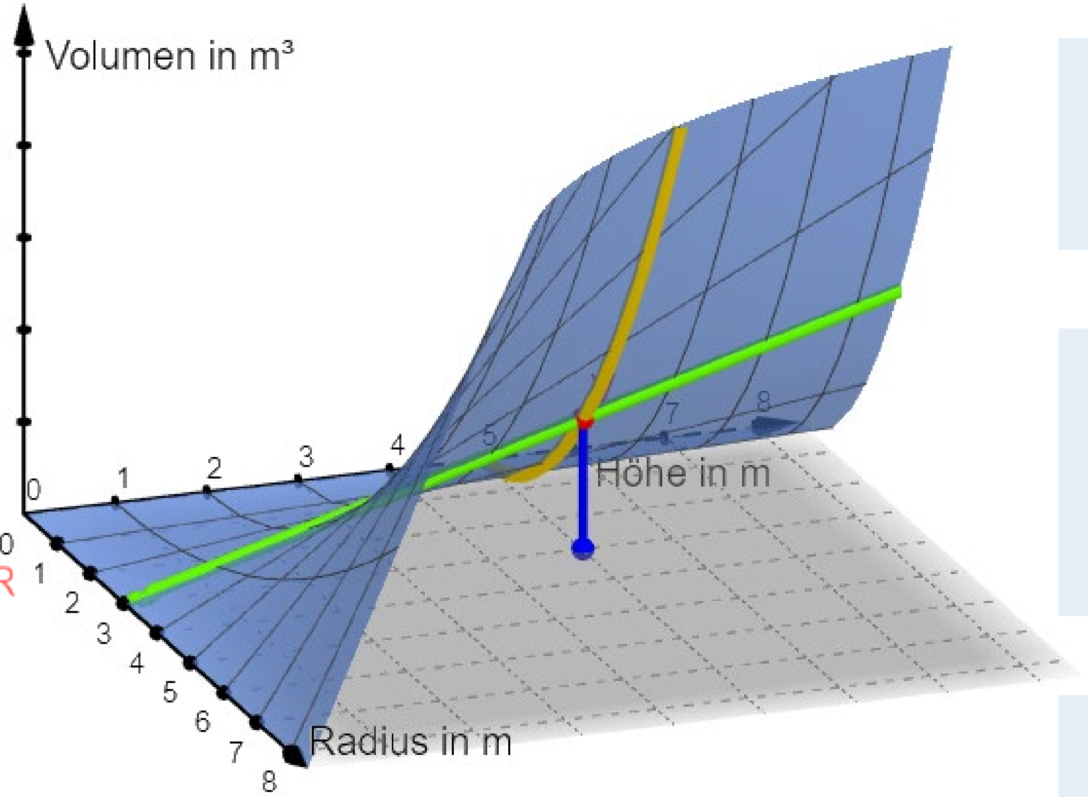
Das **formale Verständnis** des Funktionsbegriffs ist durch folgende Fähigkeiten gekennzeichnet:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen wichtige Verknüpfungen von Funktionen
- haben Vorstellungen von den Verknüpfungen, die an verschiedene Darstellungsformen gebunden sind
- kennen grundlegende Eigenschaften dieser Verknüpfungen und können sie begründen
- benutzen beim Operieren mit Funktionen die gefundenen Verknüpfungseigenschaften

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher





- **Zylindervolumen**

  $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

- **Funktion zweier Veränderlicher**

  $V_{Zylinder}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{r}^2\pi \cdot \boldsymbol{h}$

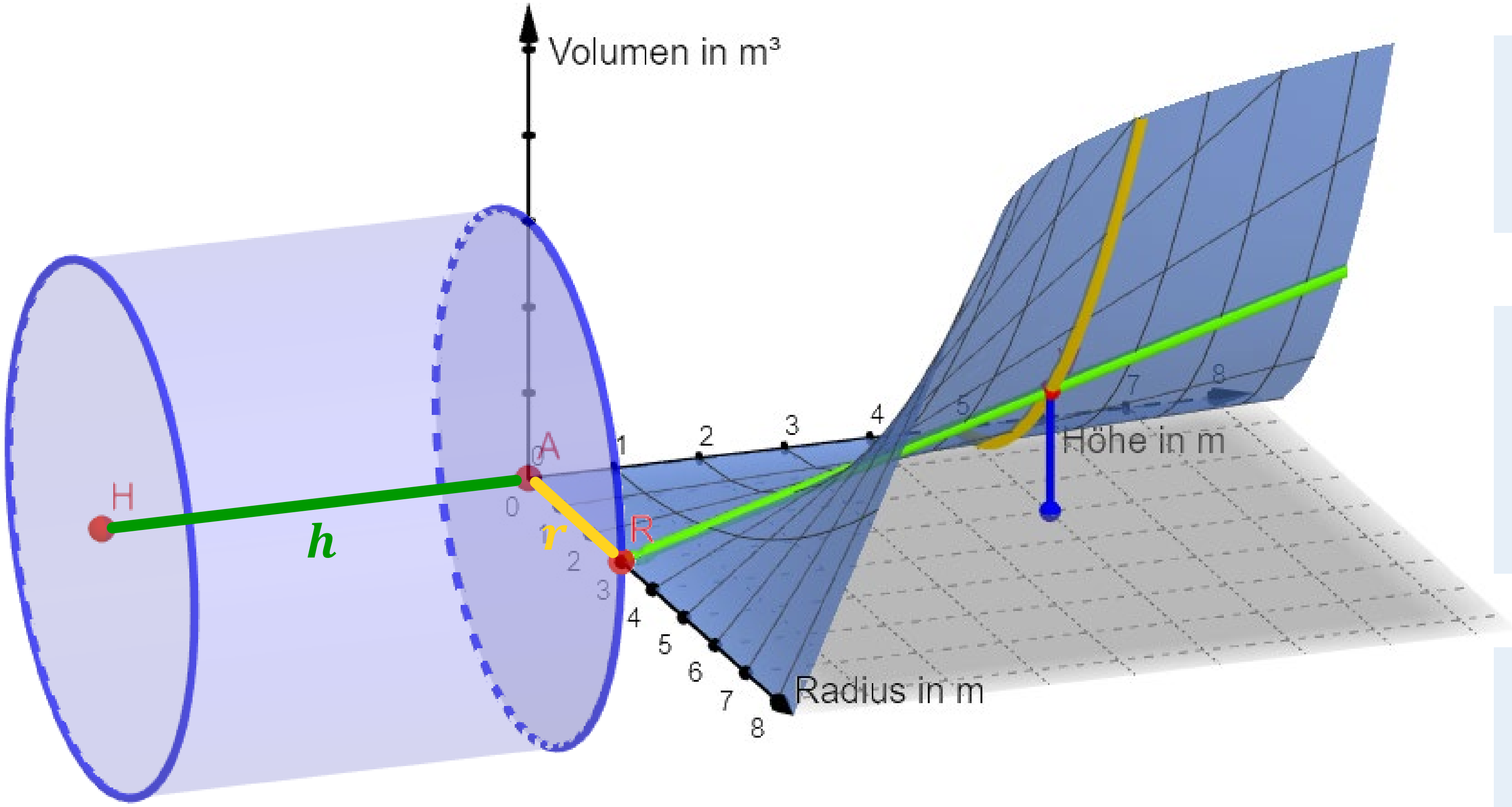
- **Parameterfunktionen / Funktionenscharen**

  $V_r(\boldsymbol{h}) = (r^2\pi) \cdot \boldsymbol{h}$

  $V_h(\boldsymbol{r}) = (\pi h) \cdot \boldsymbol{r}^2$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher



- **Zylindervolumen**

  $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

- **Funktion zweier Veränderlicher**

  $V_{Zylinder}(r, h) = r^2\pi \cdot h$

- **Parameterfunktionen / Funktionenscharen**

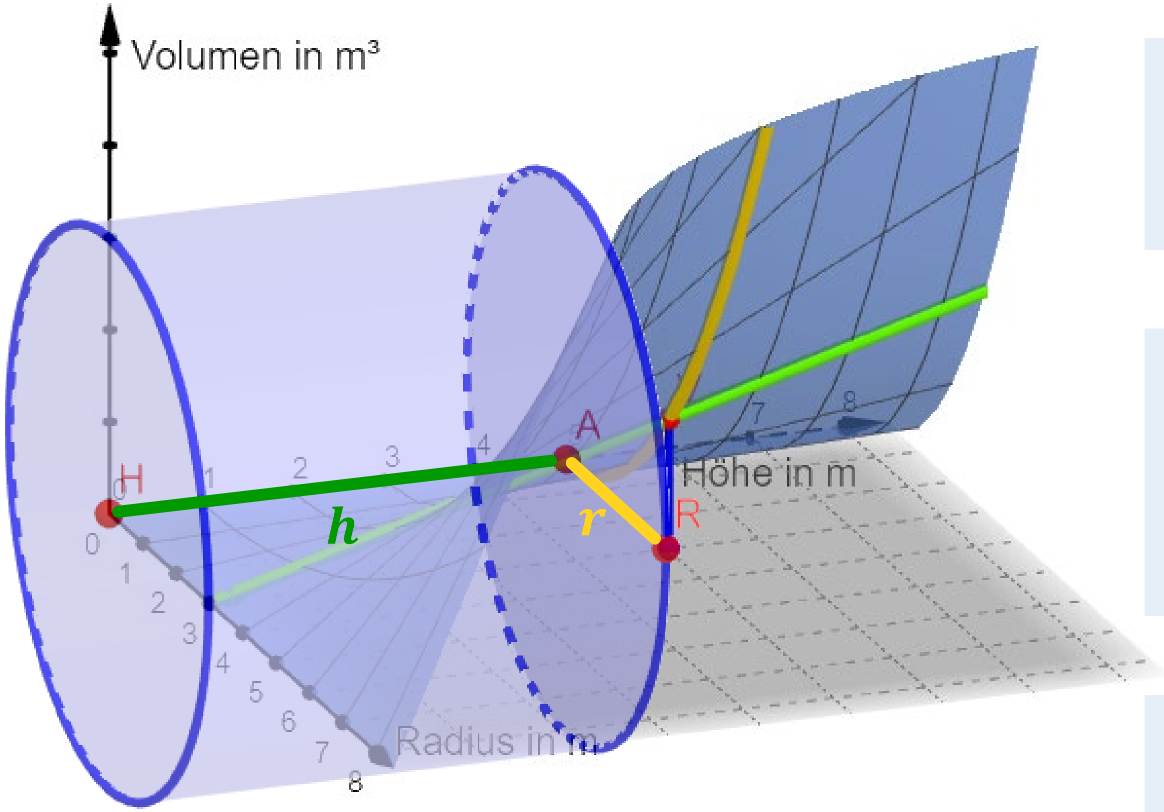
  $V_r(h) = (r^2\pi) \cdot h$

  $V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

Ganz alltäglich:
Funktionen mehrerer Veränderlicher

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



- **Zylindervolumen**

  $V_{Zylinder} = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$

- **Funktion zweier Veränderlicher**

  $V_{Zylinder}(r, h) = r^2\pi \cdot h$

- **Parameterfunktionen / Funktionenscharen**

  $V_r(h) = \left(r^2\pi\right) \cdot h$

  $V_h(r) = (\pi h) \cdot r^2$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/pbsqwwjh

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

Definition: Lernumgebung

Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

RPTU
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lernumgebungen

… regen Lernende zu Prozessen aktiver Wissenskonstruktion an

durch Leitgedanken inhaltlich aufeinander bezogen

hinreichend offen, um differenzierend zu wirken

… organisieren und regulieren den Lernprozess über ein Netzwerk von Aufgaben

sinnvoll strukturiert bzgl. Inhalt und intendierten Lernprozessen

enthalten Aufforderungen zur Dokumentation (Ergebnisse & Vorgehensweisen)

... bilden den Rahmen für selbstständiges Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden

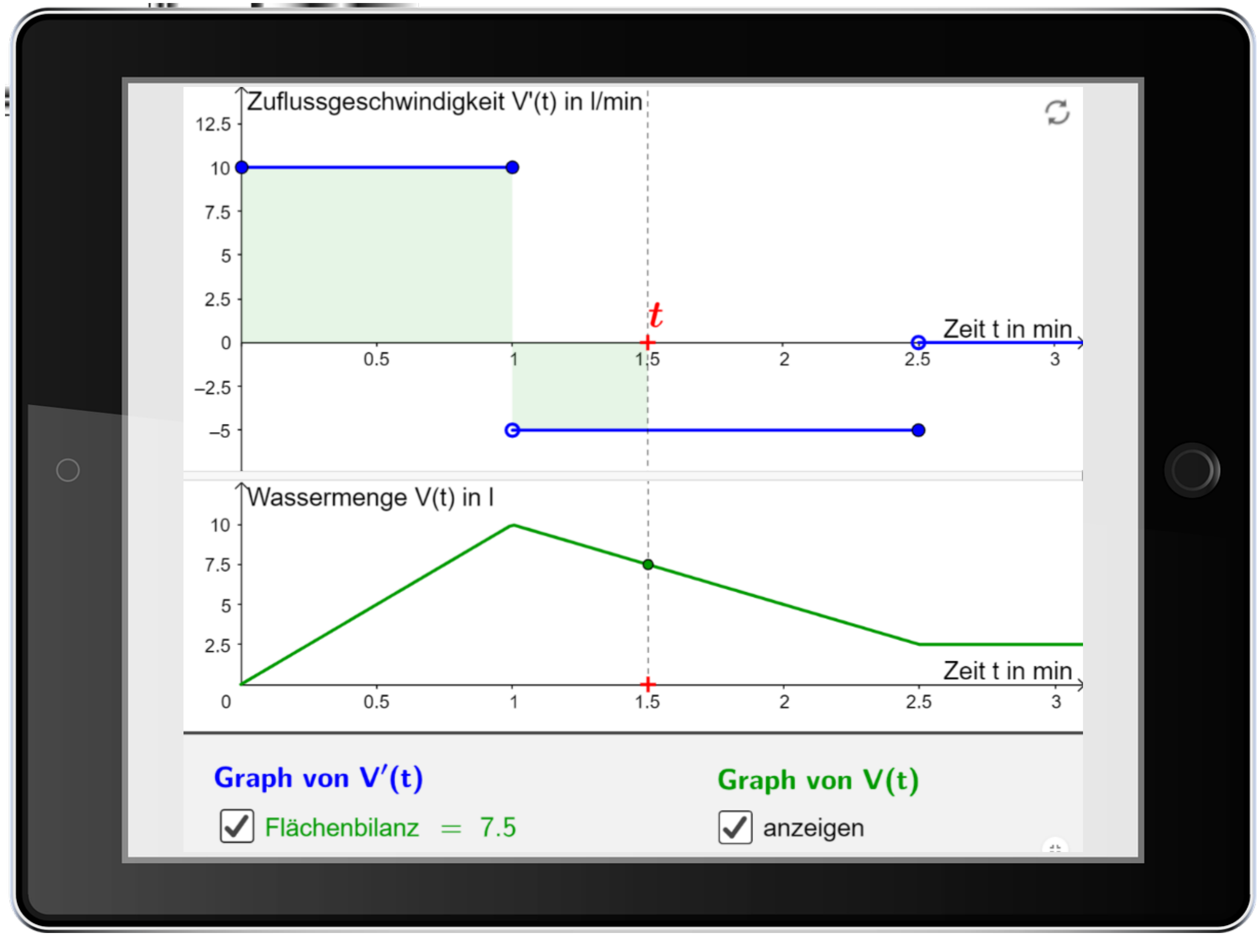
… sind von einem unterrichtlichen Gesamtsetting gerahmt, in dem die Lernenden durch eine Lehrperson auf die Arbeit mit der Lernumgebung vorbereitet, wieder daraus abgeholt und insbesondere beim Systematisieren ihrer gewonnenen Erkenntnisse unterstützt werden

… umfassen geeignete Medien und Materialien für aktive und vielfältige Auseinandersetzung mit einem Phänomen

… fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus

… bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen sowie die Möglichkeit der Ergebniskontrolle

Definition: Digitale Lernumgebung



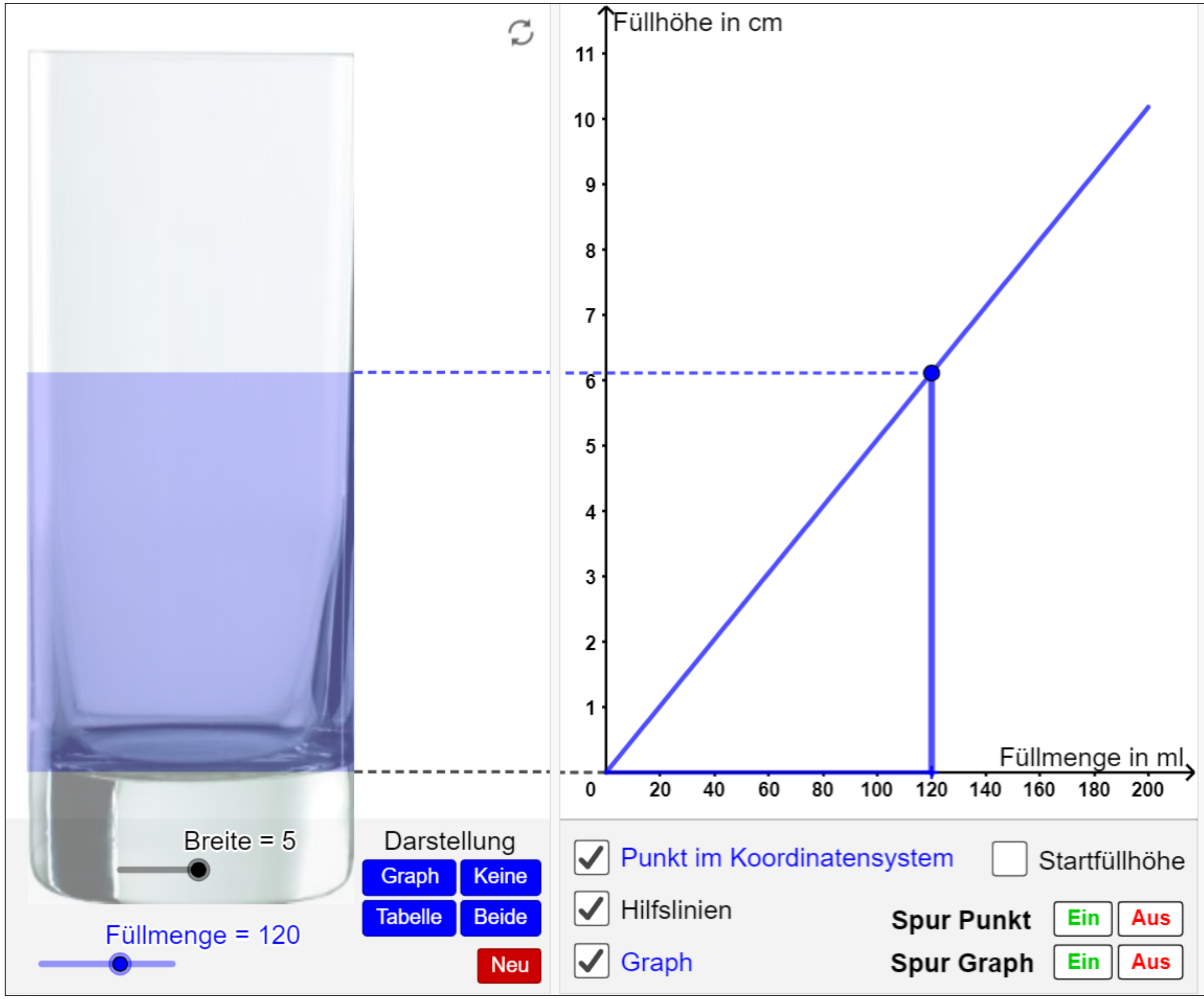
Digitale Lernumgebung

- Digitale Lernumgebungen bilden eine Teilmenge der Lernumgebungen.
- Eine digitale Lernumgebung konstituiert sich bereits dann, wenn eine Lernumgebung durch
  - von Lernenden interaktiv nutzbare digitale Elemente (z. B. Applets),
  - die einen wesentlichen Beitrag zur Lernaktivität leisten,

  digital angereichert wurde.

Roth. J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell et. al. (Hrsg.). Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick (S. 109-136). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Darstellungsformen wechselseitig interpretieren



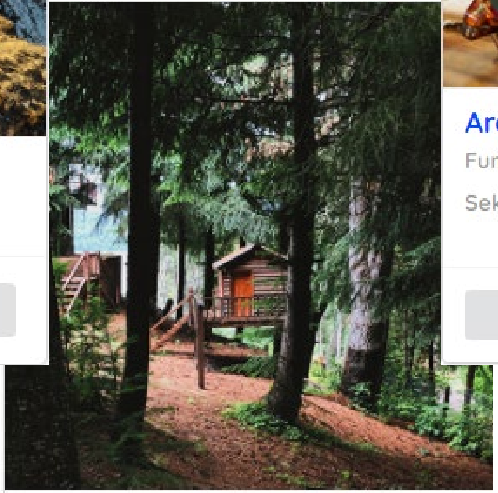
	A	B	C	D
1	Breite:	5 cm	4 cm	3 cm
2	Füllmenge [ml]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]	Füllhöhe [cm]
3	0	0	0	0
4	20	1.02	1.59	2.83
5	40	2.04	3.18	5.66
6	60	3.06	4.77	8.49
7	80	4.07	6.37	
8	100	5.09	7.96	
9	120	6.11	9.55	
10	140	7.13		
11	160	8.15		
12	180	9.17		
13	200	10.19		
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				

Lichti, Roth (2021). Der Einstieg in Funktionales Denken – Darstellungsform und passendes Medium. *Mathematik lehren, 226*, 10-14.
https://www.geogebra.org/m/rqgzqrm4

Digitale Lernumgebungen
Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Aktivurlaub
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

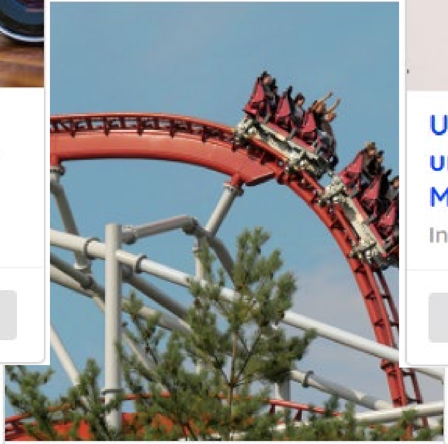


Das Baumhaus-Projekt
Funktionale Zusammenhänge

Ansehen

Around the world
Funktionale Zusammenhänge der Sek I

Ansehen

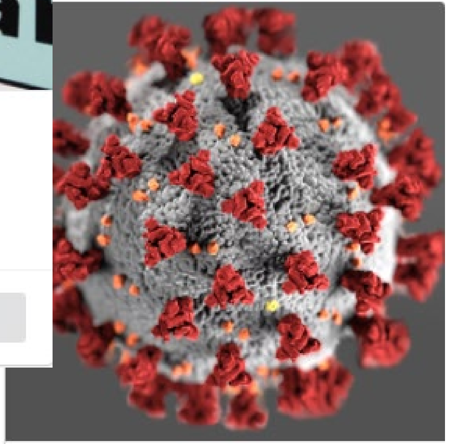


Freizeitpark
Differentialrechnung

Ansehen

USA - ein Land der unbegrenzten Möglichkeiten?
Integralrechnung

Ansehen



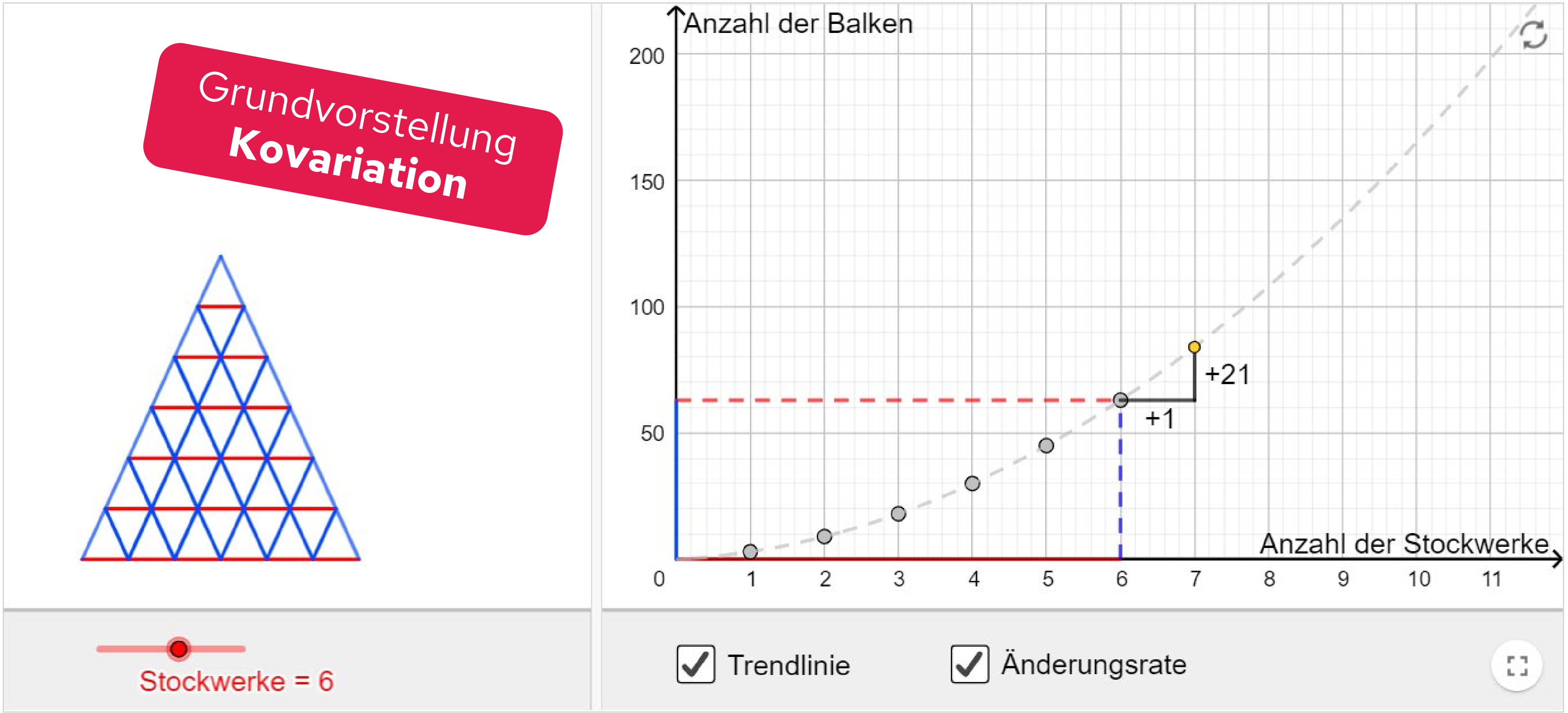
Wort des Jahres
Integralrechnung

Ansehen

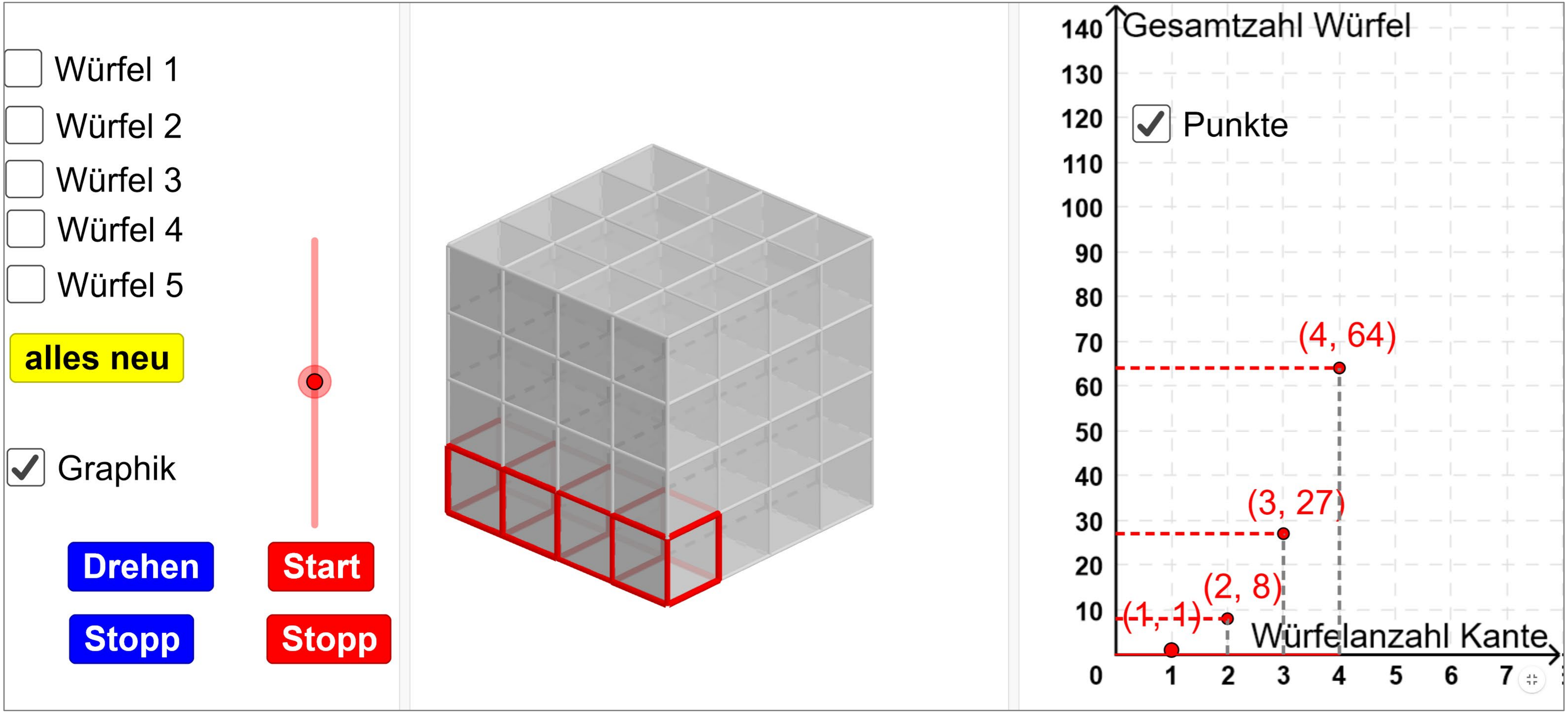
Mathematik-Labor "Mathe ist mehr"

Kartenhaus:
Anzahl Stockwerke → Anzahl Balken

Digel, S. & Roth, J. (2021). Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?!
In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

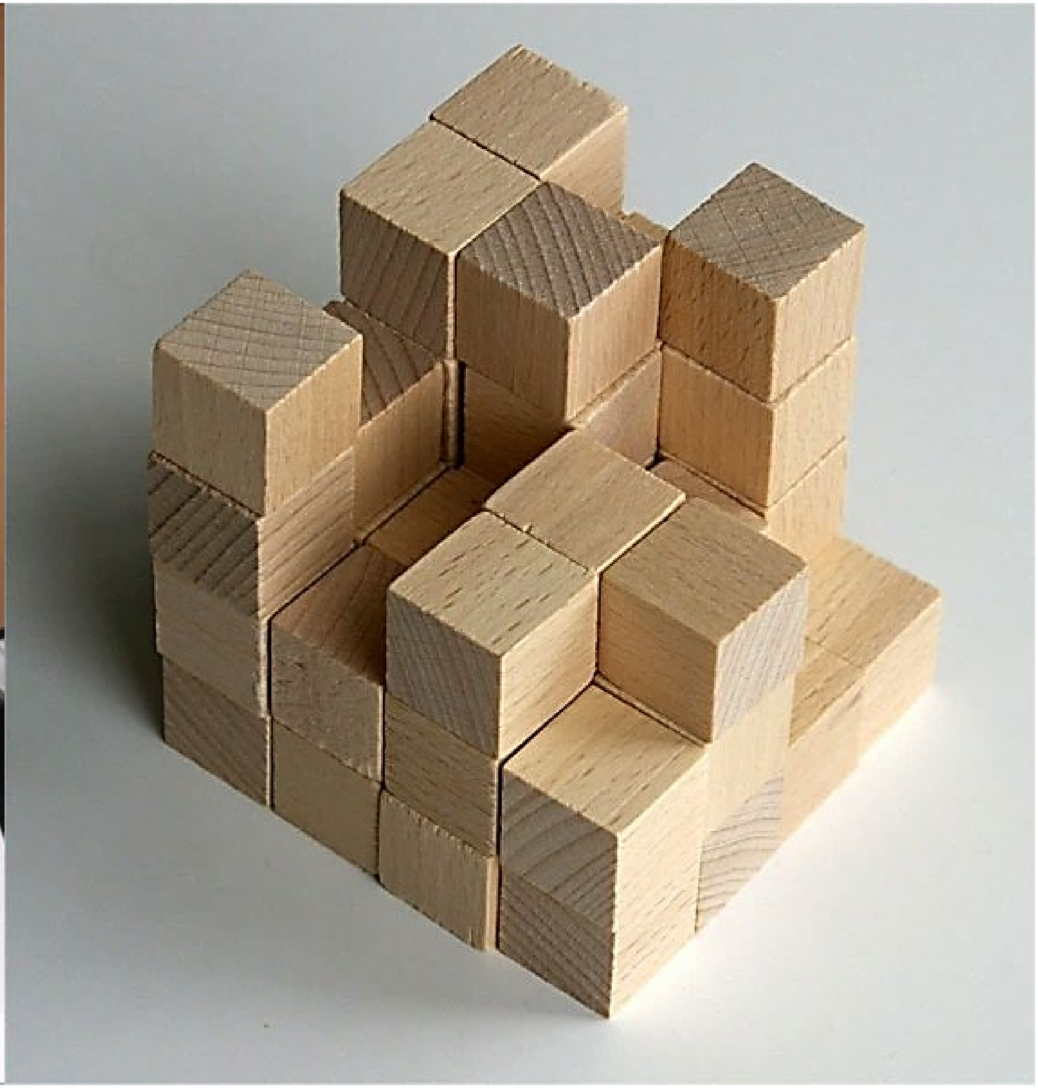


Würfelgebäude: Würfelzahl an einer Kante → Gesamtzahl benötigter Würfel



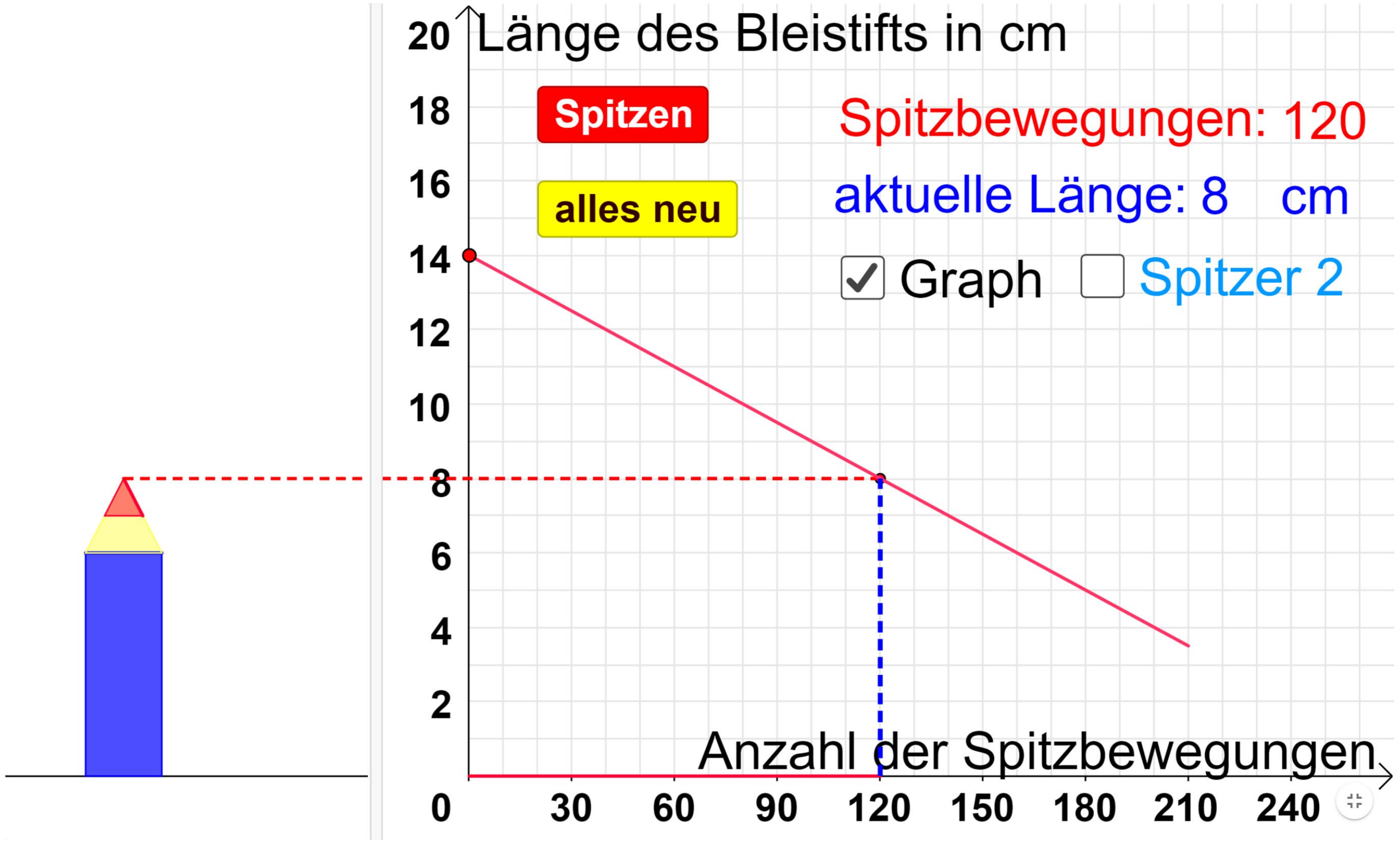
 https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB

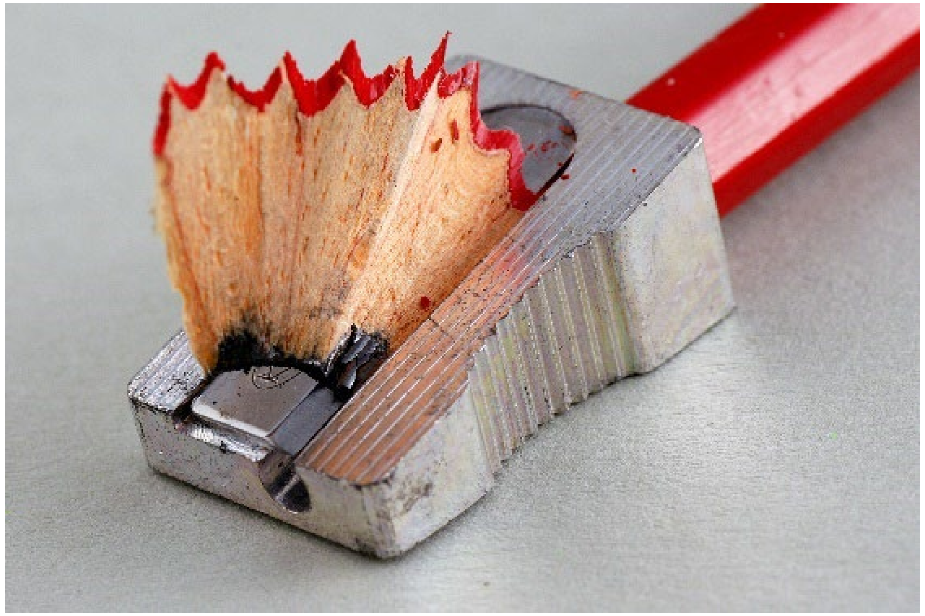
Würfelgebäude: Würfelzahl an einer Kante → Gesamtzahl benötigter Würfel



https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB

Spitzen:
Spitzbewegungen → Bleistiftlänge





 https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB

Kerze: Brenndauer → Länge

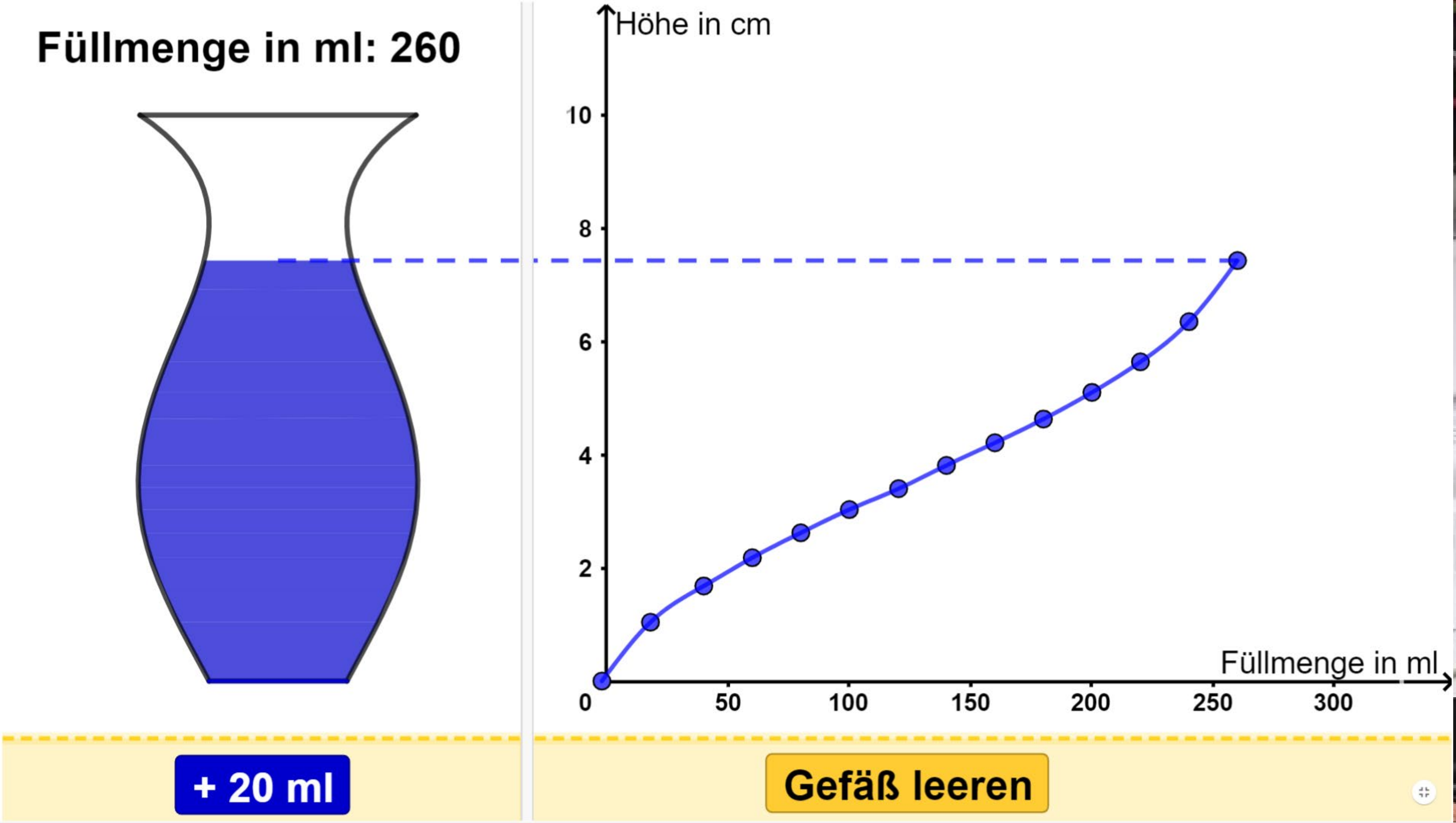
https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=40da6cdb-fa5e-42e1-9a07-ae0a00de8077 (Zeitraffer)
https://vcm.uni-kl.de/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=9b04b701-a3dc-4ce0-a984-ae0a00dd6449 (Originallänge)

https://www.geogebra.org/m/we6ftunf#chapter/542845

https://www.geogebra.org/m/fyvufst

Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe

Digel, S. & Roth, J. (2021). Funktionales Denken durch qualitative Experimente fördern?! In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2021 (S. 47-50). Münster: WTM Verlag.

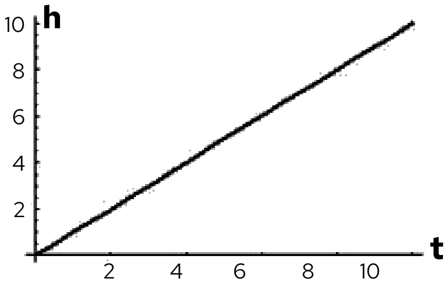


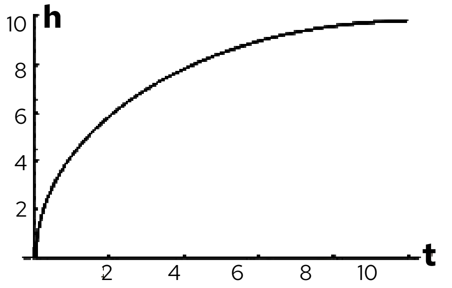
 https://www.mathe-labor.de/stationen/baumhaus-2020/a/teil3/

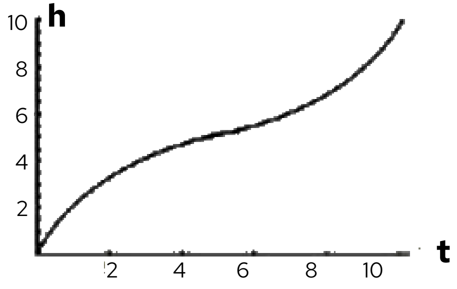
Gefäß: Füllmenge → Füllhöhe

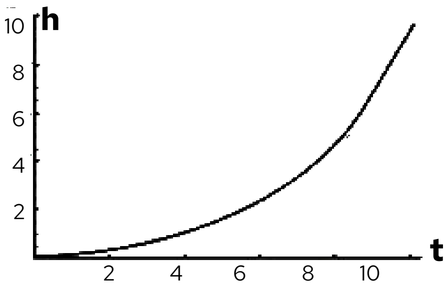


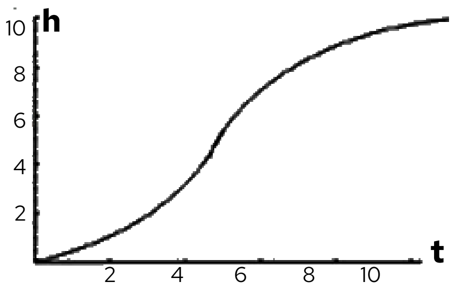


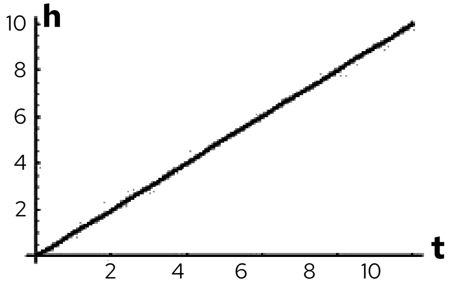





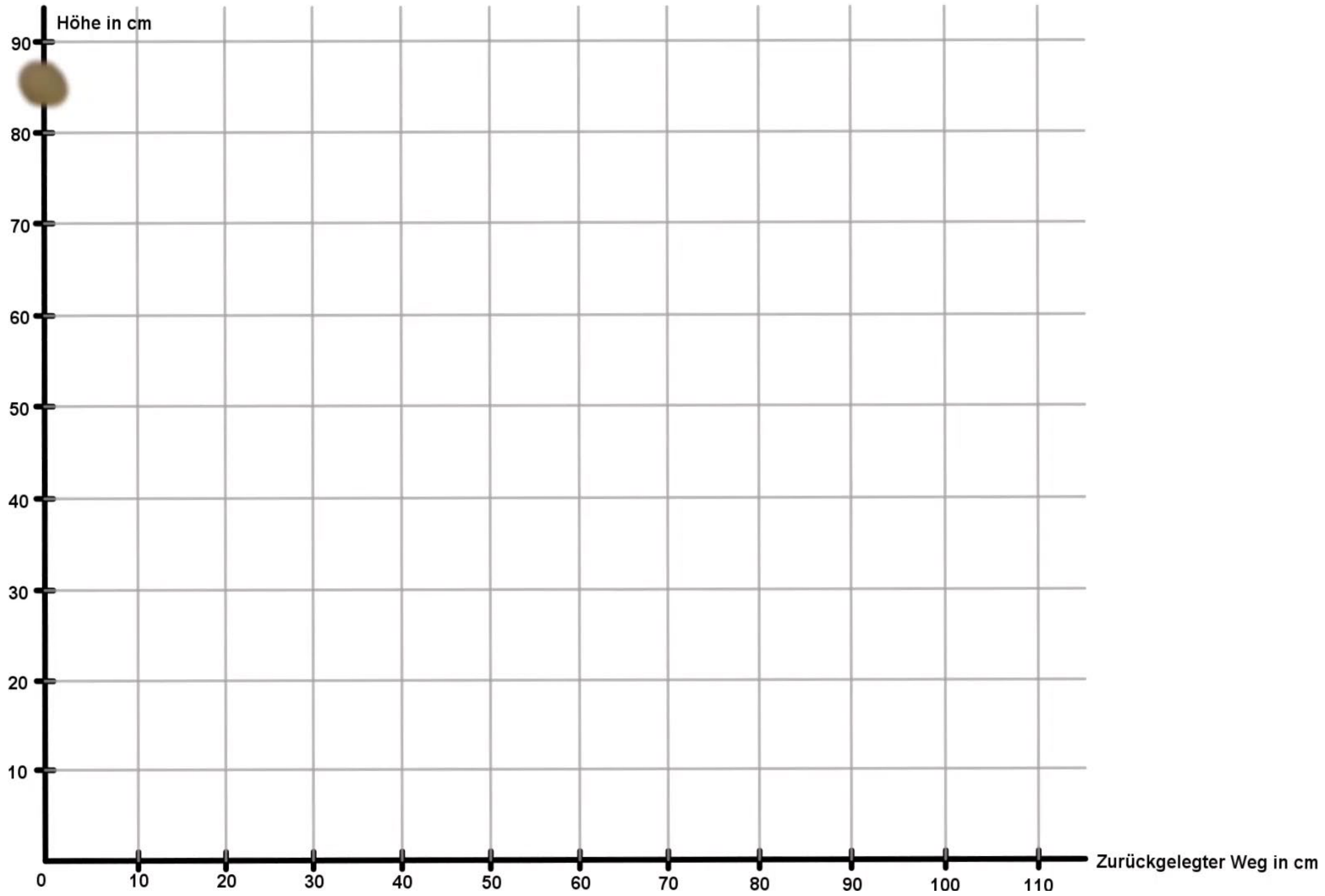








Springender Ball



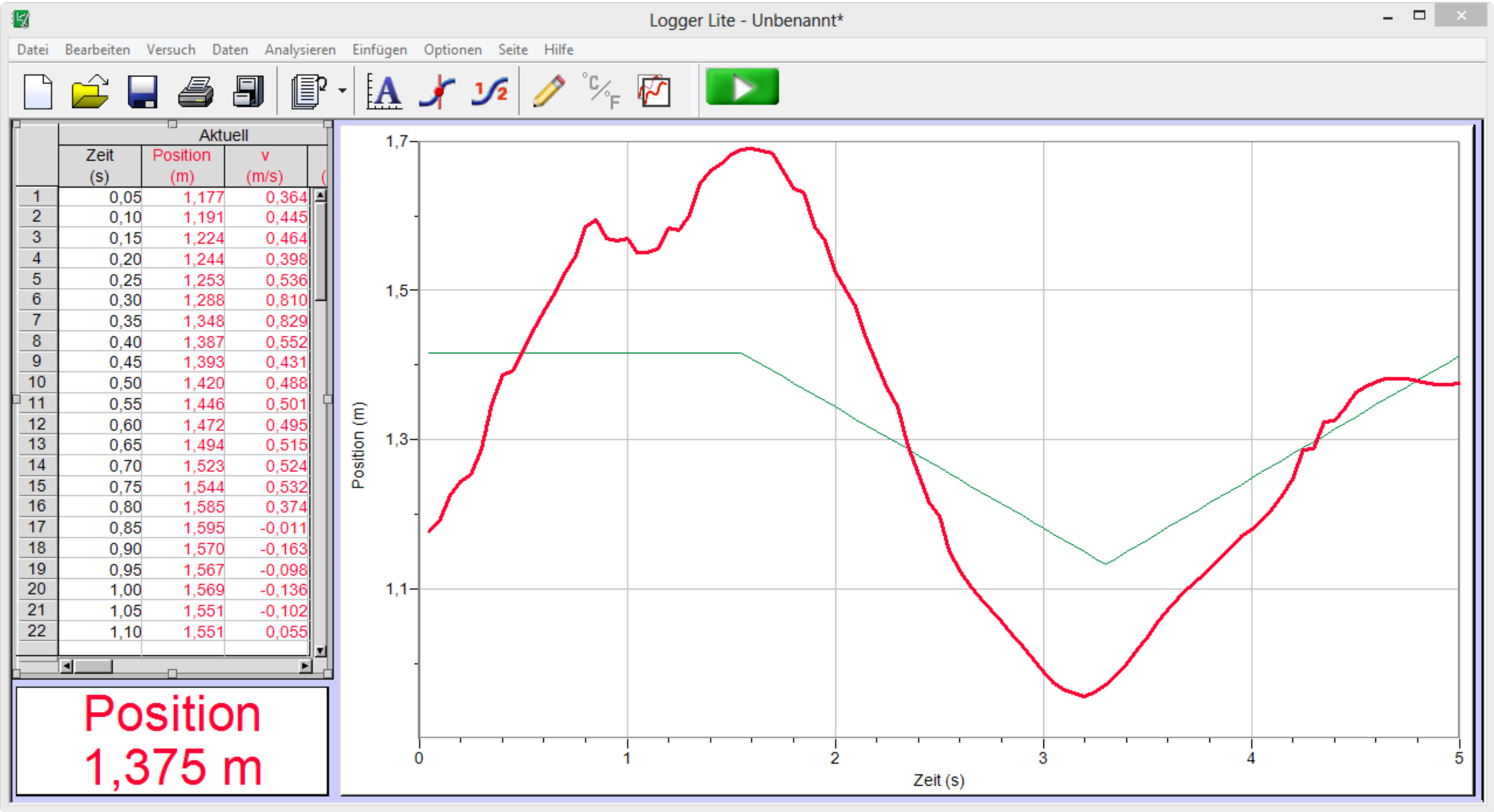
Engelhardt, A. & Ossadnik, H. (2021). Videoanalyse zur Modellierung von Bewegungen. *Mathematik lehren 226*, 36-39

 https://roth.tel/video/springender_ball.mp4 https://www.mathe-labor.de/stationen/atw-2020/a/teil3/

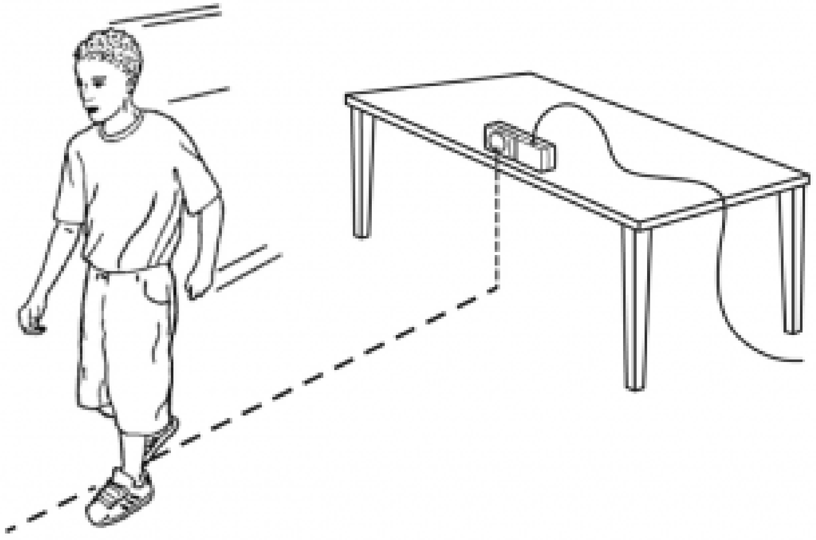
Funktionsgraphen laufen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Barzel (2009): Mathematik mit allen Sinnen erfahren – auch in der Sekundarstufe! In: Leuders et al. (Hrsg.). *Mathemagische Momente*. Berlin: Cornelsen, S. 6-17



	Zeit (s)	Position (m)	v (m/s)
1	0,05	1,177	0,364
2	0,10	1,191	0,445
3	0,15	1,224	0,464
4	0,20	1,244	0,398
5	0,25	1,253	0,536
6	0,30	1,288	0,810
7	0,35	1,348	0,829
8	0,40	1,387	0,552
9	0,45	1,393	0,431
10	0,50	1,420	0,488
11	0,55	1,446	0,501
12	0,60	1,472	0,495
13	0,65	1,494	0,515
14	0,70	1,523	0,524
15	0,75	1,544	0,532
16	0,80	1,585	0,374
17	0,85	1,595	-0,011
18	0,90	1,570	-0,163
19	0,95	1,567	-0,098
20	1,00	1,569	-0,136
21	1,05	1,551	-0,102
22	1,10	1,551	0,055



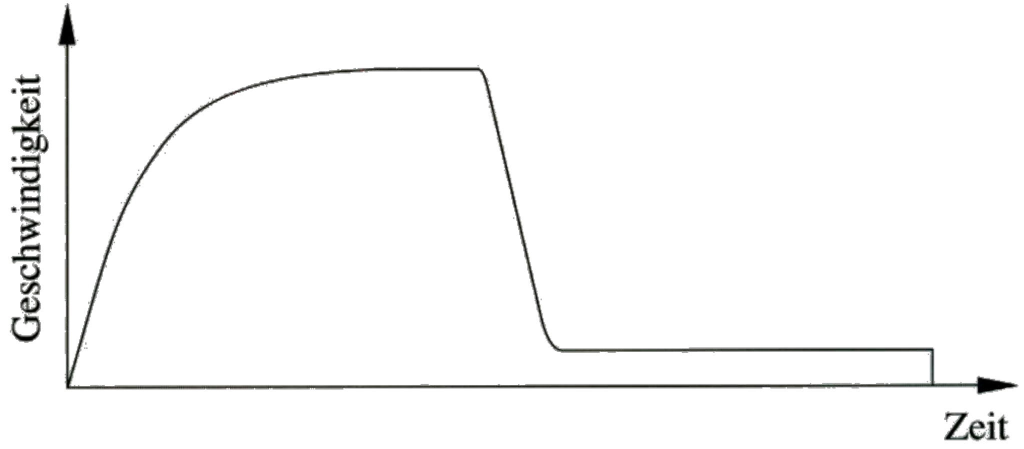
Grundvorstellung Kovariation

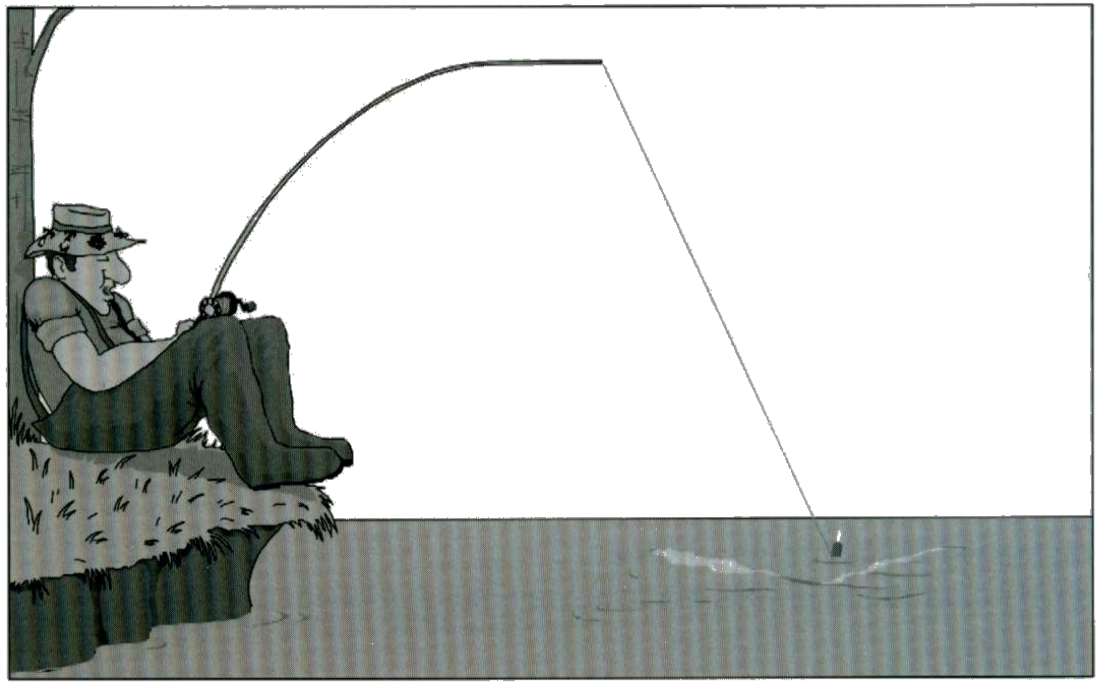
Umrechnungstabelle: Britische Pfund ↔ Euro

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Pfund	Euro	Pfund	Euro	Euro	Pfund	Euro	Pfund
1	1,17	21	24,61	1	0,85	21	17,92
2	2,34	22	25,78	2	1,71	22	18,77
3	3,52	24	28,12	3	2,56	24	20,48
4	4,69	26	30,47	4	3,41	26	22,19
5	5,86	28	32,81	5	4,27	28	23,89
6	7,03	30	35,15	6	5,12	30	35,15
7	8,20	35	41,01	7	5,97	35	29,87
8	9,37	40	46,87	8	6,83	40	34,14
9	10,55	45	52,73	9	7,68	45	38,40
10	11,72	50	58,59	10	8,53	50	42,67
11	12,89	55	64,45	11	9,39	55	46,94
12	14,06	60	70,31	12	10,24	60	51,20
13	15,23	70	82,03	13	11,09	70	59,74
14	16,41	80	93,74	14	11,95	80	68,27
15	17,58	90	105,46	15	12,80	90	76,80
16	18,75	100	117,18	16	13,65	100	85,34
17	19,92	150	175,77	17	14,51	150	128,01
18	21,09	200	234,36	18	15,36	200	170,68
19	22,26	250	292,95	19	16,21	250	213,35
20	23,44	300	351,54	20	17,07	300	256,10

Welche Sportart?





Aufgabe
Welche Sportart passt am besten zu dem Graphen?

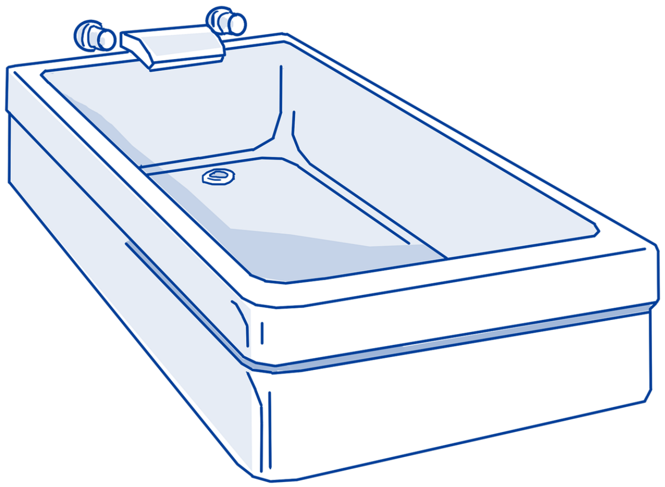
- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Drag Racing
- Wasserski

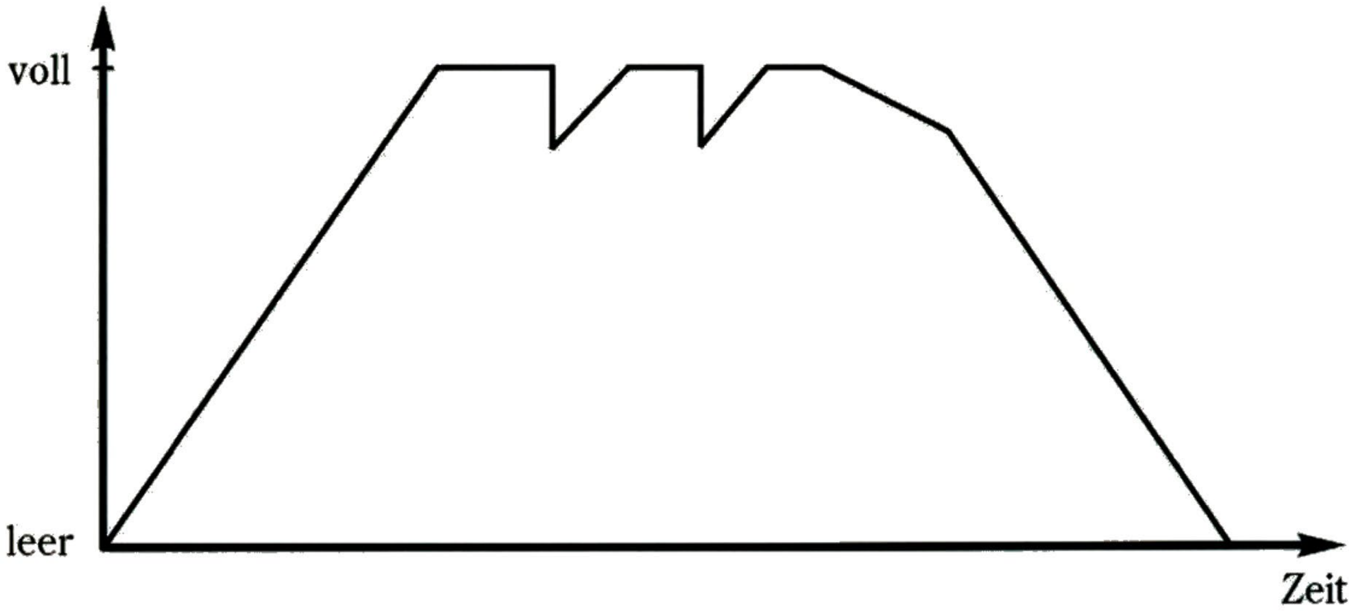
Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

Badewannengeschichte

Aufgabe

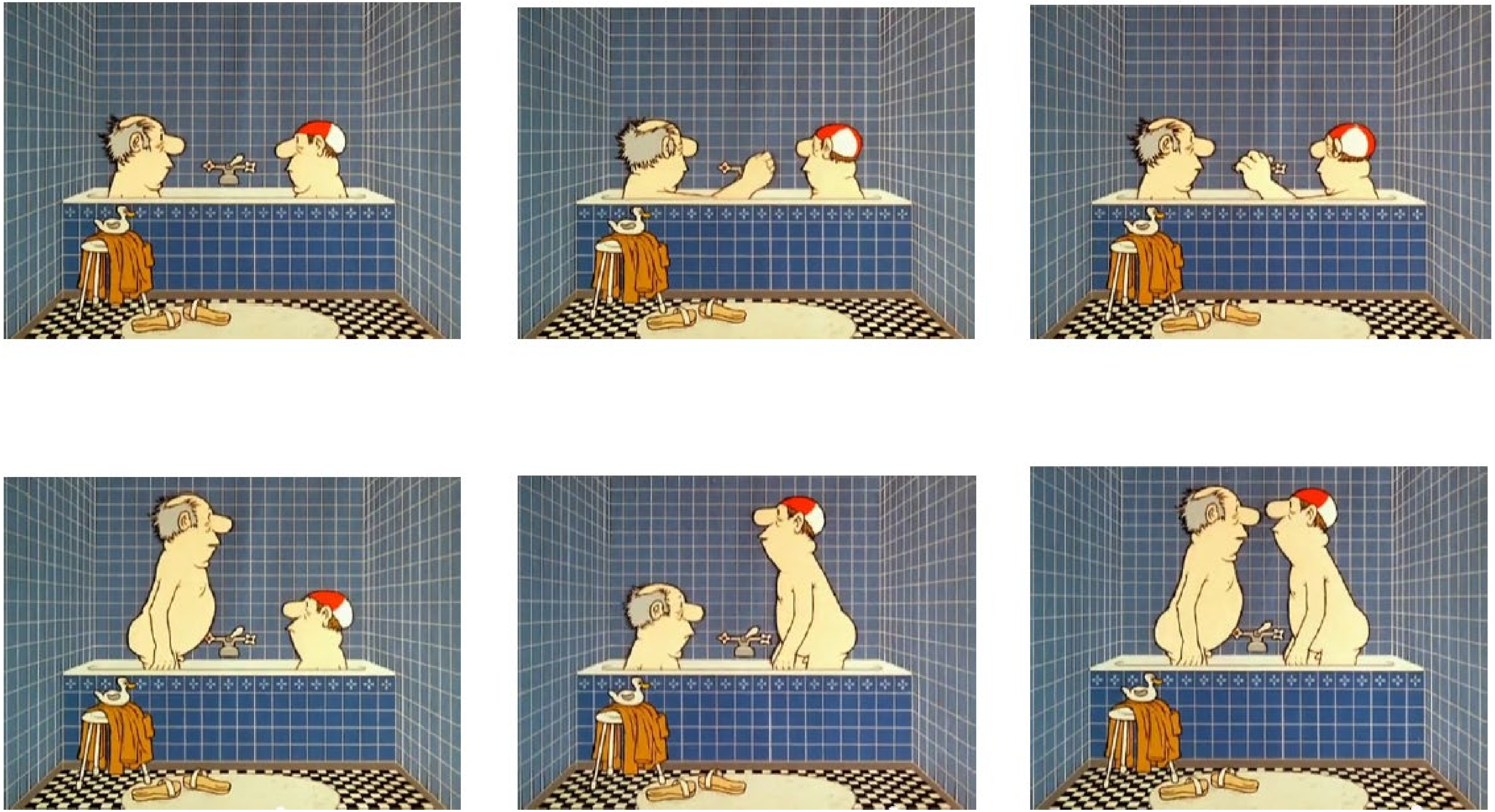
- Denkt euch eine Geschichte aus, die gut zum abgebildeten Funktionsgraph passt.
- Begründet, warum eure Geschichte zum Graph passt.





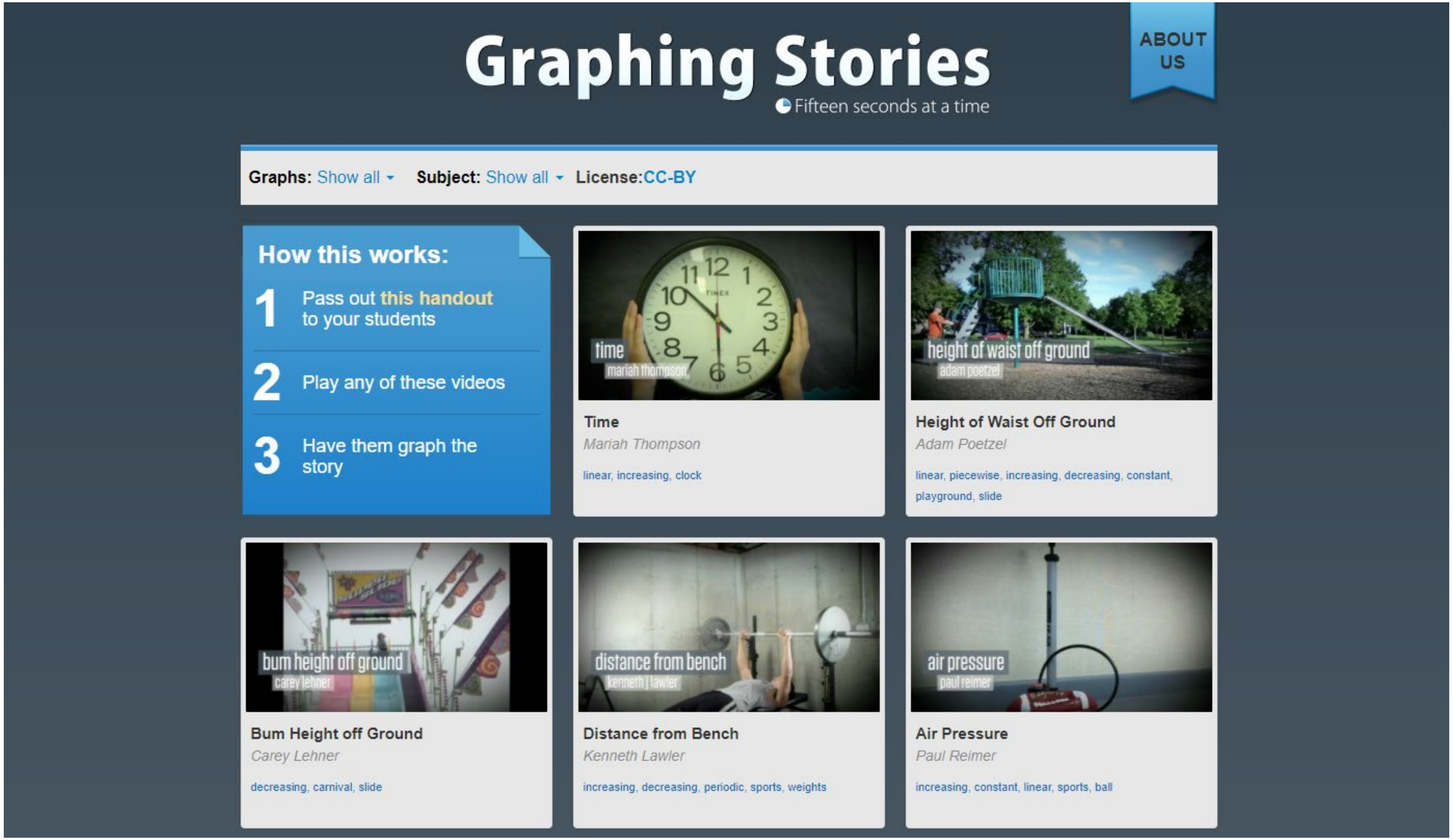
 Herget, Jahnke, Kroll (2001). *Produktive Aufgaben für den MU in der Sek. I.* Berlin: Cornelsen

Zwei Herren in der Badewanne (Loriot 1978)



https://de-de.facebook.com/Alles-was-von-Herzen-kommt-214441638735677/videos/-loriot-die-badewanne-danke-liebe-gerti-/521220291391142/

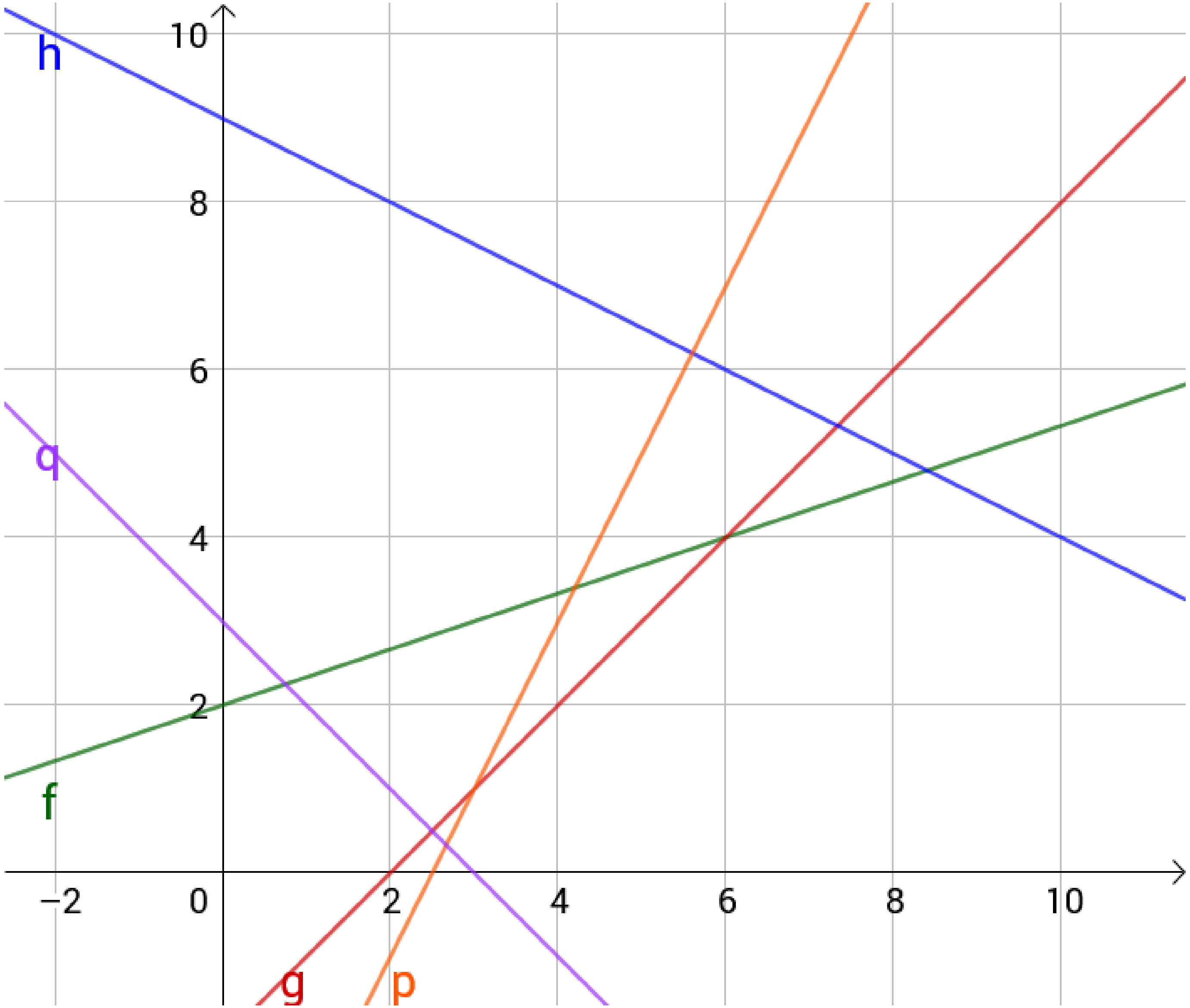
Graphing Stories
Graph zur Geschichte skizzieren



 https://www.geogebra.org/m/svb5b8ug http://www.graphingstories.com

Geradensalat

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



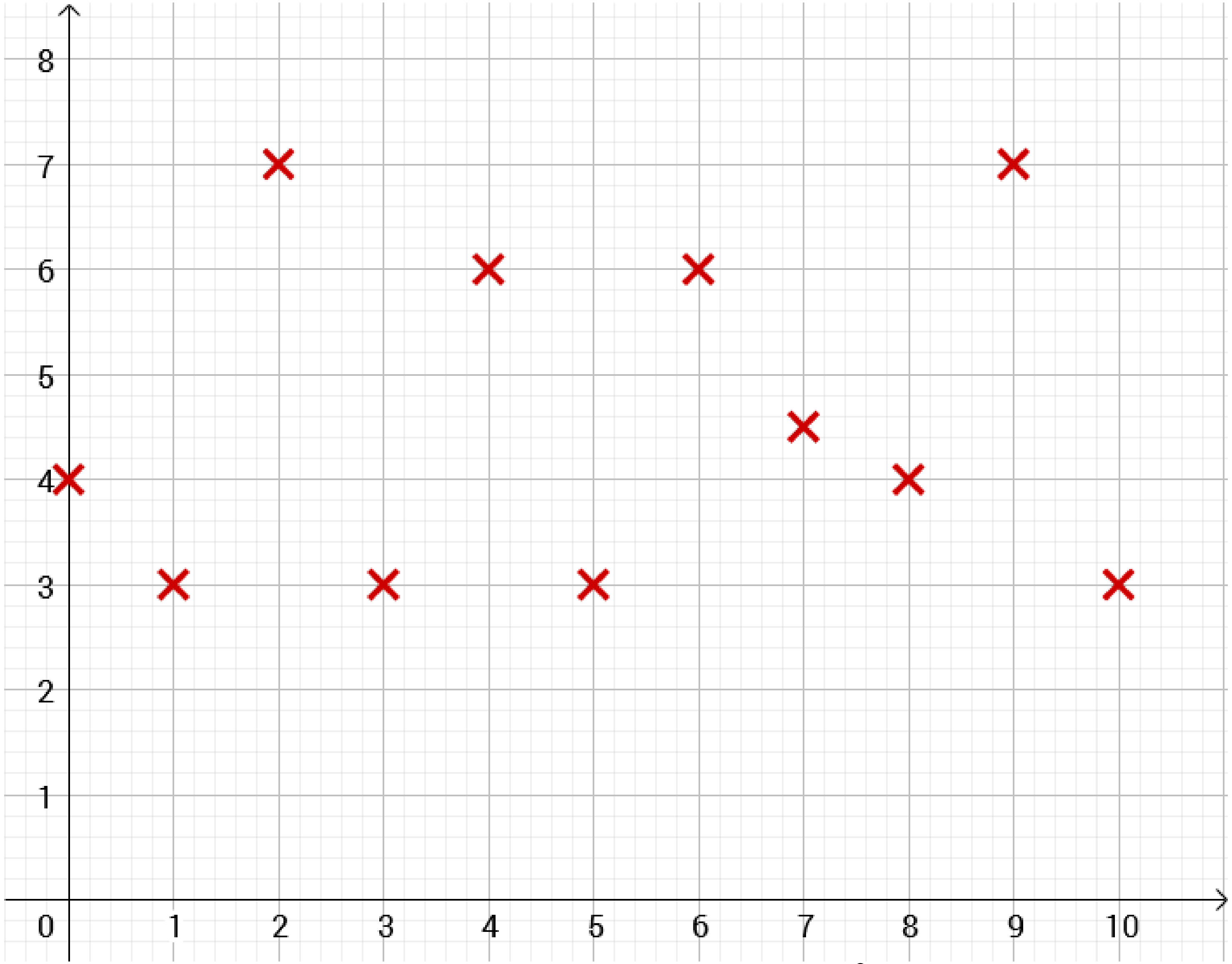
Wie lauten die zugehörigen Funktionsgleichungen?

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

https://www.geogebra.org/m/mxypPV9h

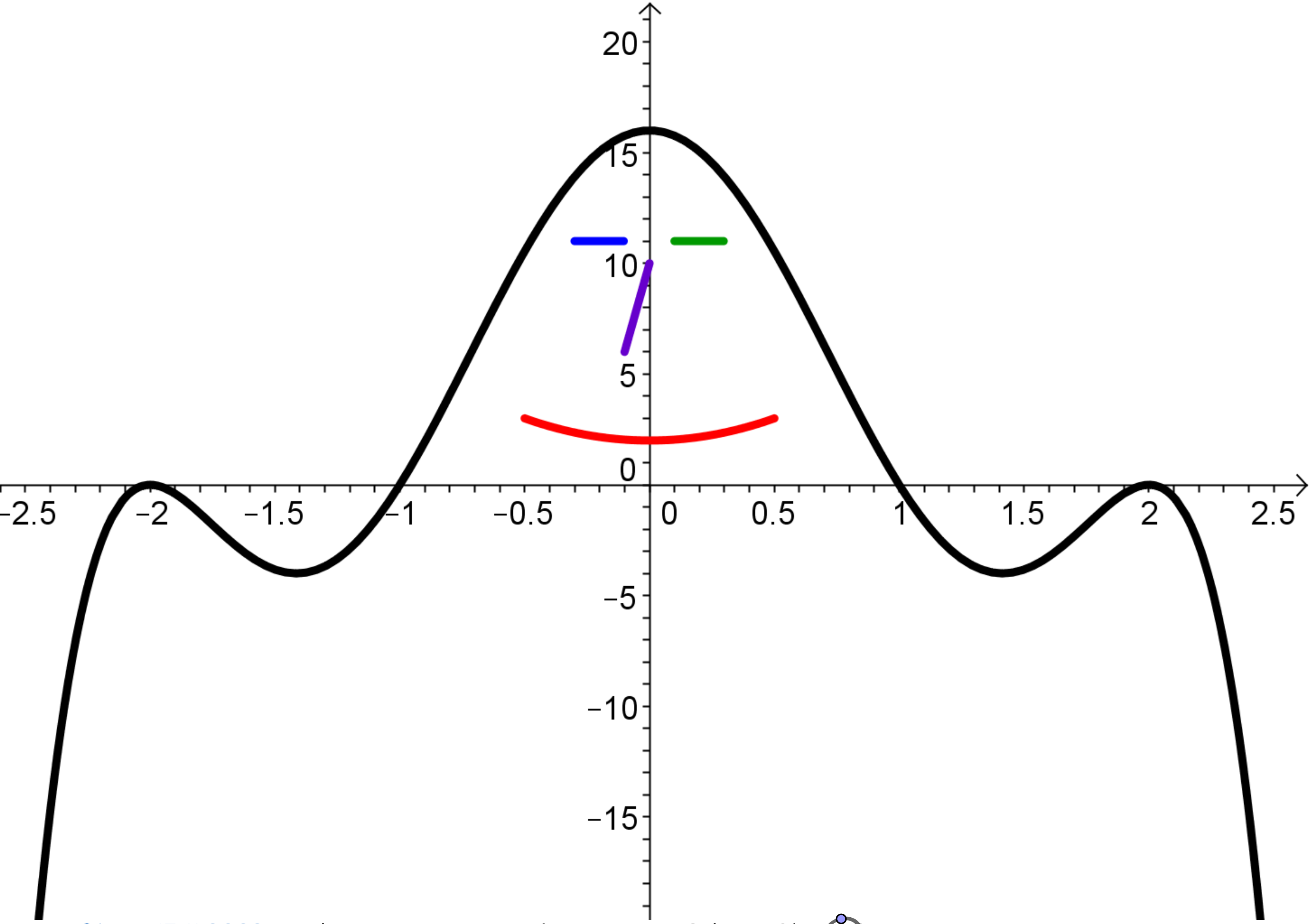
RPTU

Punkteintopf



Versuche alle Punkte mit so wenig Geraden wie möglich treffen.

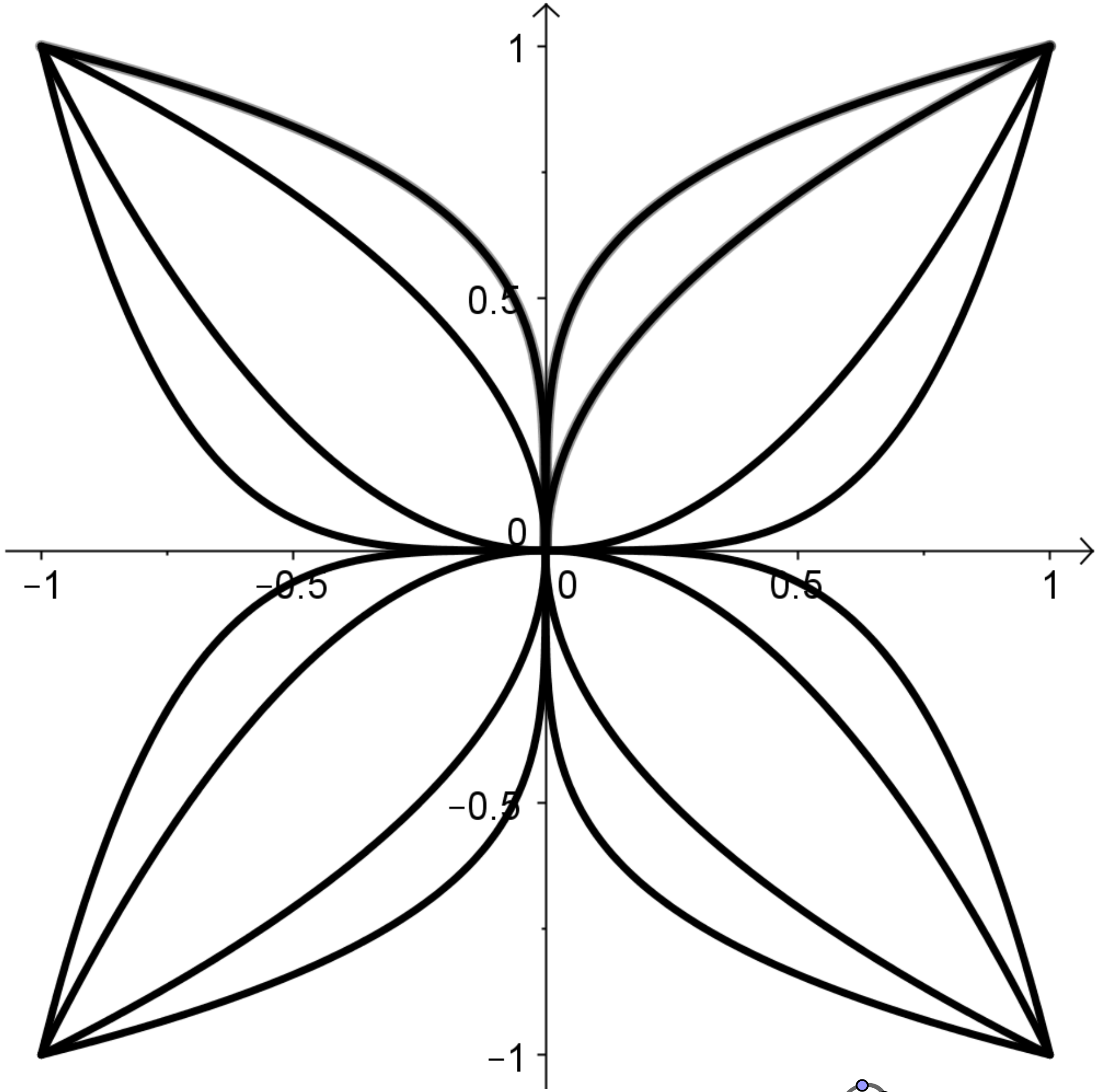
Mit Graphen Bilder malen



Versuche das Gespenst nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

Mit Graphen Bilder malen

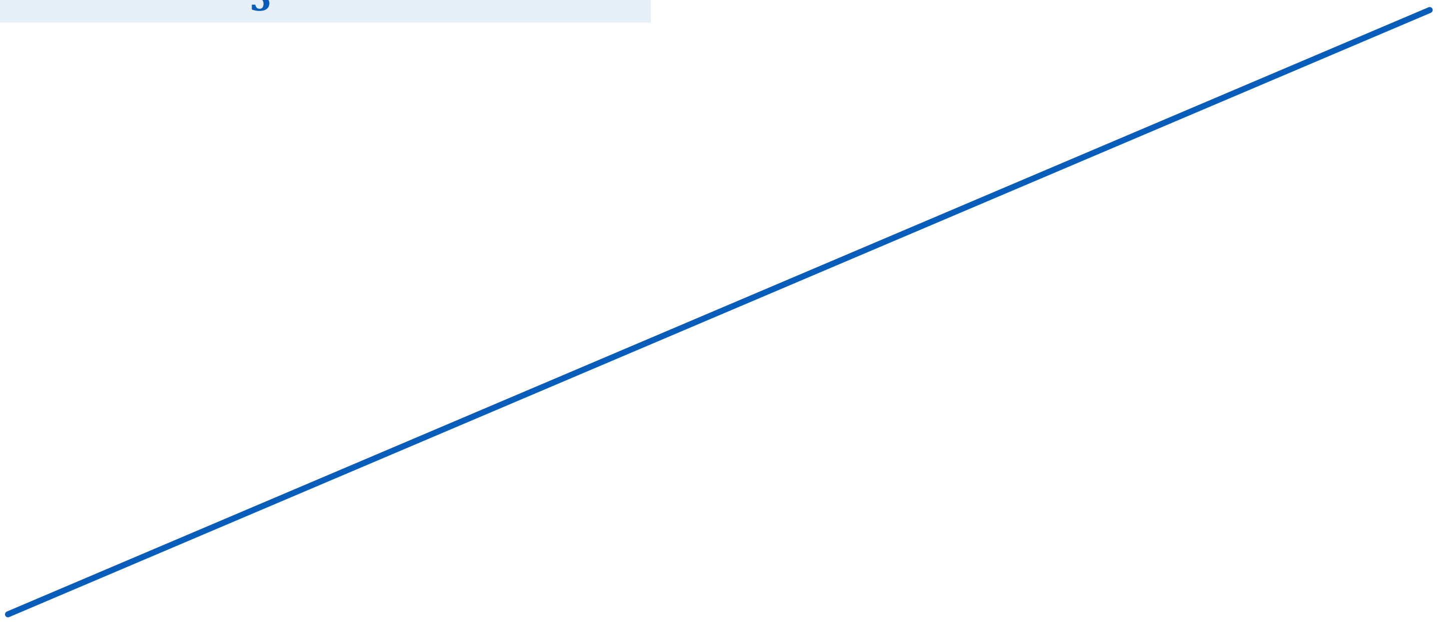


Versuche die Blüte nachzuzeichnen, indem du Funktionsterme in die Eingabezeile schreibst.

Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.

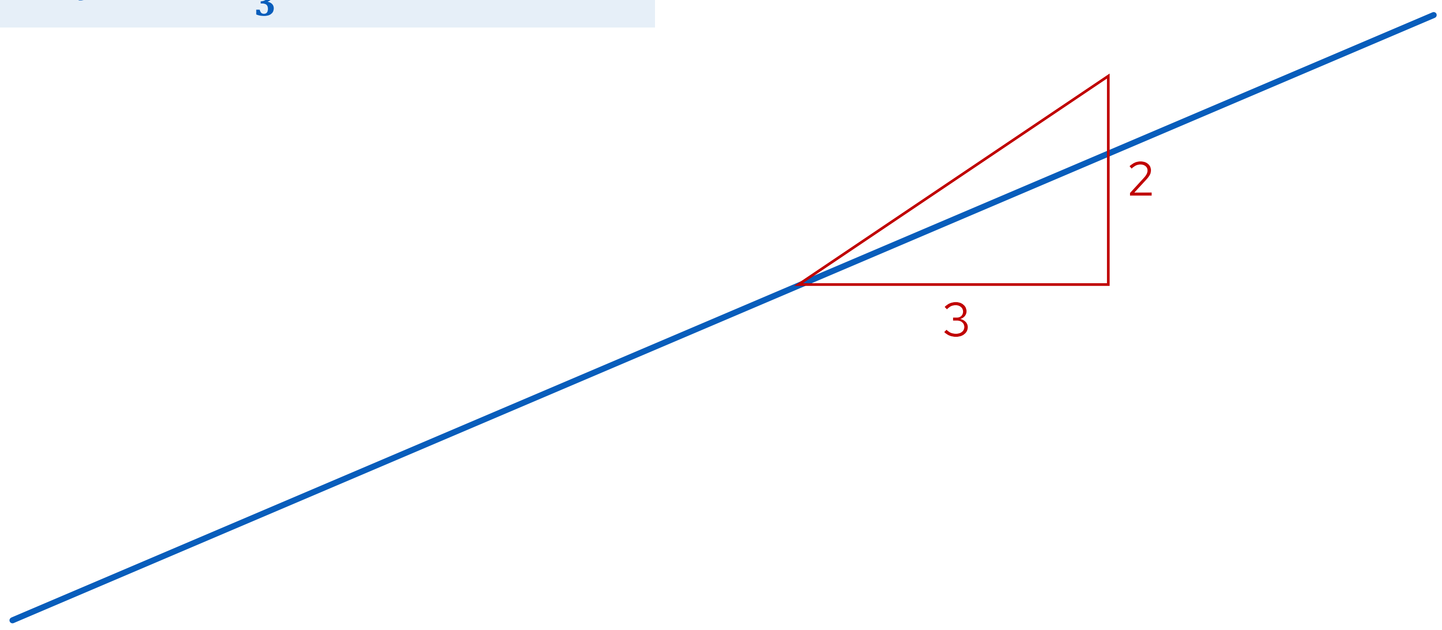


Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.

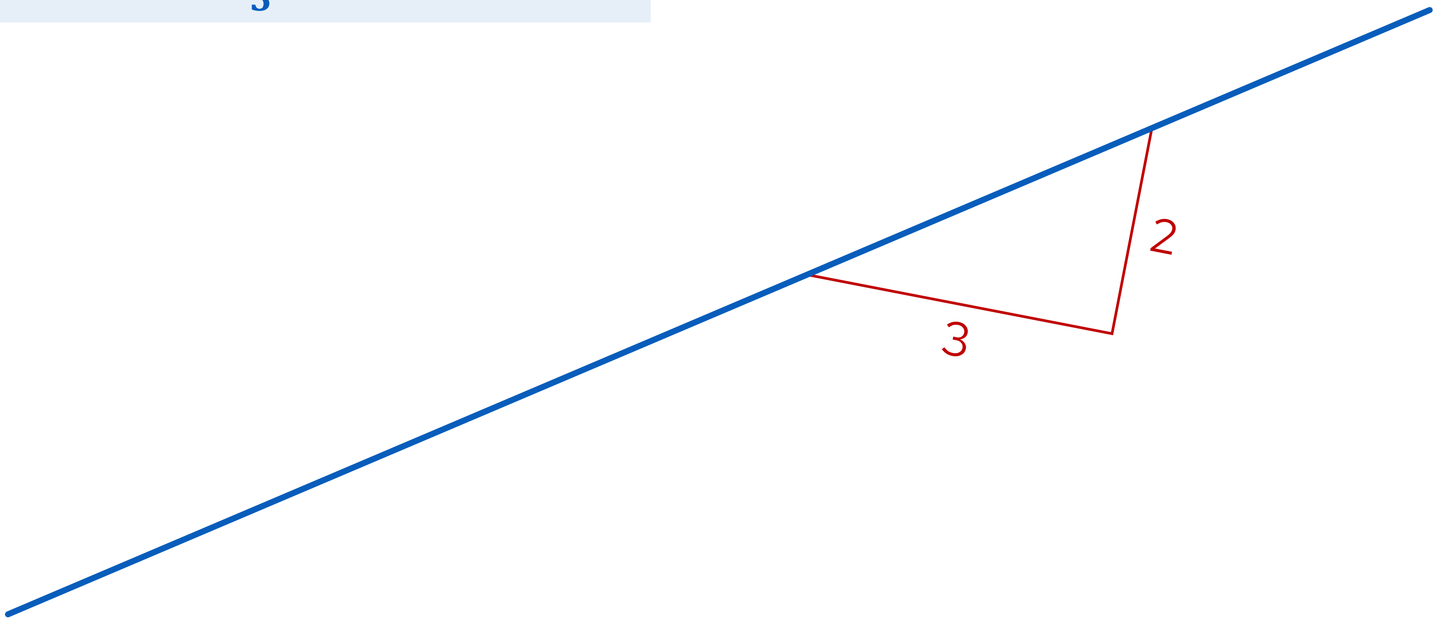
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



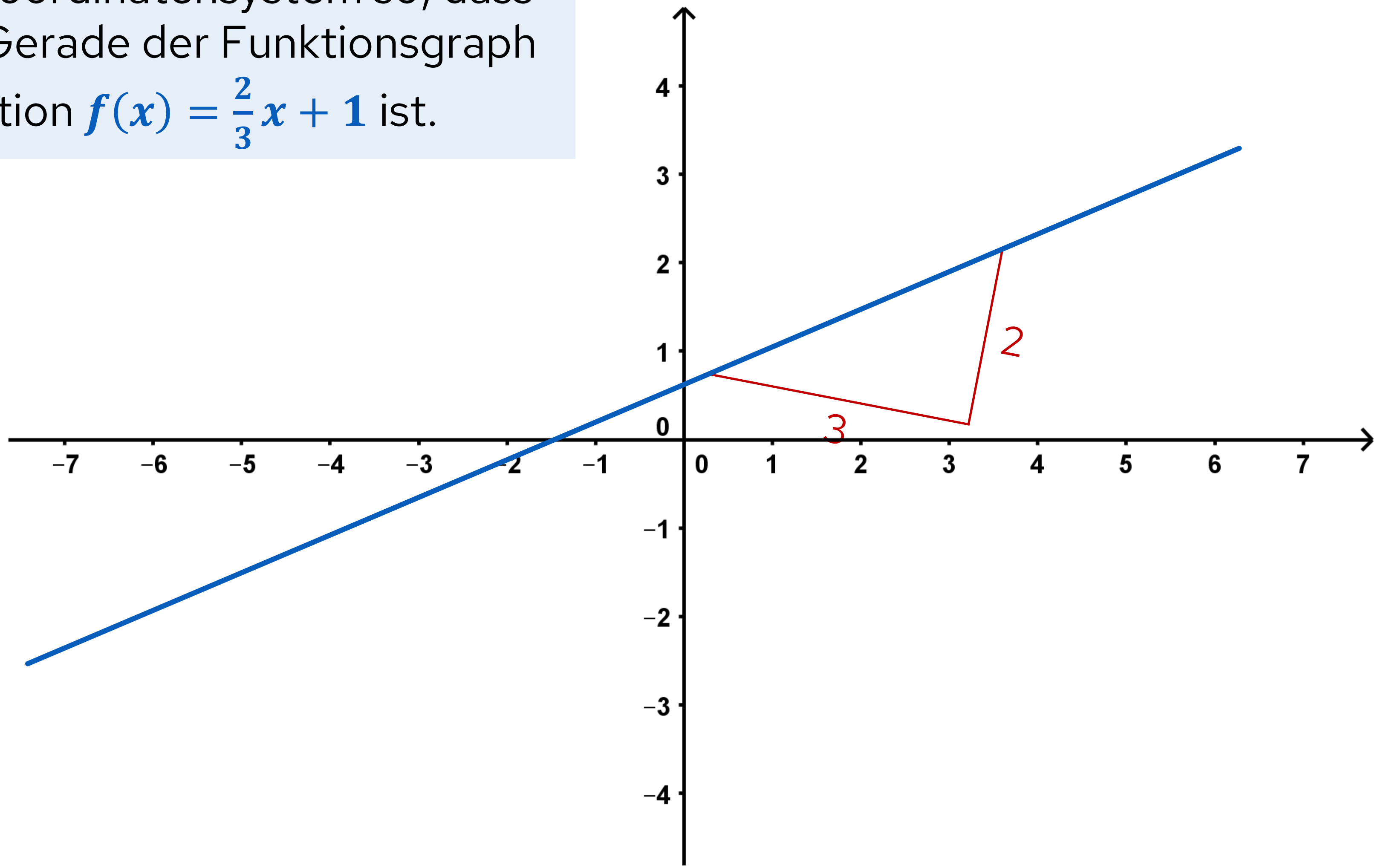
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



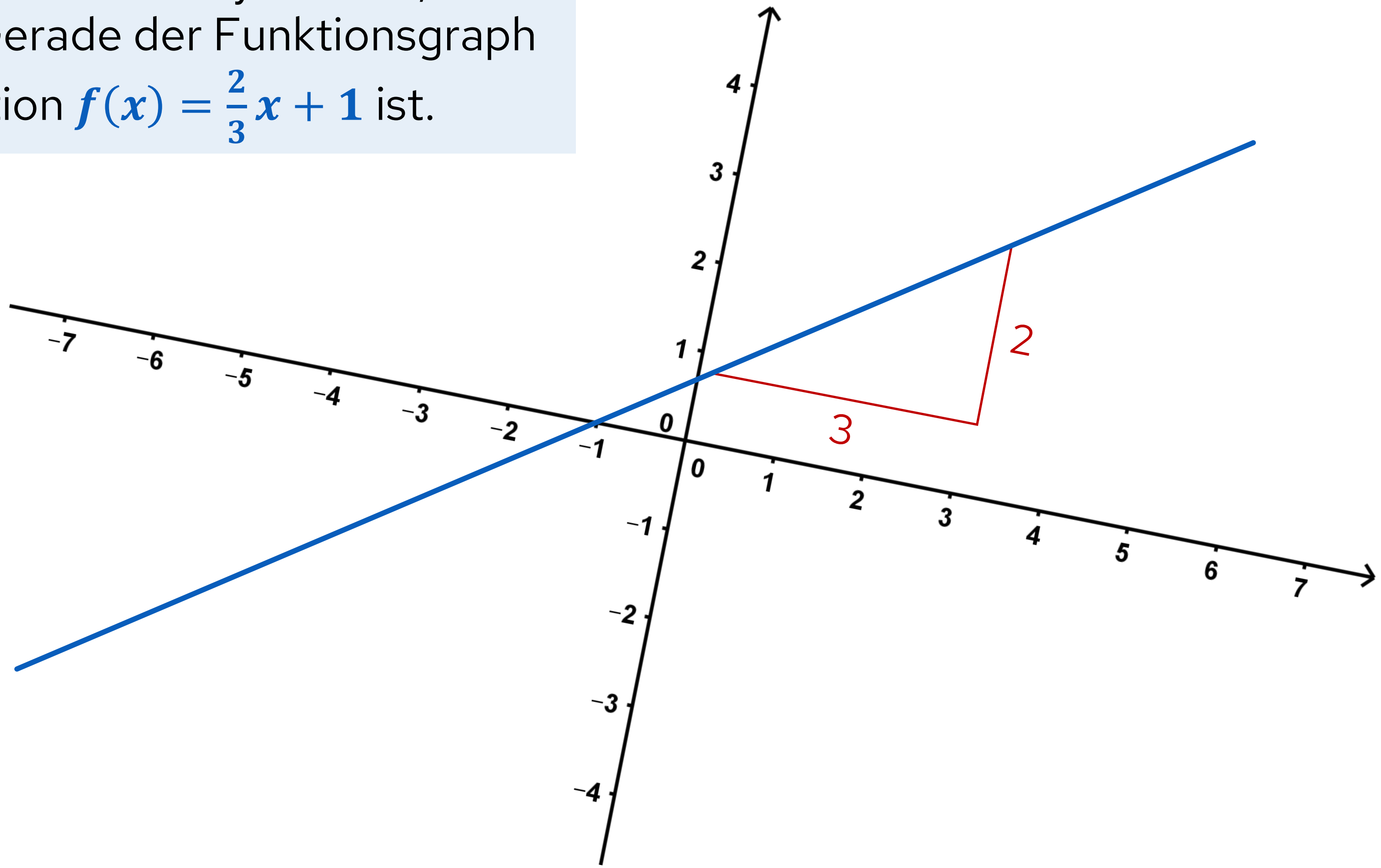
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



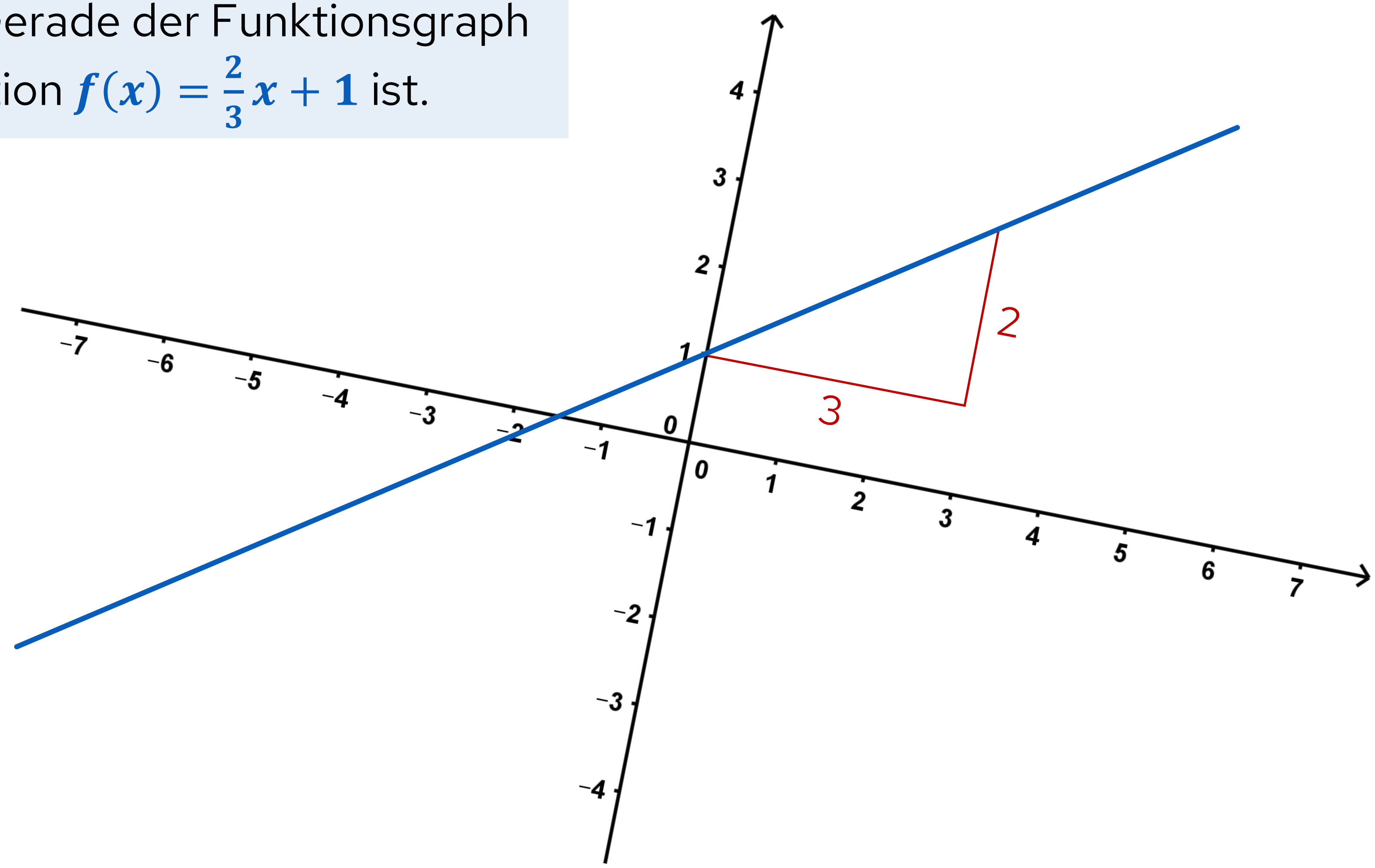
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

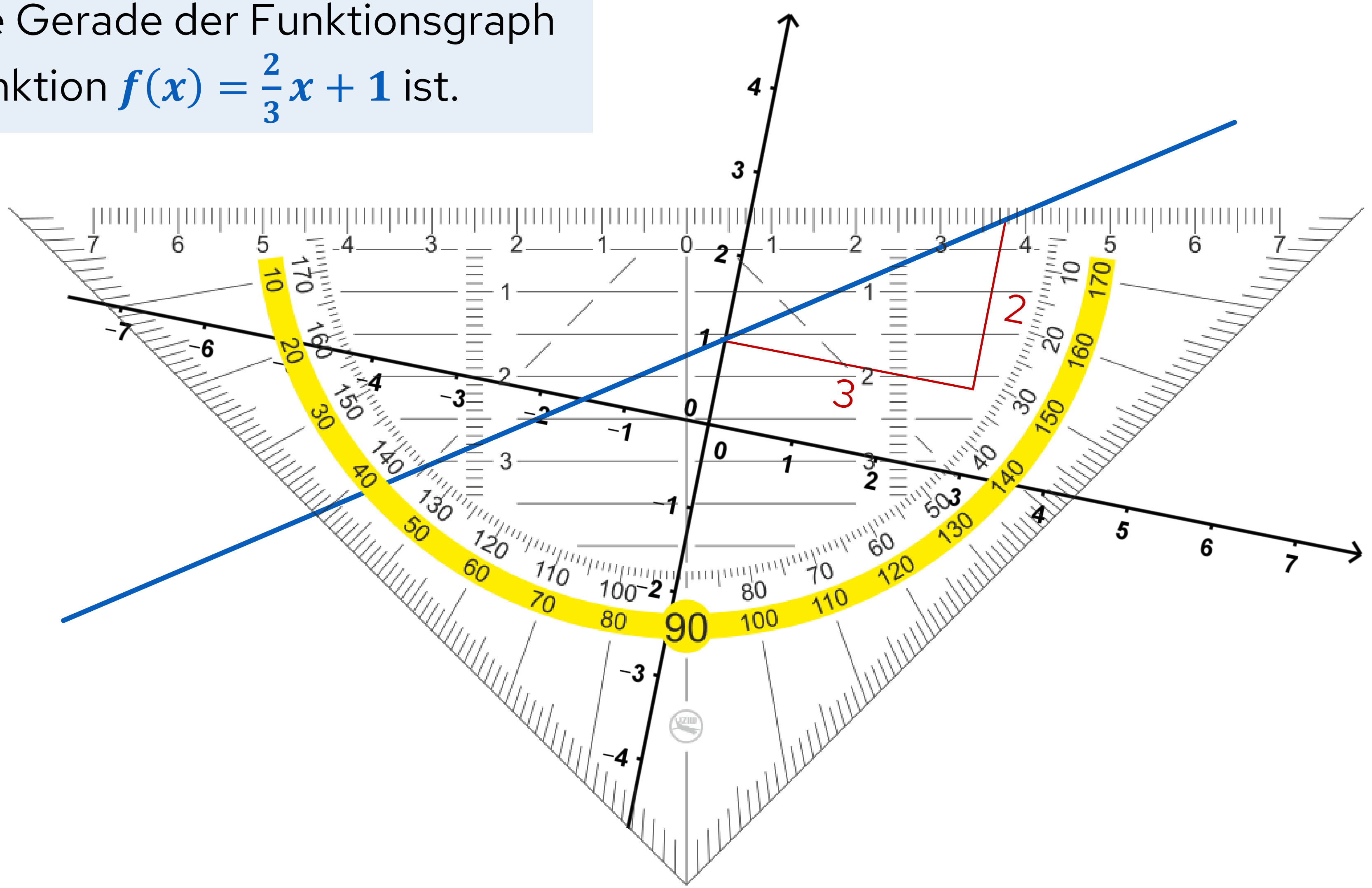
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



RPTU

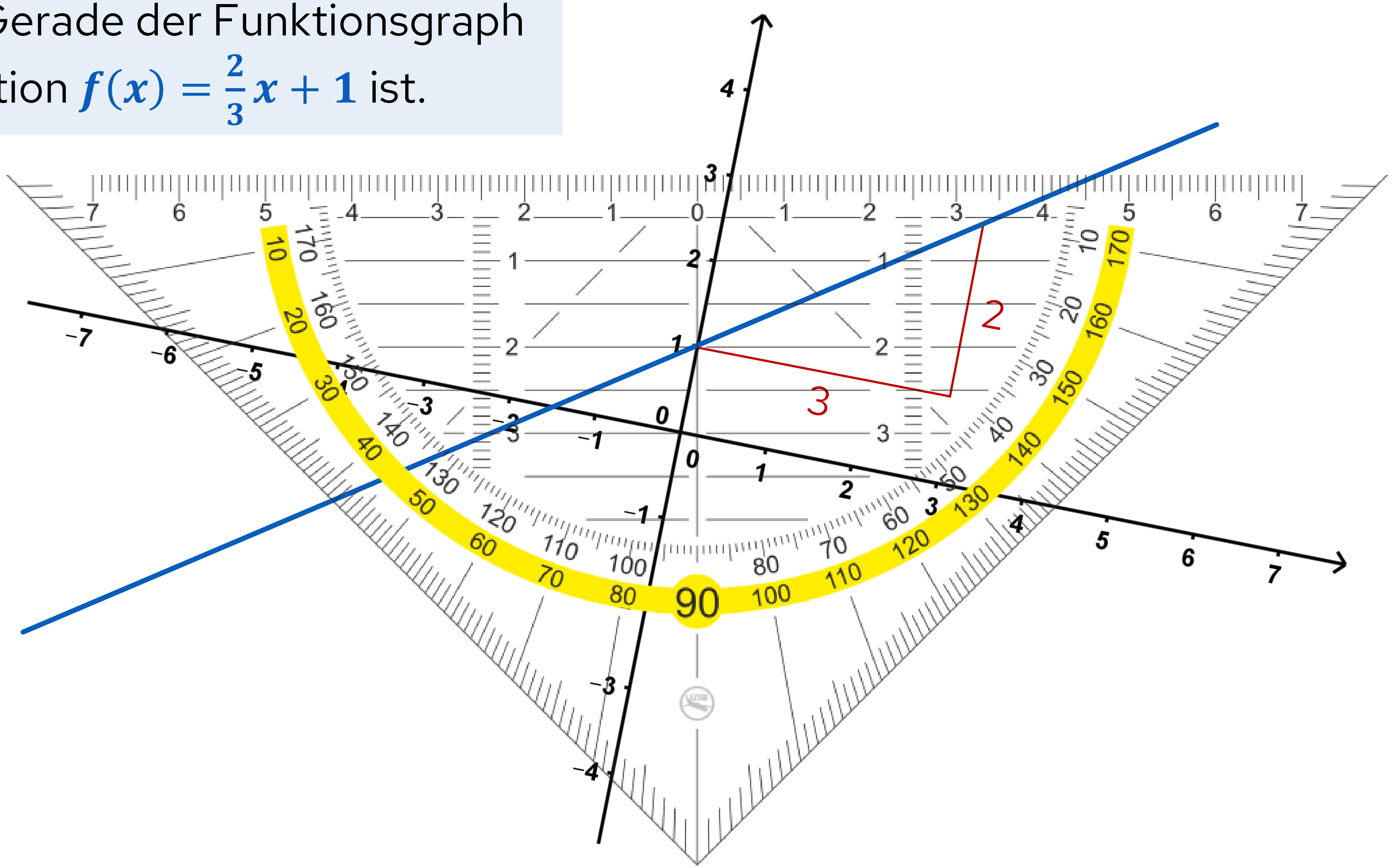
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



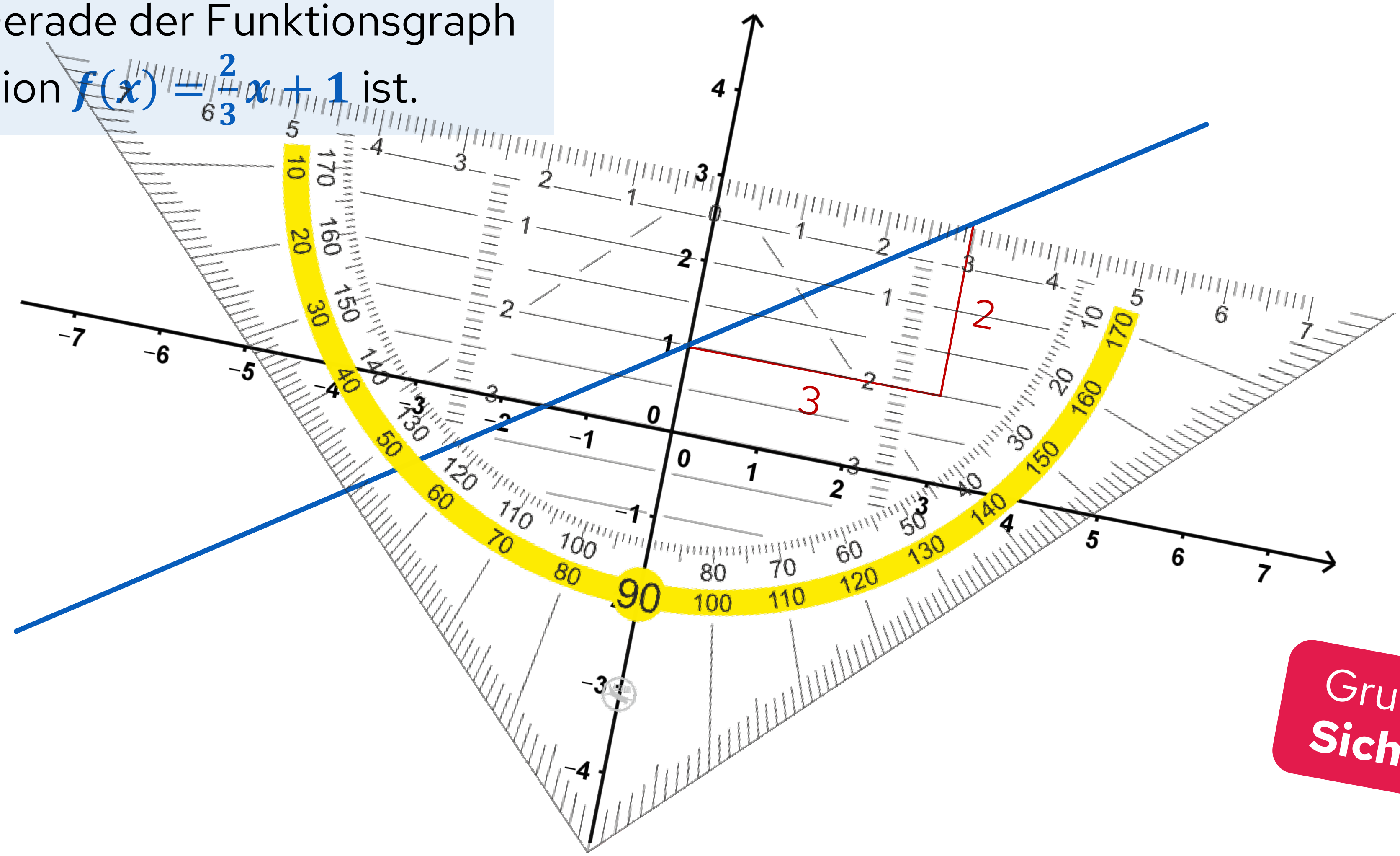
Koordinatenachsen ergänzen

Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Koordinatenachsen ergänzen

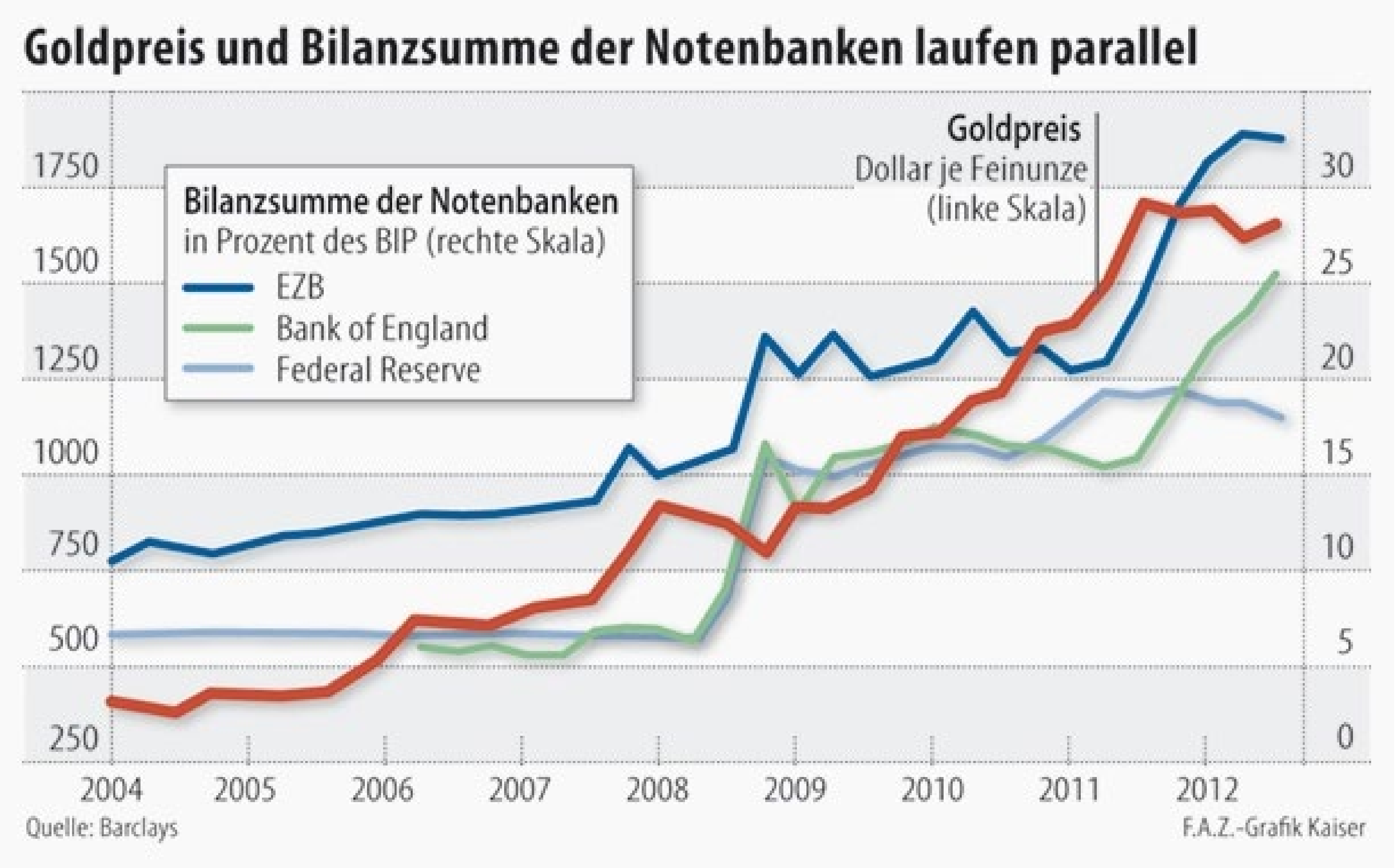
Ergänze ein Koordinatensystem so, dass die gezeigte Gerade der Funktionsgraph der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ ist.



Grundvorstellung
Sicht als Ganzes

RPTU

Goldpreis



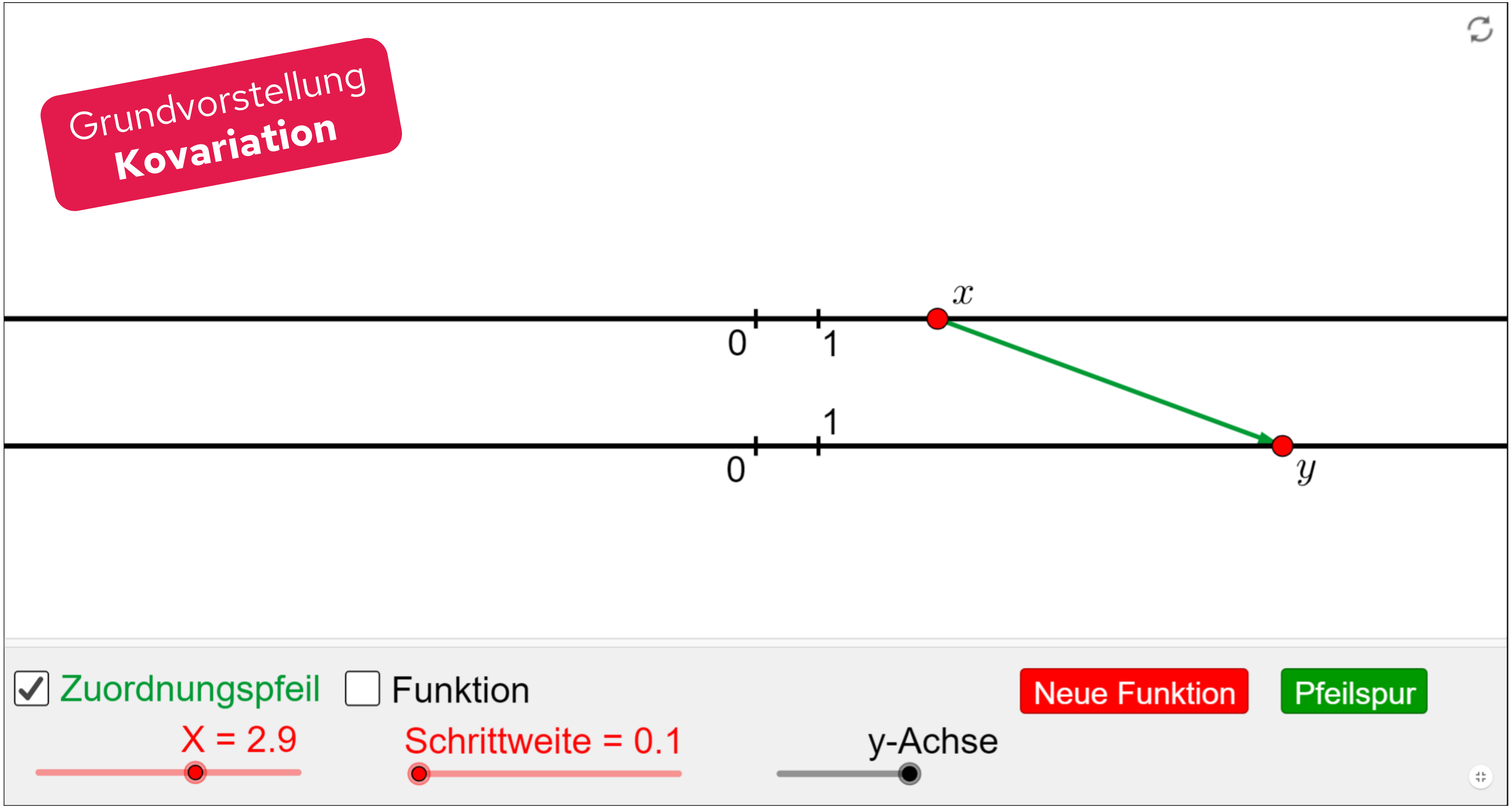
a) In welchem Jahr betrug der Goldpreis 750 Dollar je Feinunze?

b) Wie viele Jahre brauchte Gold ungefähr, um von 500 Dollar je Feinunze auf den dreifachen Wert zu steigen?

https://www.stiftungrechnen.de/wp-content/uploads/2021/03/13-05-29_Ergebnisbericht-Studie-Buergerkompetenz-Rechnen.pdf – Seite 20

 https://www.faz.net/aktuell/finanzen/devisen-rohstoffe/edelmetalle-goldpreis-in-der-finanzkrise-verdoppelt-12001908.html

Dynagraph und Funktionsgraph



Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/gqhwaxmc

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 3:
Funktionen

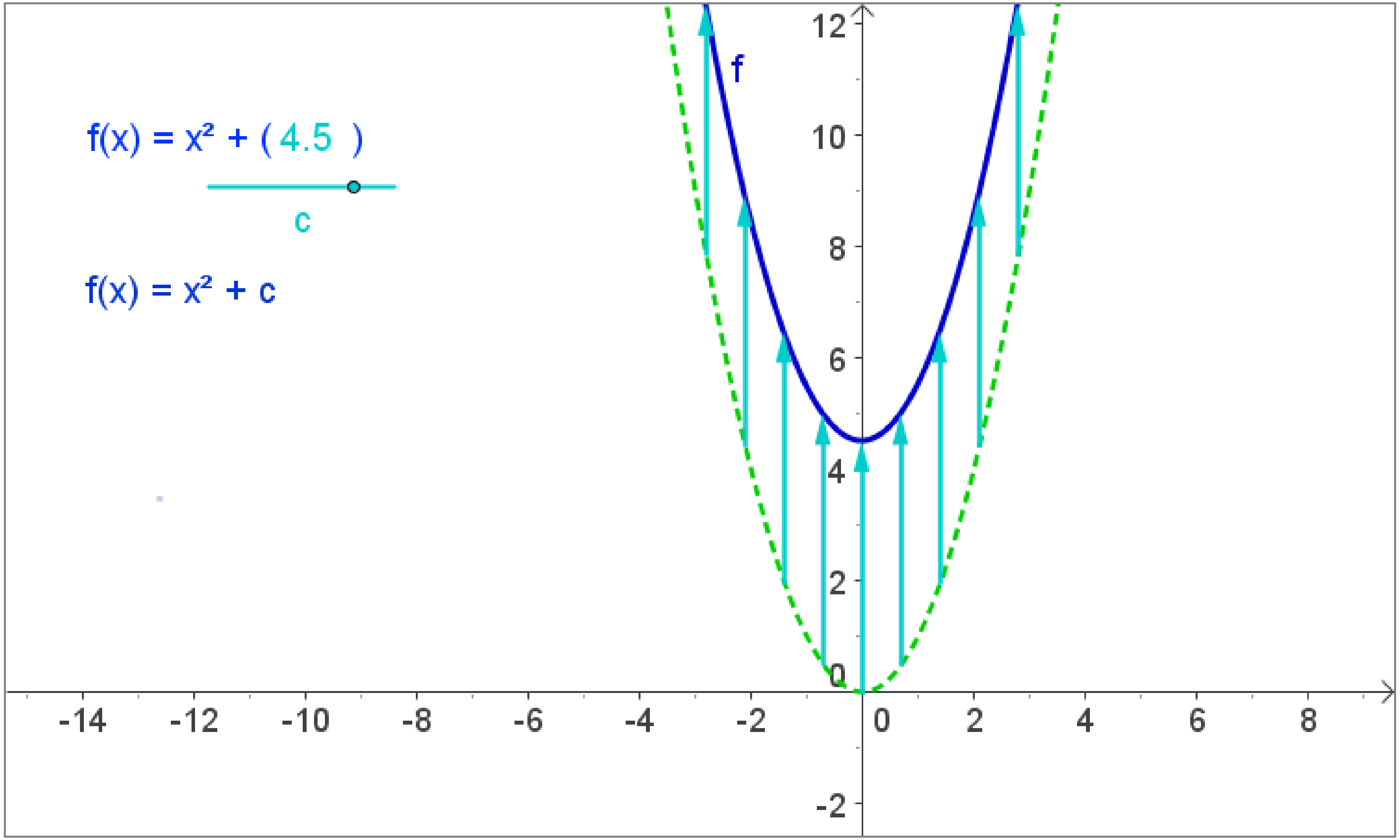
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

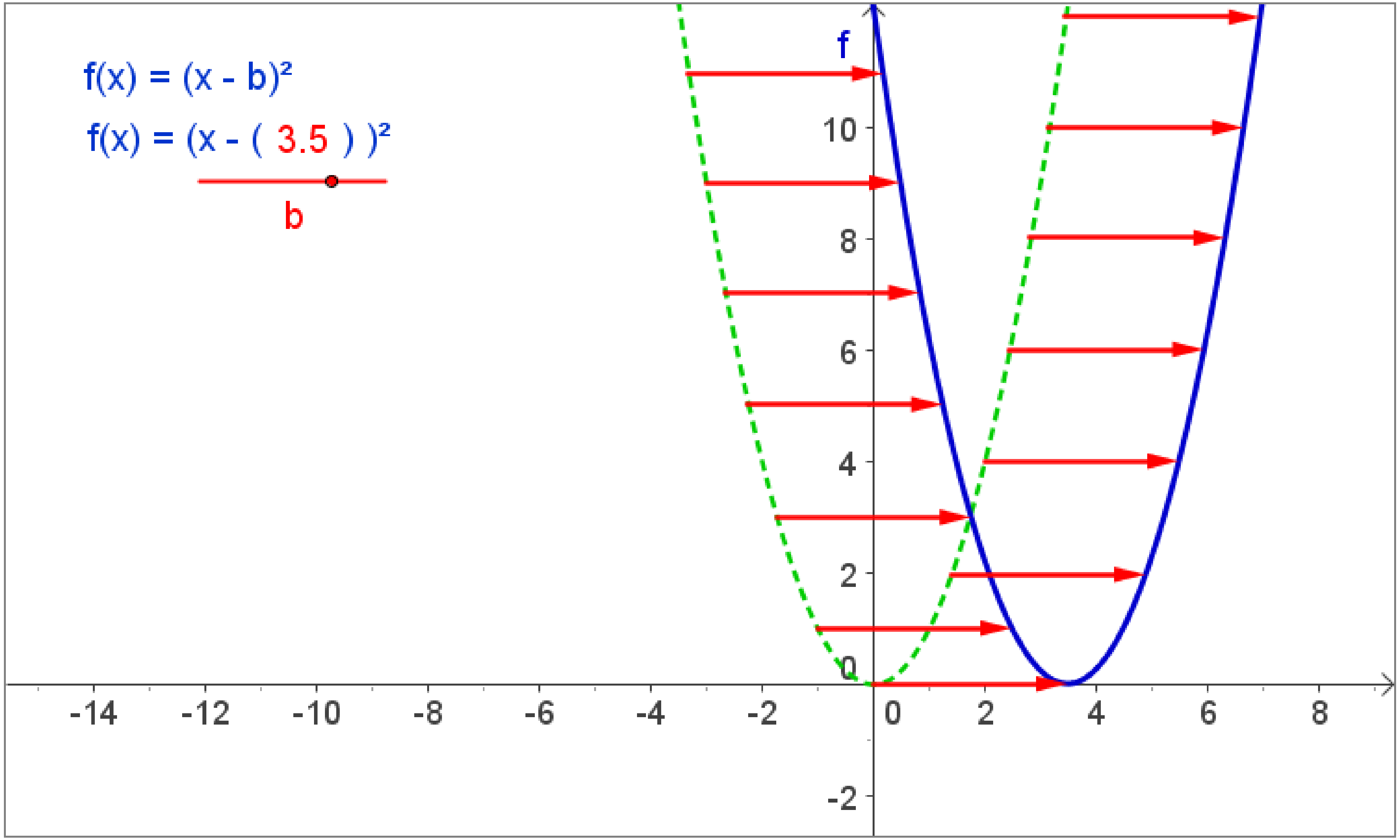
GeoGebra-Buch
„Funktionen“
https://roth.tel/funktionen

Parameter und Funktionsgraph: $x^2 + c$



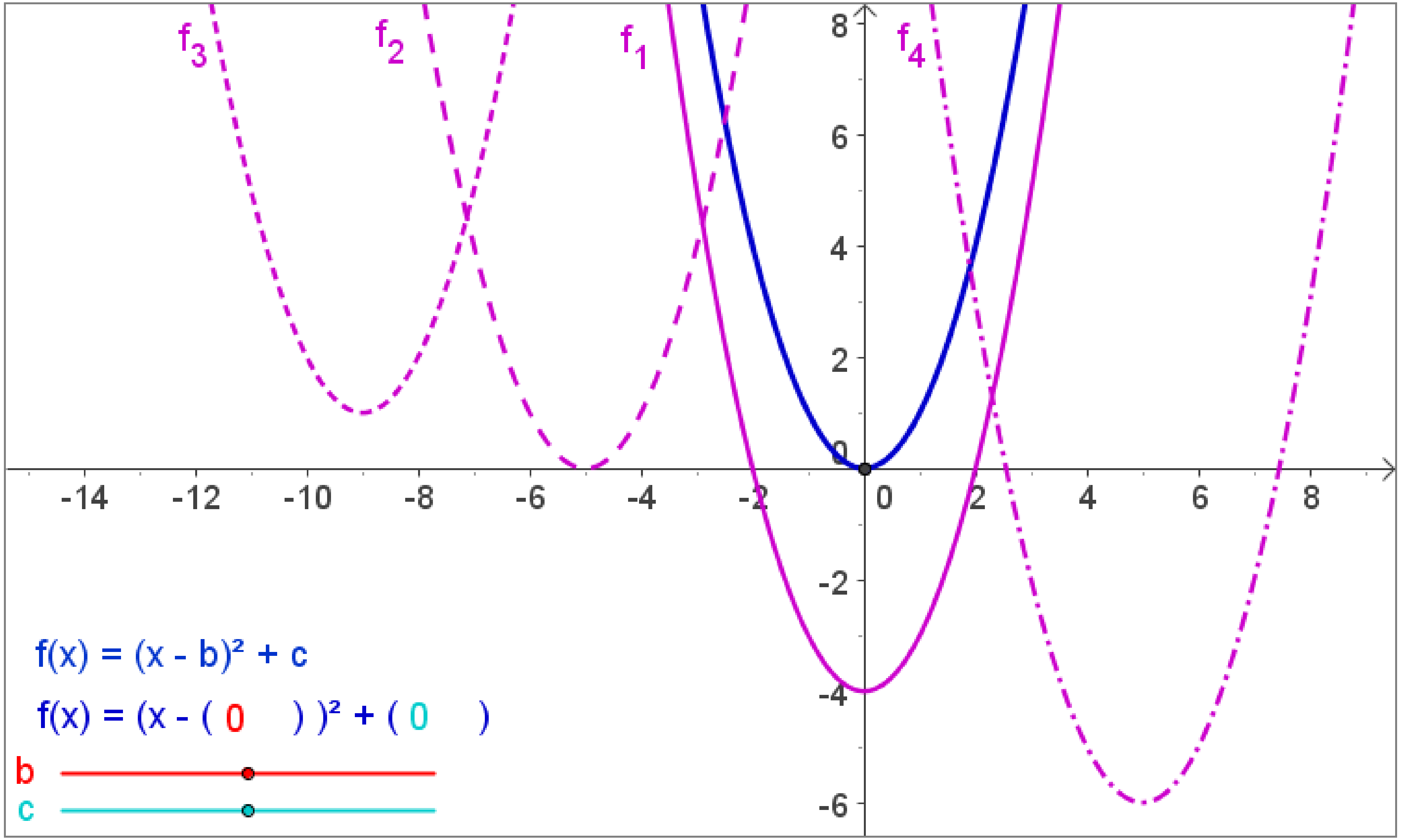
 https://juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/parabel/

Parameter und Funktionsgraph: $(x - b)^2$

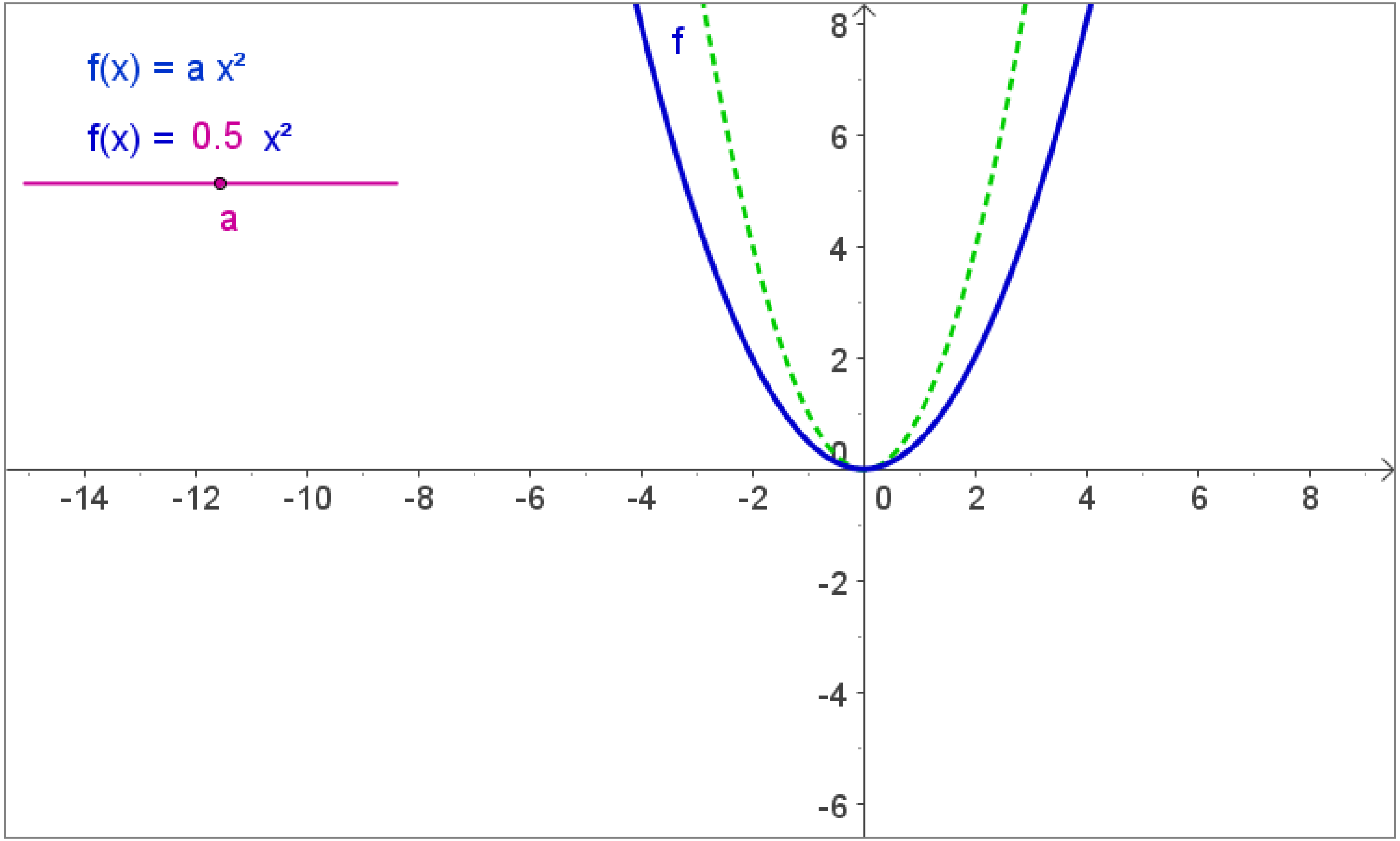


 https://juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/parabel/

Präsenzübung

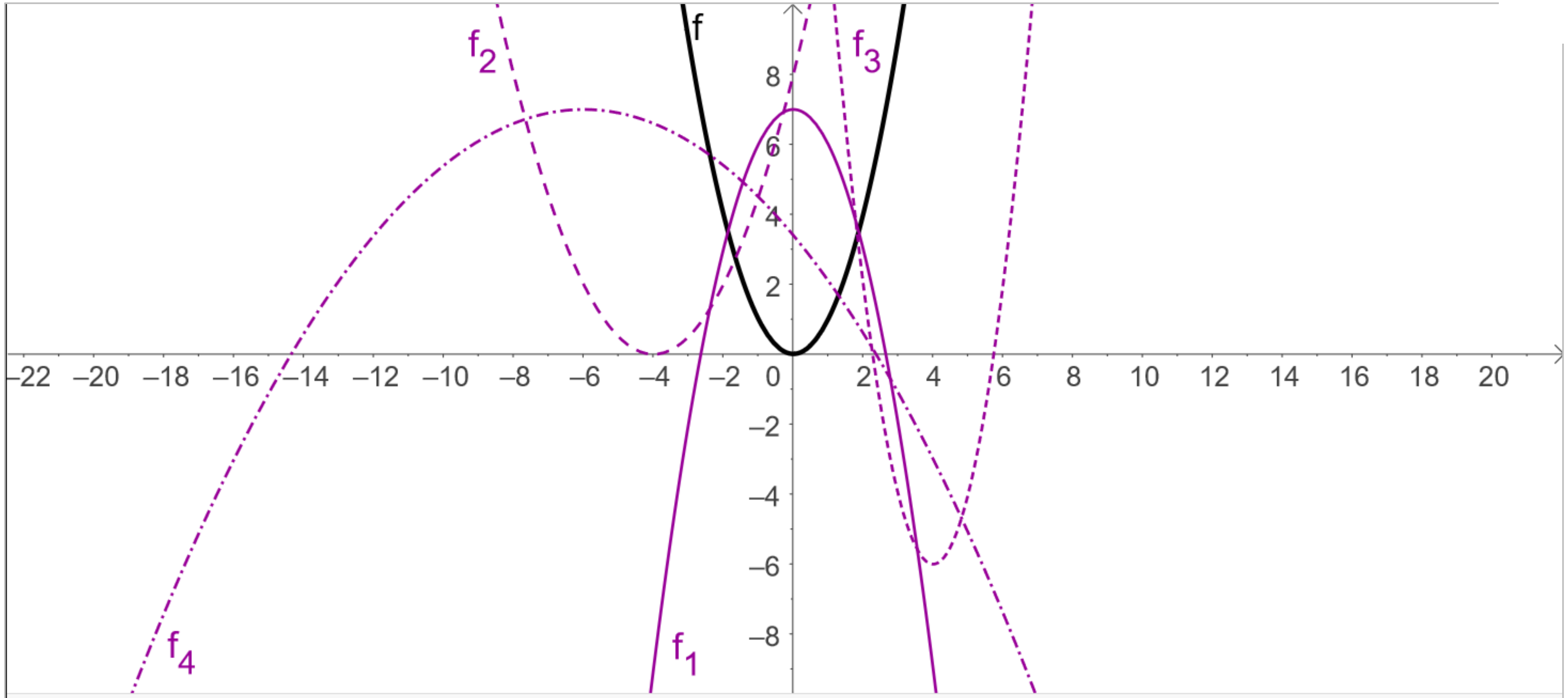


Parameter und Funktionsgraph: $a \cdot x^2$



 https://juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/parabel/

Präsenzübung



$$f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$$

a = 1 b = 0 c = 0

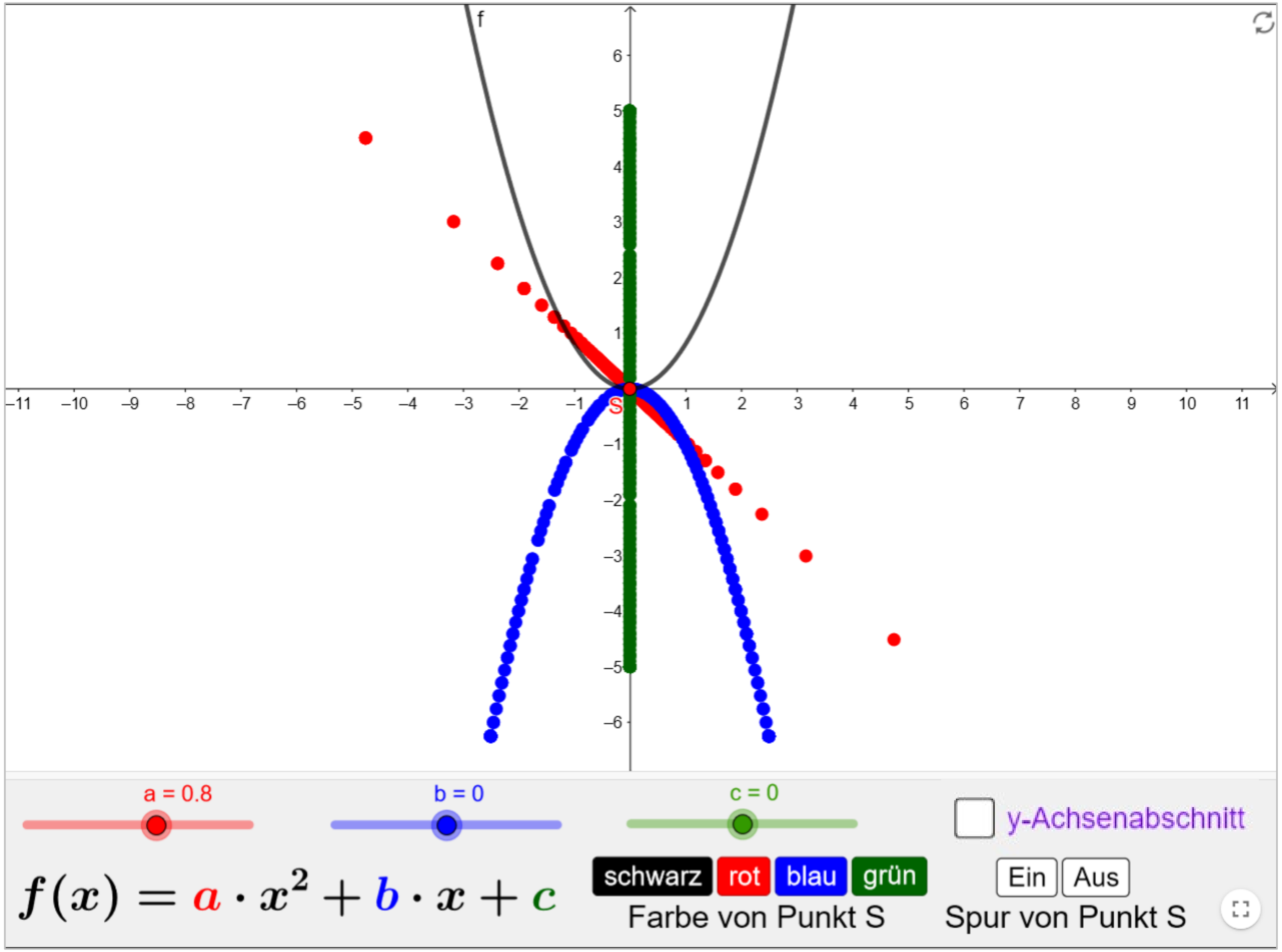
$$f(x) = 1 \cdot (x - (0))^2 + (0)$$

☑ f_1 ☑ f_2 ☑ f_3 ☑ f_4

https://juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/parabel/

https://www.geogebra.org/m/hnazqyza

Parameter und Funktionsgraph: Scheitel



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Zusammenhang zwischen Darstellungen

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$
$$x \mapsto a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

1. Binomische Formel (Plusformel)

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \left(x^2 + x\frac{b}{a}\right) + c$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2x\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \left(x^2 + 2x\frac{b}{2a}\right) + c$$

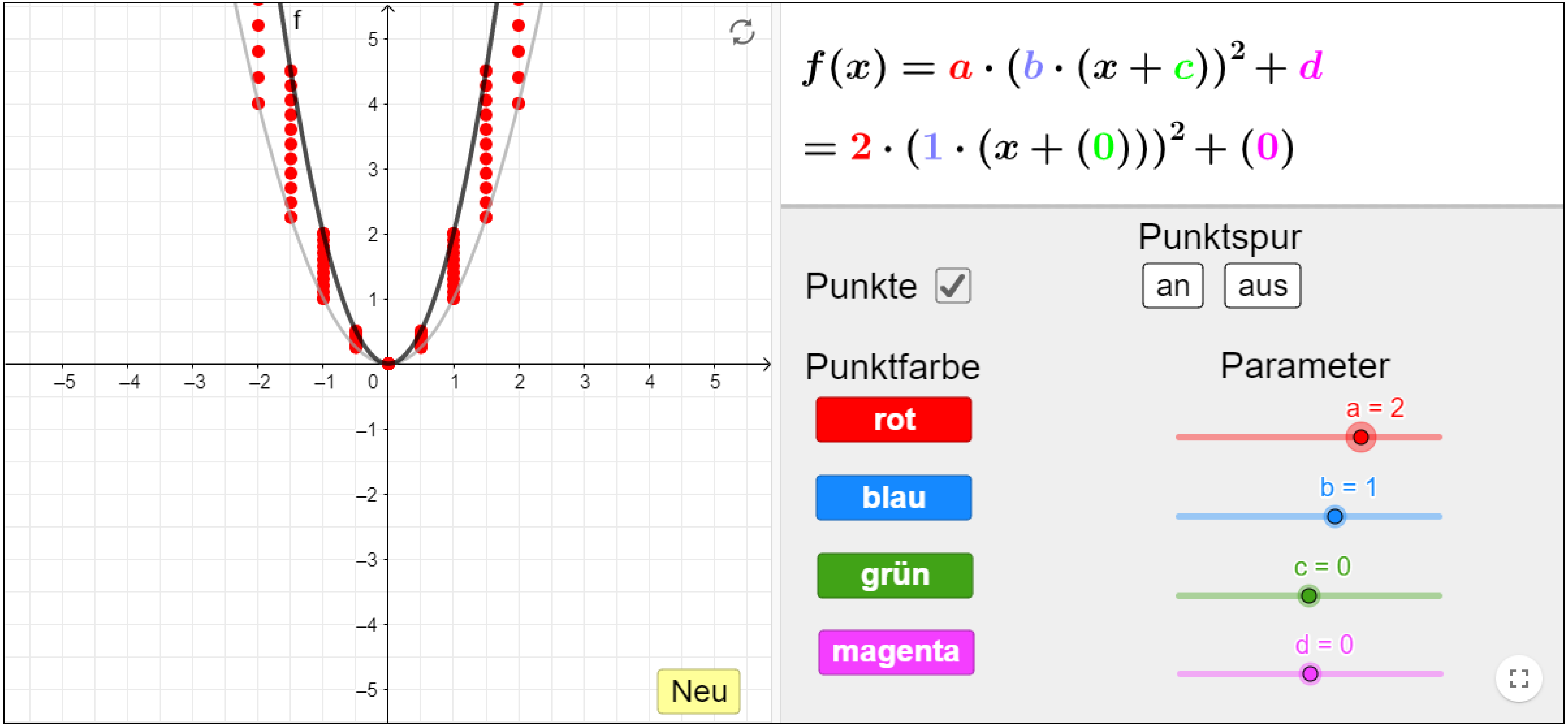
$$= a \cdot \left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a \cdot \left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - \frac{a \cdot b^2}{2^2 a^2}$$

$$= a \cdot \left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{= -x_s}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{= y_s} \quad \Rightarrow S\left(-\frac{b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

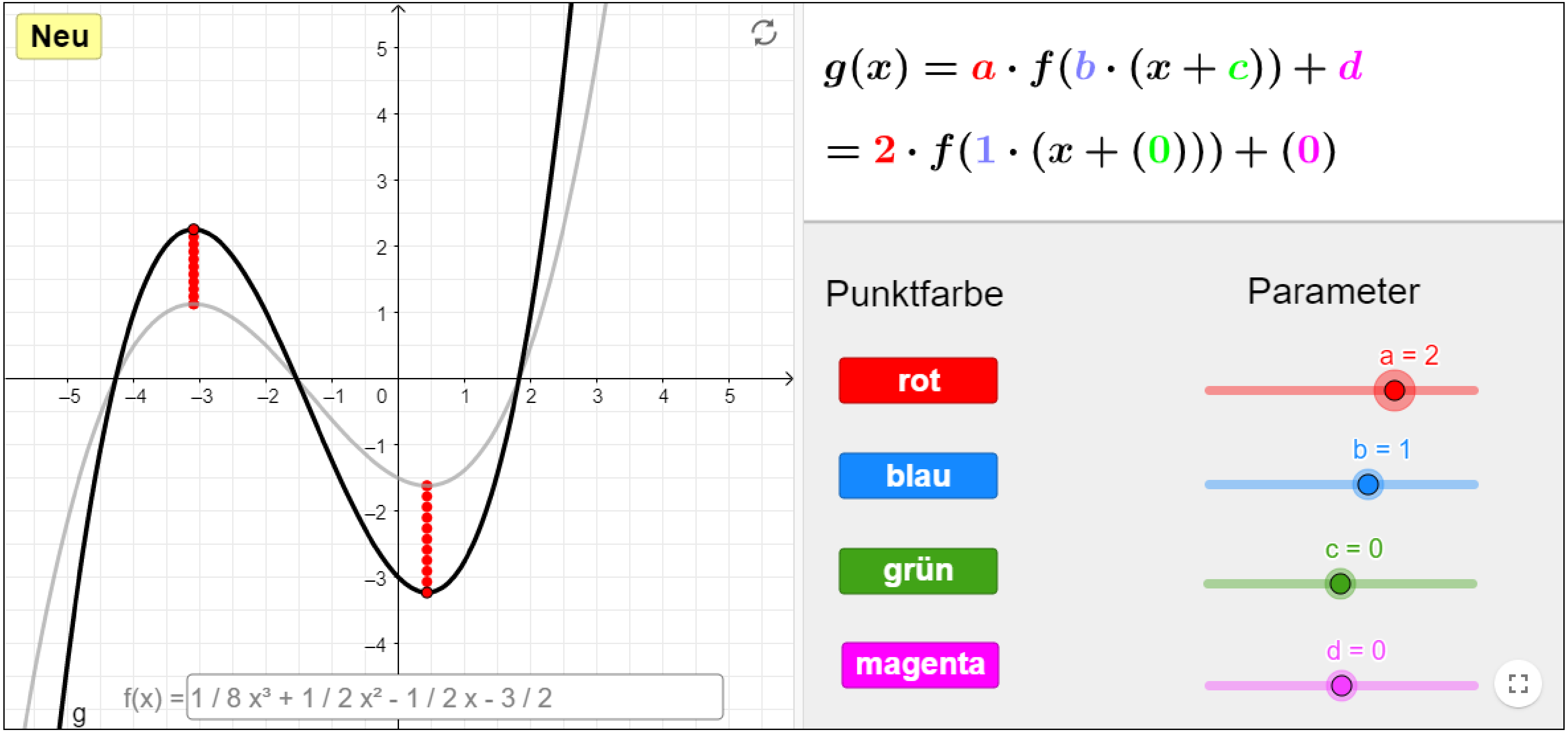
S ist der Scheitel der Parabel.

Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion



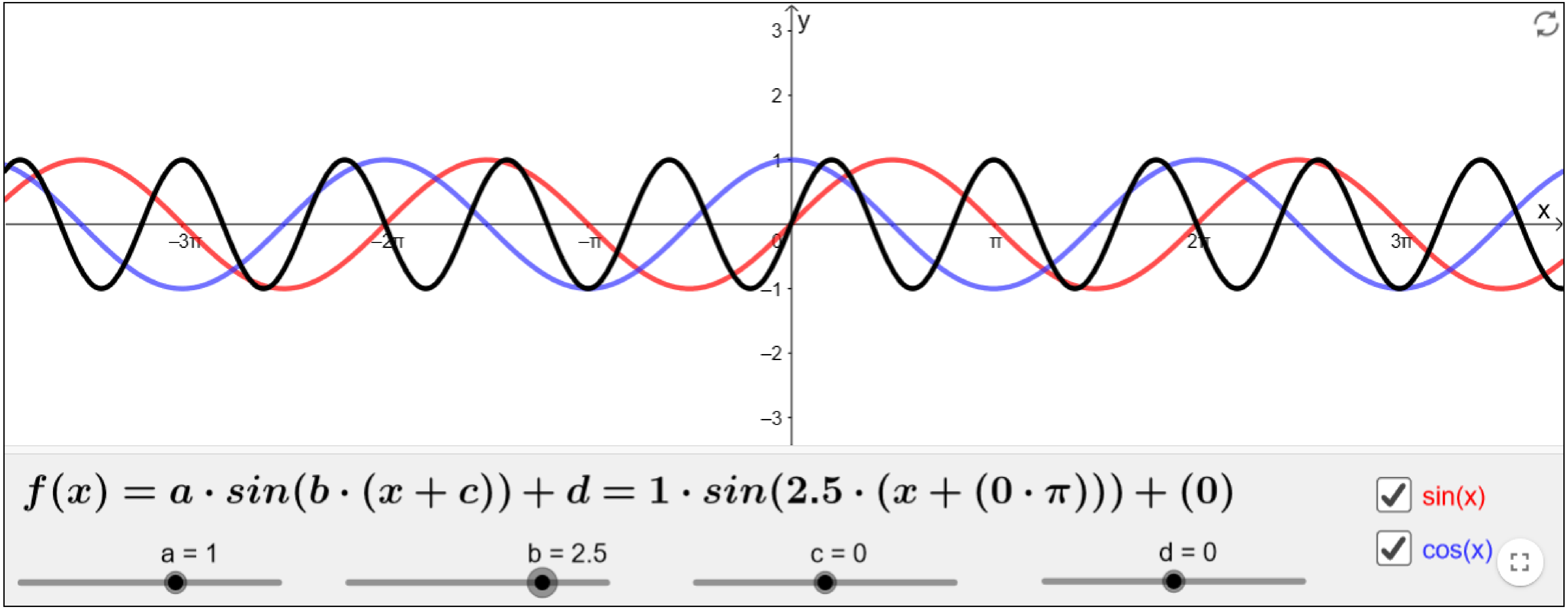
 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9. https://www.geogebra.org/m/jp4t7u6k

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein



 Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9. https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Sinusfunktion mit Parametern



Auswirkung von Parametern auf den Funktionsgraphen der quadratischen Funktion

$f(x) = x^2$

$$g(x) = a \cdot \big(b \cdot (x + c)\big)^2 + d$$

$+$ $-$ $+$ $-$

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9. https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Auswirkung von Parametern auf Funktionsgraphen allgemein

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

$$g(x) = a \cdot f\big(b \cdot (x + c)\big) + d$$

Strecken in y-Richtung für $|a| > 1$
Stauchen in y-Richtung für $0 < |a| < 1$

Strecken in x-Richtung für $0 < |b| < 1$
Stauchen in x-Richtung für $|b| > 1$

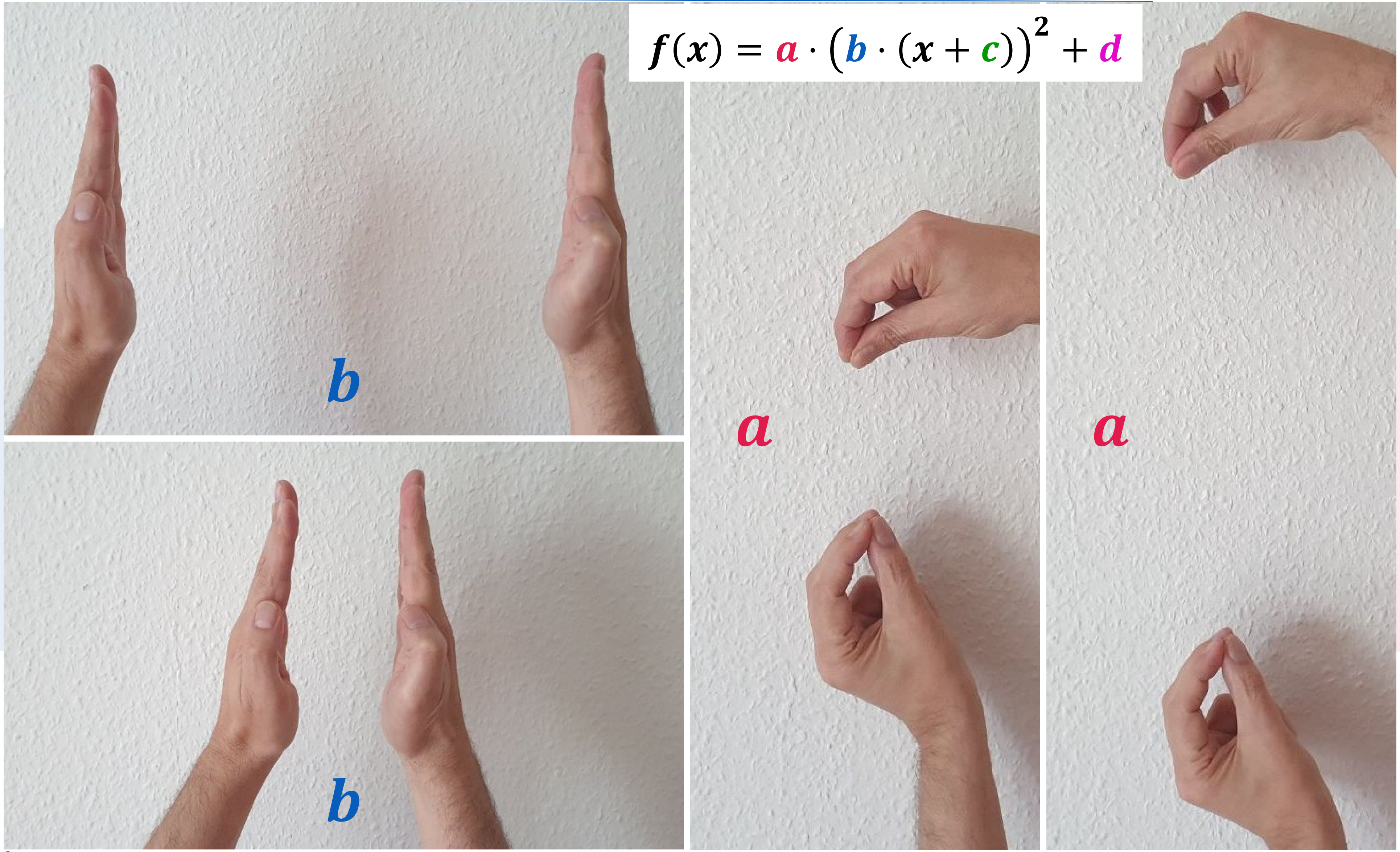
Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. Mathematik lehren, 226, 2-9.

https://www.geogebra.org/m/tjmr8uwz

Passende Sprechweisen und Handbewegungen

$$f(x) = a \cdot \left(b \cdot (x + c)\right)^2 + d$$

Parameter
b
Streckung
$(0 < |b| < 1)$
bzw.
Stauchung
$(|b| > 1)$
in
x-Richtung



Parameter
a
Streckung
$(|a| > 1)$
bzw.
Stauchung
$(0 < |a| < 1)$
in
y-Richtung

Roth, J. & Lichti, M. (2021). Funktionales Denken entwickeln und fördern. *Mathematik lehren, 226*, 2-9.

Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Kapitel 3: Funktionen

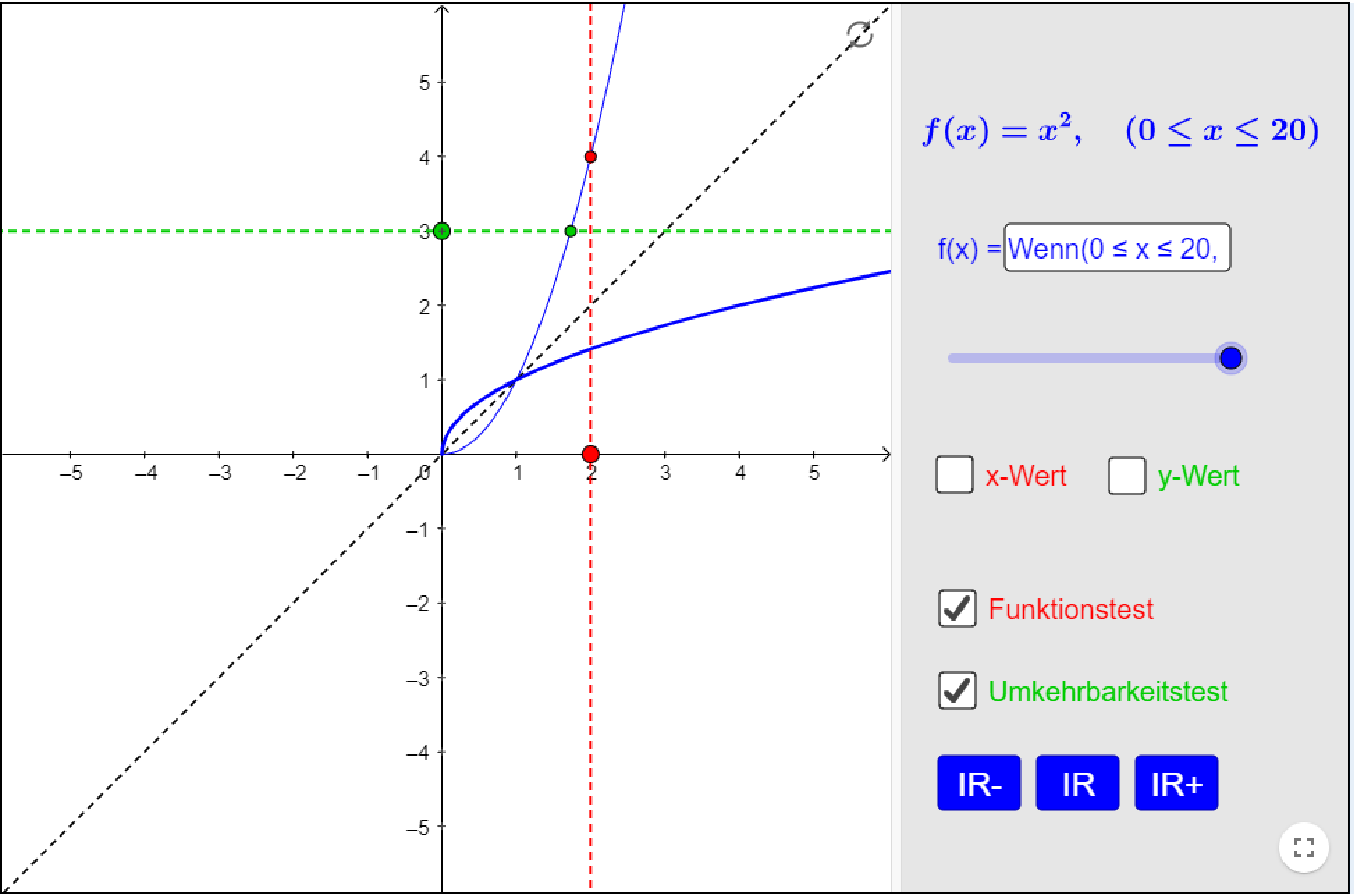
Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch
„Funktionen“
https://roth.tel/funktionen

Umkehrfunktion?!



Schritte zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn die Funktion f umkehrbar ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ mit $x \geq 0$.

1. Schritt: Funktionsgleichung nach x auflösen

$$y = x^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\sqrt{y} = |x| \underset{x \geq 0}{=} x$$

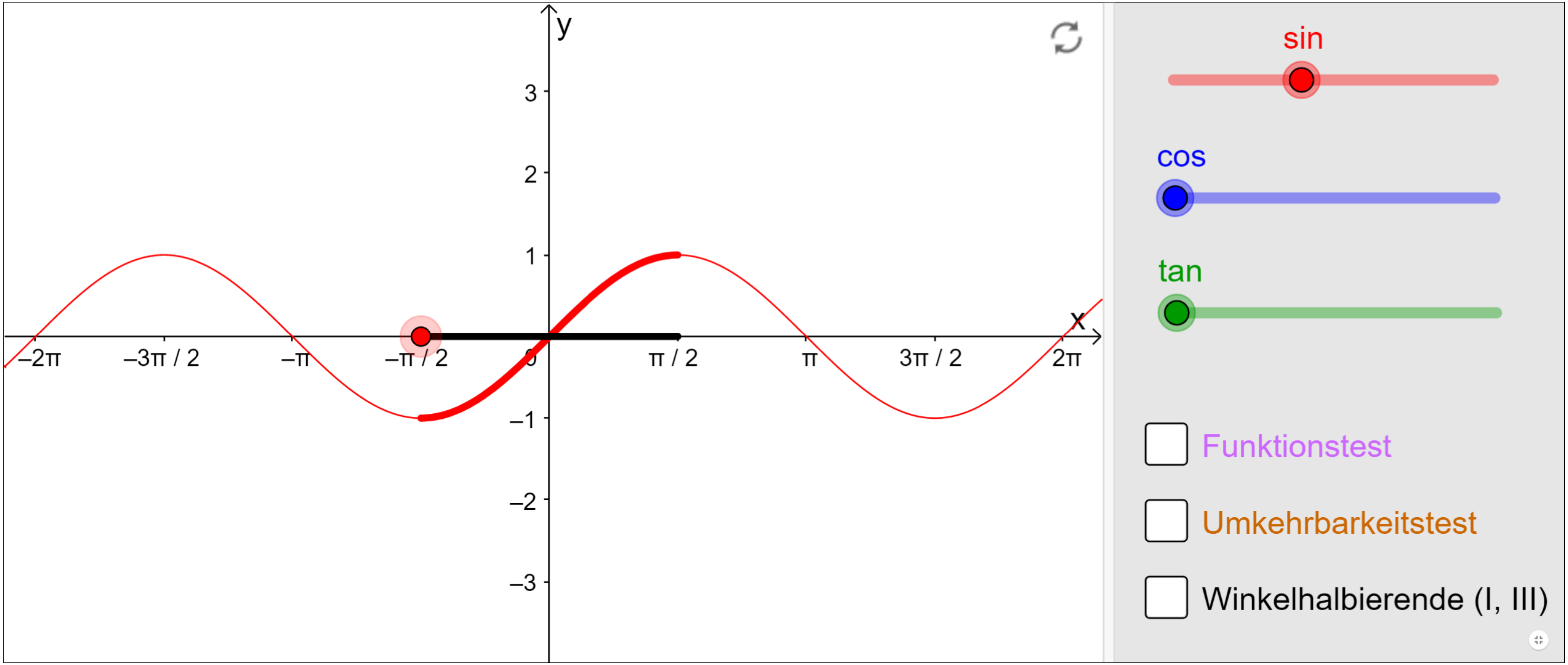
$$x = \sqrt{y}$$

2. Schritt: x und y vertauschen

$$y = \sqrt{x}$$

Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. *Mathematik lehren 204*, 33-35
https://www.geogebra.org/m/zDX4NKR2

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen



Roth, J. (2017). Zum y-Wert den x-Wert finden – Trigonometrische Funktionen umkehren. Mathematik lehren, 204, S. 33-35.
https://www.geogebra.org/m/YRqeU59w

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch
„Funktionen“
https://roth.tel/funktionen

Proportionale Funktionen

Wurstaufschnitt einkaufen

- 100 g Wurstaufschnitt kosten 1,20 €
- Was muss man für 300 g, 150 g, 600 g bzw. 200 g Aufschnitt bezahlen?

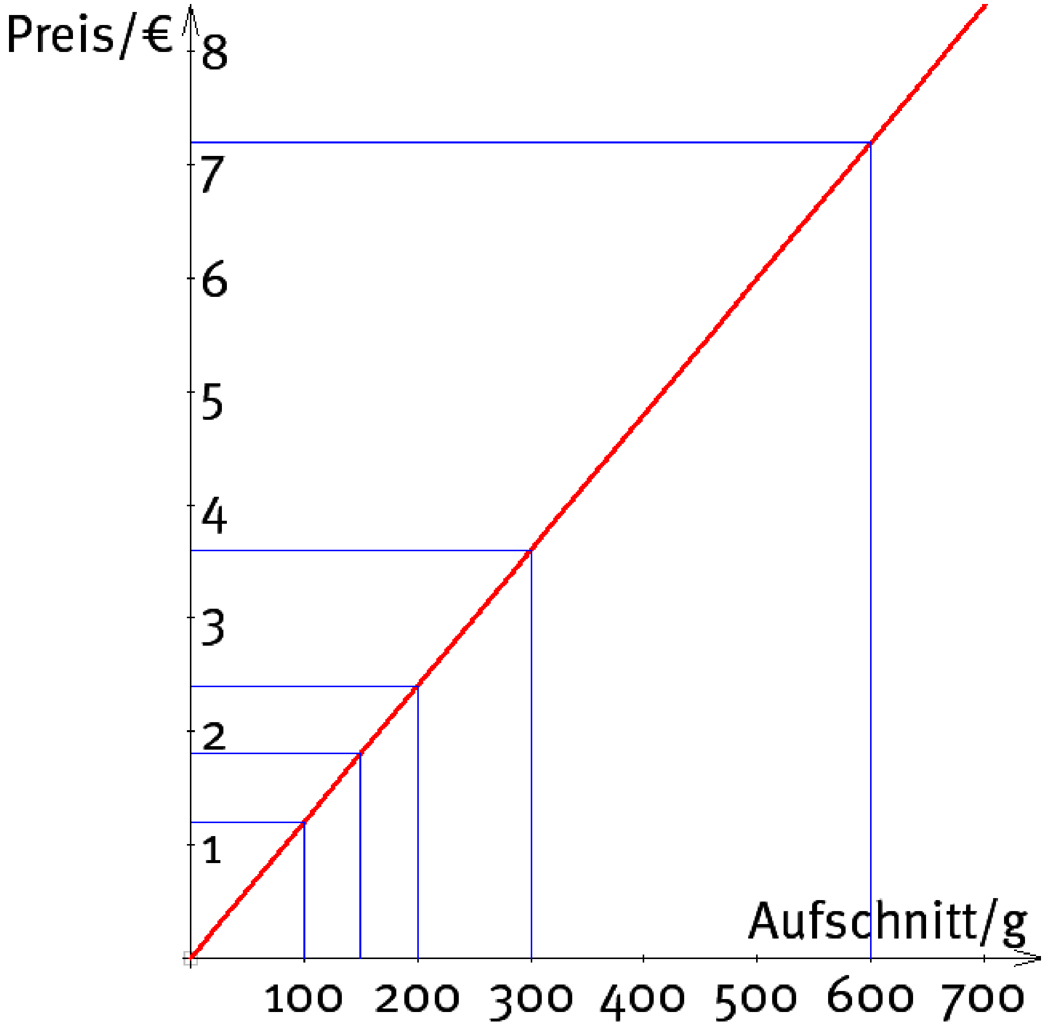
Aufschnitt / g	Preis / €
100	1,20
300	3,60
150	1,80
600	7,20
200	2,40

· 3 · 3
: 2 : 2
· 4 · 4
: 3 : 3

Lösung

- Zur doppelten (dreifachen, vierfachen, ...) Menge gehört der doppelte (dreifache, vierfache, ...) Preis.
- Kauft man nur die Hälfte (ein Drittel, ein Viertel, ...) dann bezahlt man nur die Hälfte (ein Drittel, ein Viertel, ...).

Proportionale Funktionen



Der Graph ist eine Ursprungsgerade.

Proportionale Funktionen

x = **Aufschnitt / g**	$f(x)$ = **Preis / €**	$\frac{f(x)}{x} = \frac{\textbf{Preis / €}}{\textbf{Aufschnitt / g}}$
100	1,20	$\frac{1{,}2}{100} = \frac{3}{250}$
300	3,60	$\frac{3{,}6}{300} = \frac{3}{250}$
150	1,80	$\frac{1{,}8}{150} = \frac{3}{250}$
600	7,20	$\frac{7{,}2}{600} = \frac{3}{250}$
200	2,40	$\frac{2{,}4}{200} = \frac{3}{250}$

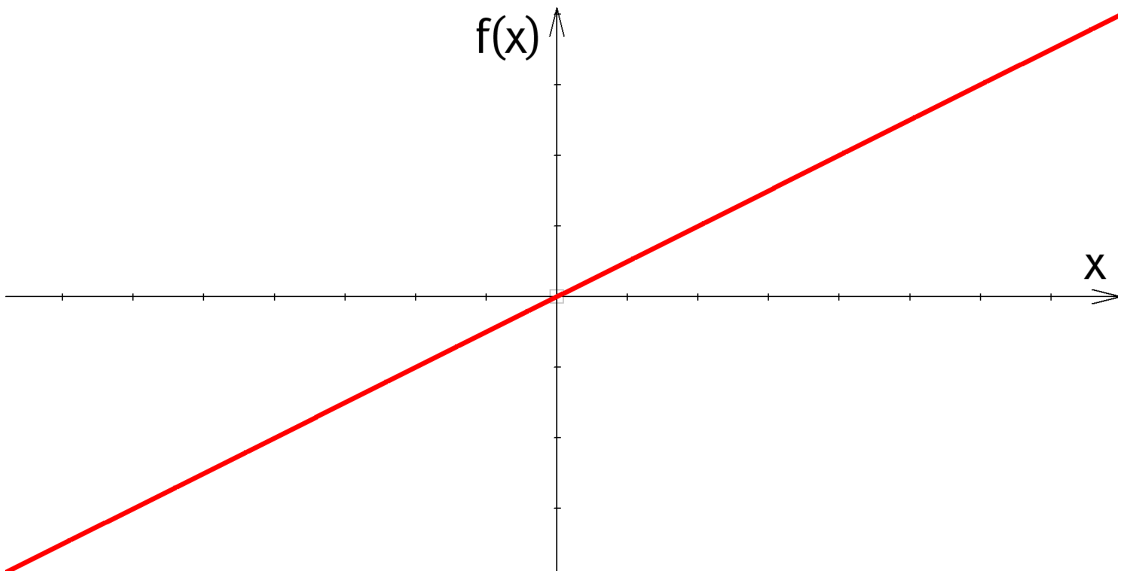
$$\frac{f(x)}{x} = a = const.$$

$$\exists_{a \in \mathbb{R}} \ \forall_{x \in \mathbb{R}} \ \ f(x) = a \cdot x$$

Proportionale Funktionen

Definition

- Eine lineare Funktion $x \mapsto a \cdot x + b$ mit $b = 0$, also eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ heißt **proportionale Funktion**.
- Der Parameter a wird ***Proportionalitätsfaktor*** oder ***Proportionalitätskonstante*** genannt.



Proportionale Funktionen
Charakteristische Eigenschaften

Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung einer proportionalen Funktion hat die Form $y = a \cdot x$.

Funktionsgraph

Der Graph einer proportionalen Funktion ist eine Ursprungsgerade durch den Punkt $(1|a)$.

Quotientengleichheit

Der Quotient aus Funktionswert $f(x)$ und zugehörigem Argument x ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstant gleich der Proportionalitätskonstanten a.

$$\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a$$

Funktionalgleichungen

Eine Addition (Subtraktion) von Argumenten bewirkt eine Addition (Subtraktion) von Funktionswerten.

$$\begin{aligned} \forall_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \quad f(x_1 \pm x_2) &= a \cdot (x_1 \pm x_2) \\ &= a \cdot x_1 \pm a \cdot x_2 \\ &= f(x_1) \pm f(x_2) \end{aligned}$$

Wird das Argument ver-$\boldsymbol{r}$-facht (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, …), dann wird auch der Funktionswert ver-$\boldsymbol{r}$-facht (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, …).

$$\begin{aligned} \forall_{r \in \mathbb{R}} \quad f(r \cdot x) &= a \cdot (r \cdot x) \\ &= r \cdot ax \\ &= r \cdot f(x) \end{aligned}$$

Anti- (bzw. umgekehrt) proportionale Funktionen: Charakteristische Eigenschaften

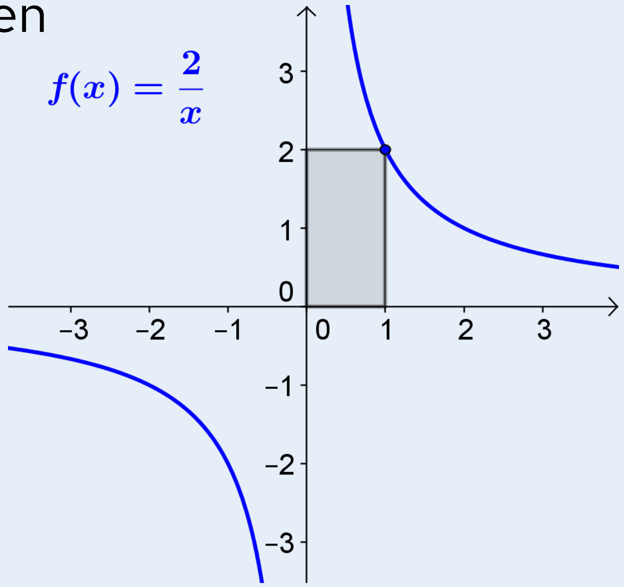
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Funktionsgleichung

Die Funktionsgleichung einer antiproportionalen Funktion hat die Form $y = \frac{a}{x}$.

Funktionsgraph

Der Graph einer antiproportionalen Funktion ist eine Hyperbel durch den Punkt $(1|a)$.



Funktionalgleichung

Wird das Argument ver-r-facht (verdoppelt, verdreifacht, halbiert, ...), dann wird der Funktionswert ver-$1/r$-facht (halbiert, gedrittelt, verdoppelt, ...).

$$\forall_{r\in\mathbb{R}}\ f(r\cdot x) = \frac{a}{(r\cdot x)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{a}{x}$$
$$= \frac{1}{r}\cdot f(x)$$

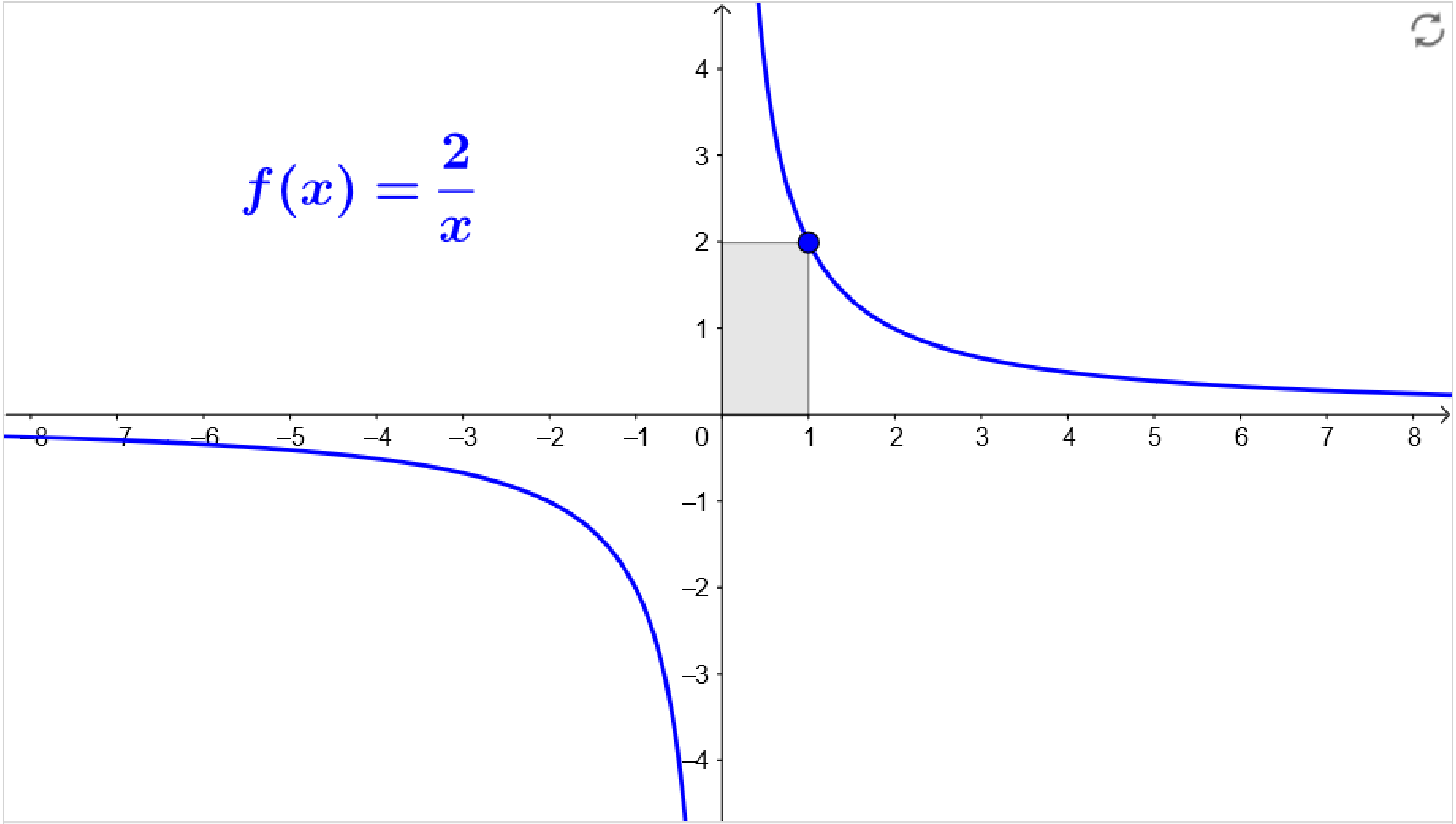
Produktgleichheit

Das Produkt aus Funktionswert $f(x)$ und zugehörigem Argument x ist für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ konstant gleich der Antiproportionalitätskonstanten a.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}}\ f(x)\cdot x = \frac{a}{x}\cdot x = a$$

RPTU

Anti- (bzw. umgekehrt) proportionale Funktion



$A_{Rechteck} = x \cdot f(x) = 1 \cdot 2 = 2$

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

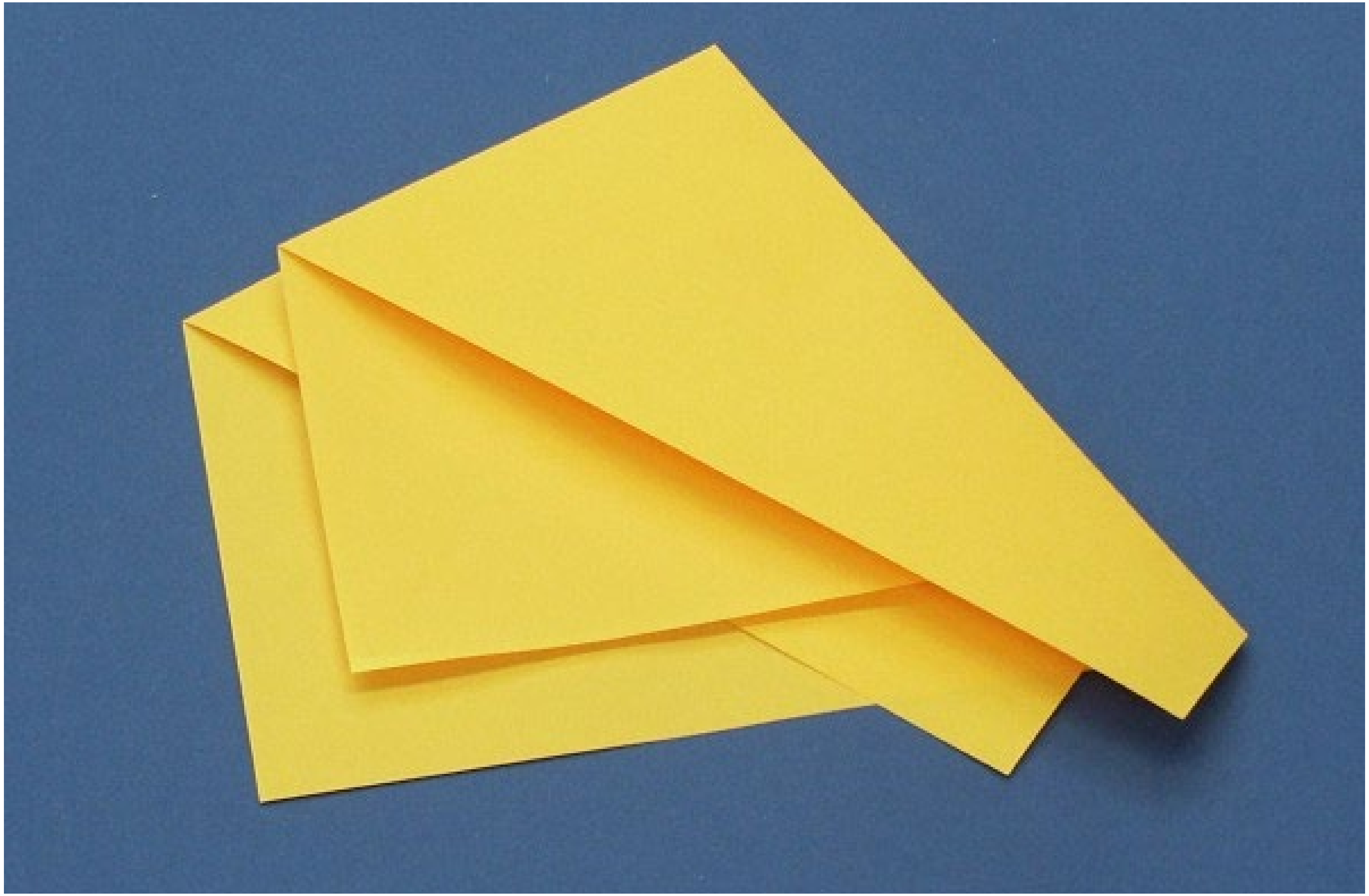
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

Papier falten



Papier falten

Problem

- Ein DIN A0 Blatt wird 20-mal gefaltet.
- Wie dick ist das gefaltete Papier?

Experiment

- Messen
  - 50 Blatt Papier sind 5,25 mm hoch.
  - Dicke eines Blatts: $d_0 = 0{,}105\text{ mm}$
- 1-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(1)} = d_0 \cdot 2 \boldsymbol{= d_0 \cdot 2^1}$
- 2-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(2)} = d(1) \cdot 2$
    $= d_0 \cdot 2 \cdot 2 \boldsymbol{= d_0 \cdot 2^2}$
- 3-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(3)} = d(2) \cdot 2$
    $= d_0 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
    $\boldsymbol{= d_0 \cdot 2^3}$
- n-mal falten:
  - $\boldsymbol{d(n) = d_0 \cdot 2^n}$

Vgl. Zellteilung!

Dicke des gefalteten Papiers

- $d(20) = d_0 \cdot 2^{20}$
  $= 0{,}105\text{ mm} \cdot 2^{20}$
  $= 110.100{,}48\text{ mm}$
  $\approx 110\text{ m}$

Erbschaft

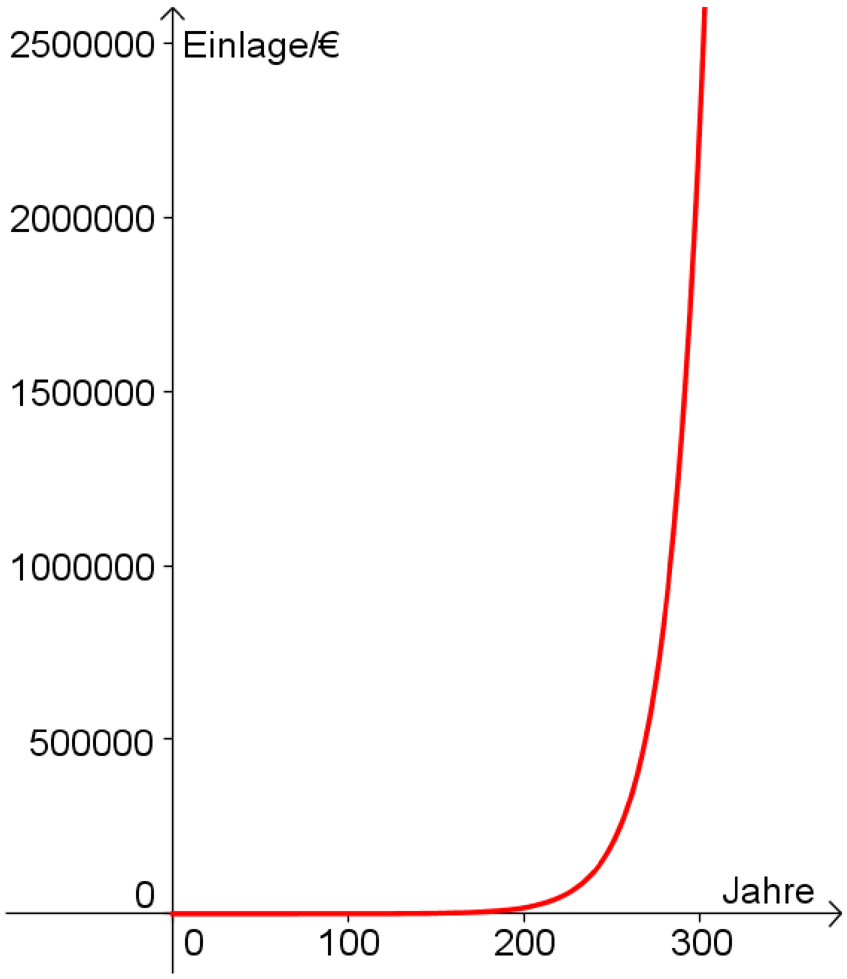
Netter Vorfahre

- Ein Mann legt 1 € festverzinslich zu einem jährlichen Zinssatz von 5 % für 300 Jahre an.
- Wie viel Geld erhält ein Erbe nach 300 Jahren?
- $1\,€ \cdot 1{,}05^{300} \approx 2.273.996{,}13\,€$

+50 +50 +50 +50 +50 +50

Jahr	0	50	100	150	200	250	300
Einlage	1,00 €	11,47 €	131,50 €	1.507,98 €	17.292,58 €	198.300,94 €	2.273.996,13 €

$\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$ $\cdot 1{,}05^{50}$



https://www.geogebra.org/m/dsdB4YuG

Zellsterben

Problem:

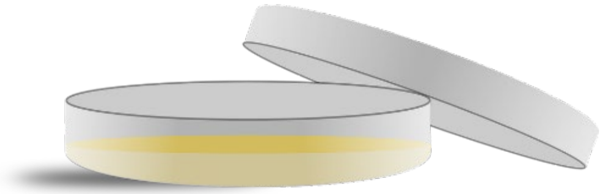
- In einer Schale befinden sich 80.000 Zellen. Es wirkt ein Zellgift, durch das (idealisiert) pro Zeiteinheit 15 % der Zellen sterben.
- Gesucht:
  Anzahl der Zellen in Abhängigkeit von der Zeit

Zeitpunkt $t_0 = 0$:

- $N_0 = N(t_0) = N(0) = 80.000$

Zeitpunkt $t_1 = 1$:

- $N(t_1) = N_0 \cdot 0{,}85$



Zeitpunkt $t_2 = 2$:

- $N(t_2) = N(t_1) \cdot 0{,}85$
  $= (N_0 \cdot 0{,}85) \cdot 0{,}85$
  $= N_0 \cdot 0{,}85^2$

Zeitpunkt $t_3 = 3$:

- $N(t_3) = N(t_2) \cdot 0{,}85$
  $= \left(N_0 \cdot 0{,}85^2\right) \cdot 0{,}85$
  $= N_0 \cdot 0{,}85^3$

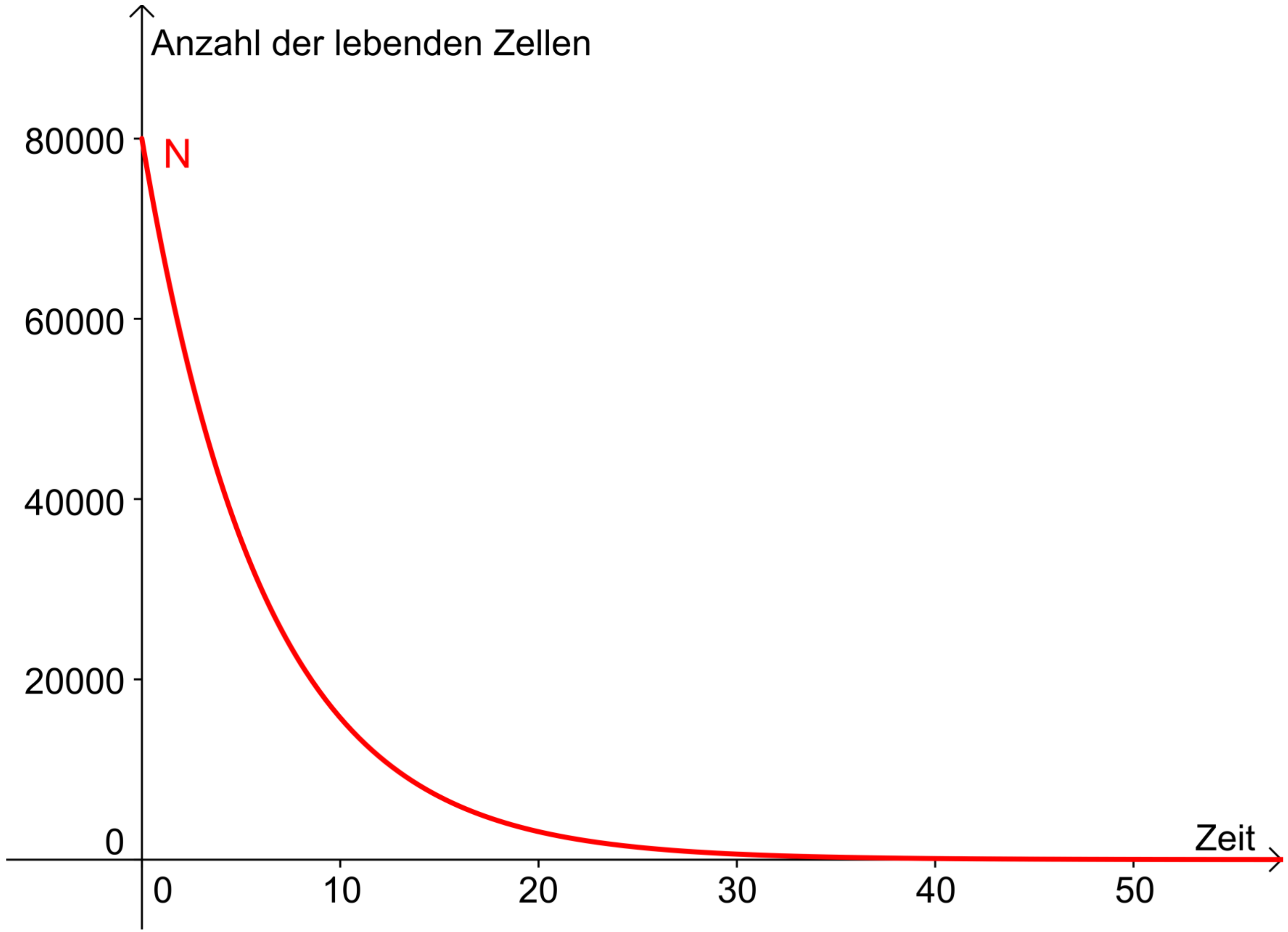
Zeitpunkt $t_n = n$:

- $N(t_n) = N_0 \cdot 0{,}85^n$

Allgemein

- $N(t) = N_0 \cdot 0{,}85^t$

Zellsterben



 https://www.geogebra.org/m/dsdB4YuG

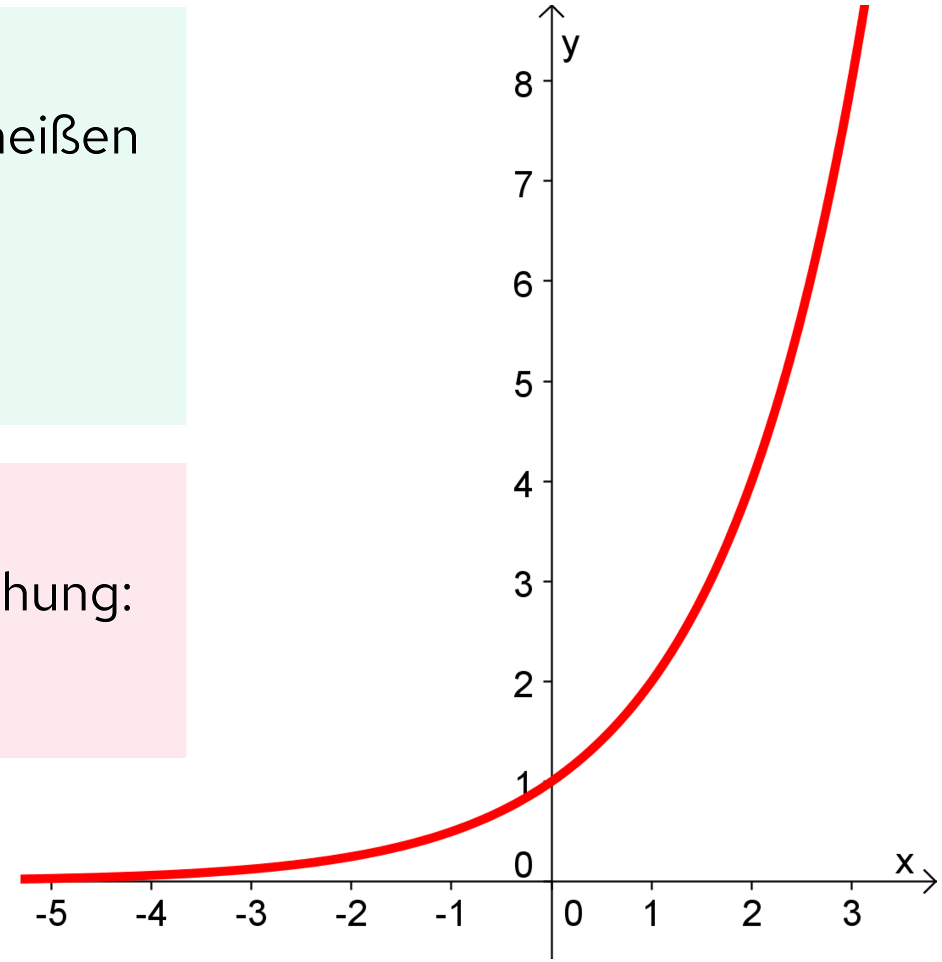
Exponentialfunktionen

Definition
Funktionen der Bauart $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ heißen **Exponentialfunktionen**.

Häufig werden Exponentialfunktionen zur Basis a auch als $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \exp_a(x) = a^x$ geschrieben.

Satz
Exponentialfunktionen genügen folgender Funktionalgleichung:

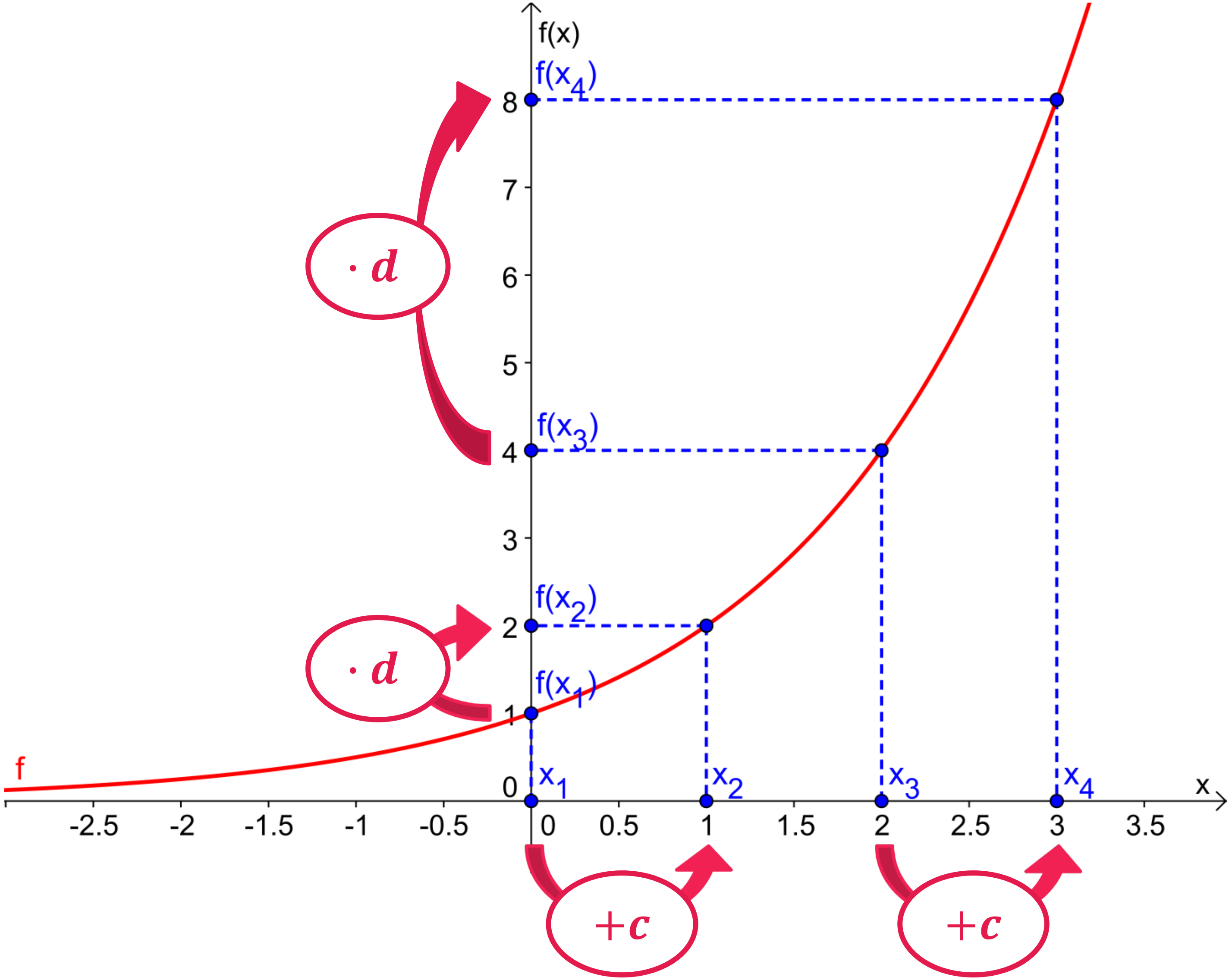
$$\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}\ f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$$



Beweisidee

$$f(x_1+x_2) = a^{x_1+x_2} \overset{\text{Potenzgesetze}}{\triangleq} a^{x_1}\cdot a^{x_2} = f(x_1)\cdot f(x_2)$$

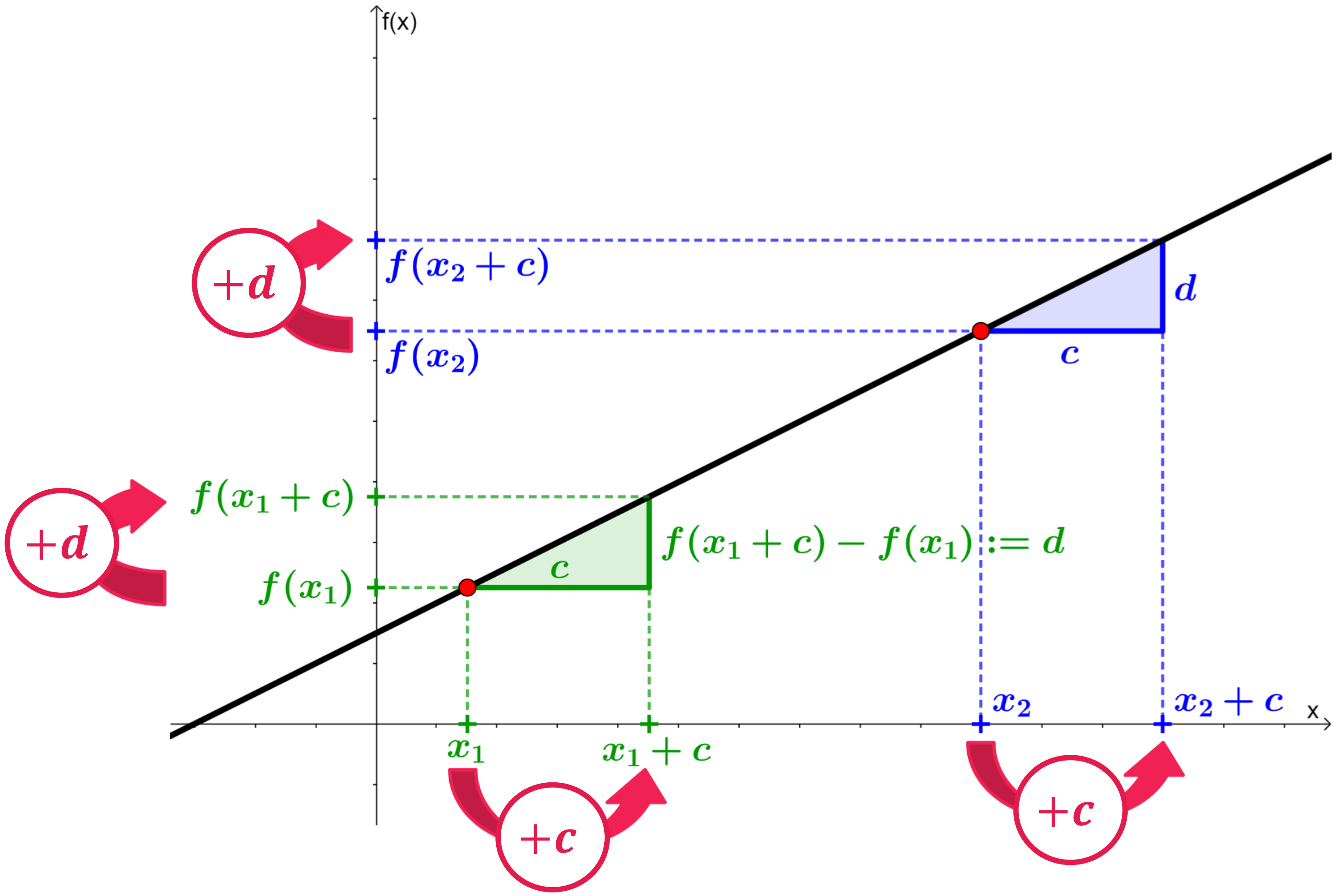
Exponentialfunktionen



$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}, x \mapsto f(x) = a^{x}$

$$
\begin{aligned}
f(x + c) \\
&= a^{x+c} \\
&= \underbrace{a^{x}}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^{c}}_{:=d} \\
&= f(x) \cdot d
\end{aligned}
$$

Lineare Funktionen



$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = a \cdot x + b$$

$$f(x+c)$$
$$= a \cdot (x+c) + b$$
$$= \underbrace{a \cdot x + b}_{=f(x)} + \underbrace{a \cdot c}_{:=d}$$
$$= f(x) + d$$

Roth, J. & Siller S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
https://www.geogebra.org/m/e7pwurmn

Exponentialfunktionen & lineare Funktionen
Charakteristische Eigenschaften

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Funktionsgleichung Exponentialfunktion
Die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion hat die Form $f(x) = a^x$.

Funktionsgleichung lineare Funktion
Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion hat die Form $f(x) = a \cdot x + b$.

Funktionalgleichung Exponentialfunktion
Bei Exponentialfunktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumsfaktor.

Wird also bei einer Exponentialfunktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Faktor $(\cdot\, d)$ zu.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) = a^{x+c} = \underbrace{a^x}_{=f(x)} \cdot \underbrace{a^c}_{:=d} = f(x)\cdot d$$

Funktionalgleichung lineare Funktion
Bei linearen Funktionen gehört zu gleichen additiven Zuwächsen im Argument immer der gleiche Wachstumssummand.

Wird also bei einer linearen Funktion das Argument um den gleichen Wert $(+c)$ vergrößert, dann nimmt der Funktionswert um den gleichen Summanden $(+d)$ zu.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x+c) = a\cdot(x+c)+b = \underbrace{a\cdot x+b}_{=f(x)} + \underbrace{a\cdot c}_{:=d} = f(x)+d$$

Präsenzübung: Änderungsverhalten

Betrachten Sie die

Exponentialfunktion
$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

und die

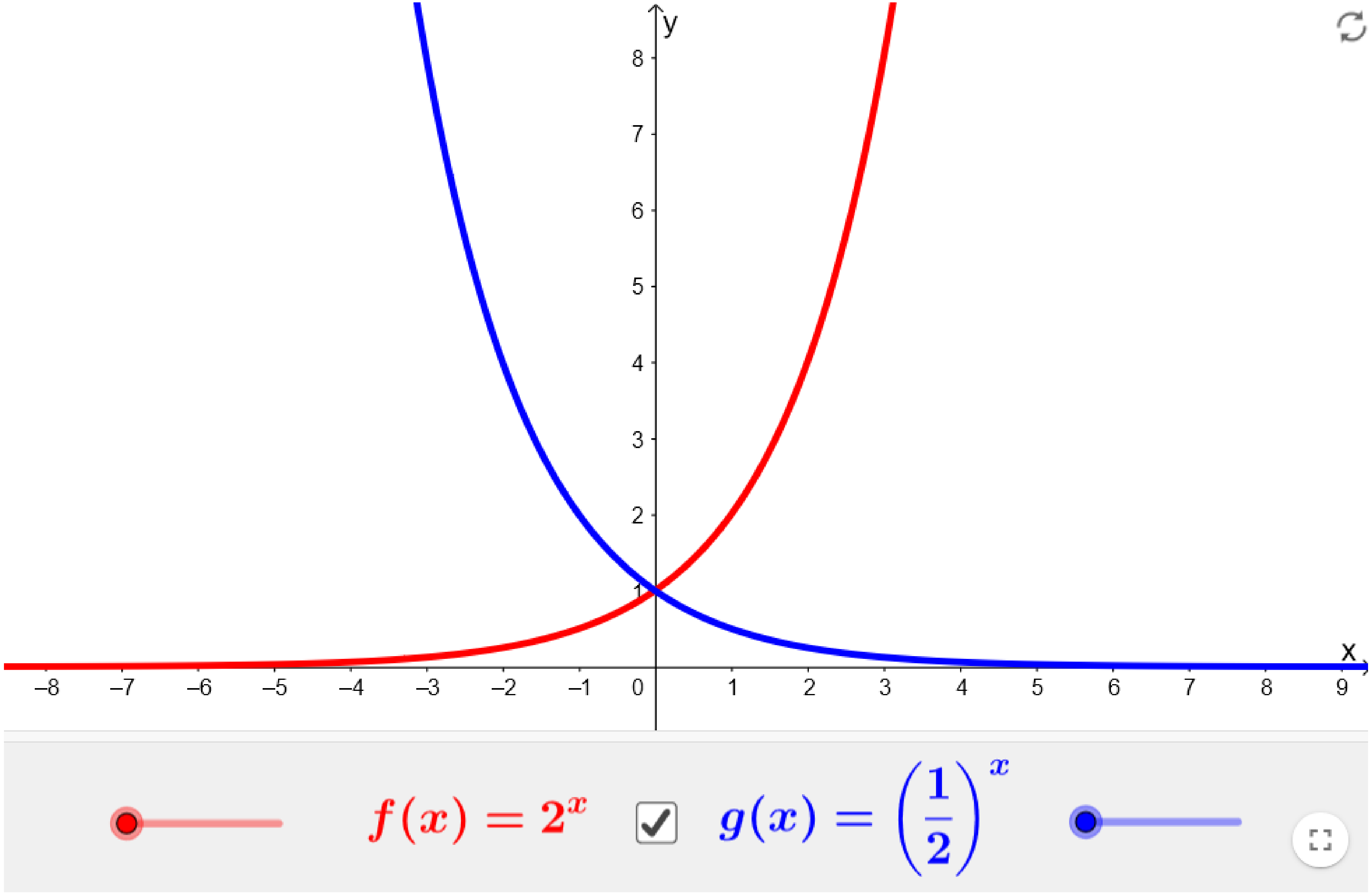
proportionale Funktion
$\boldsymbol{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$

unter dem Kovariationsaspekt.

Wie ändert sich jeweils der Funktionswert, wenn man

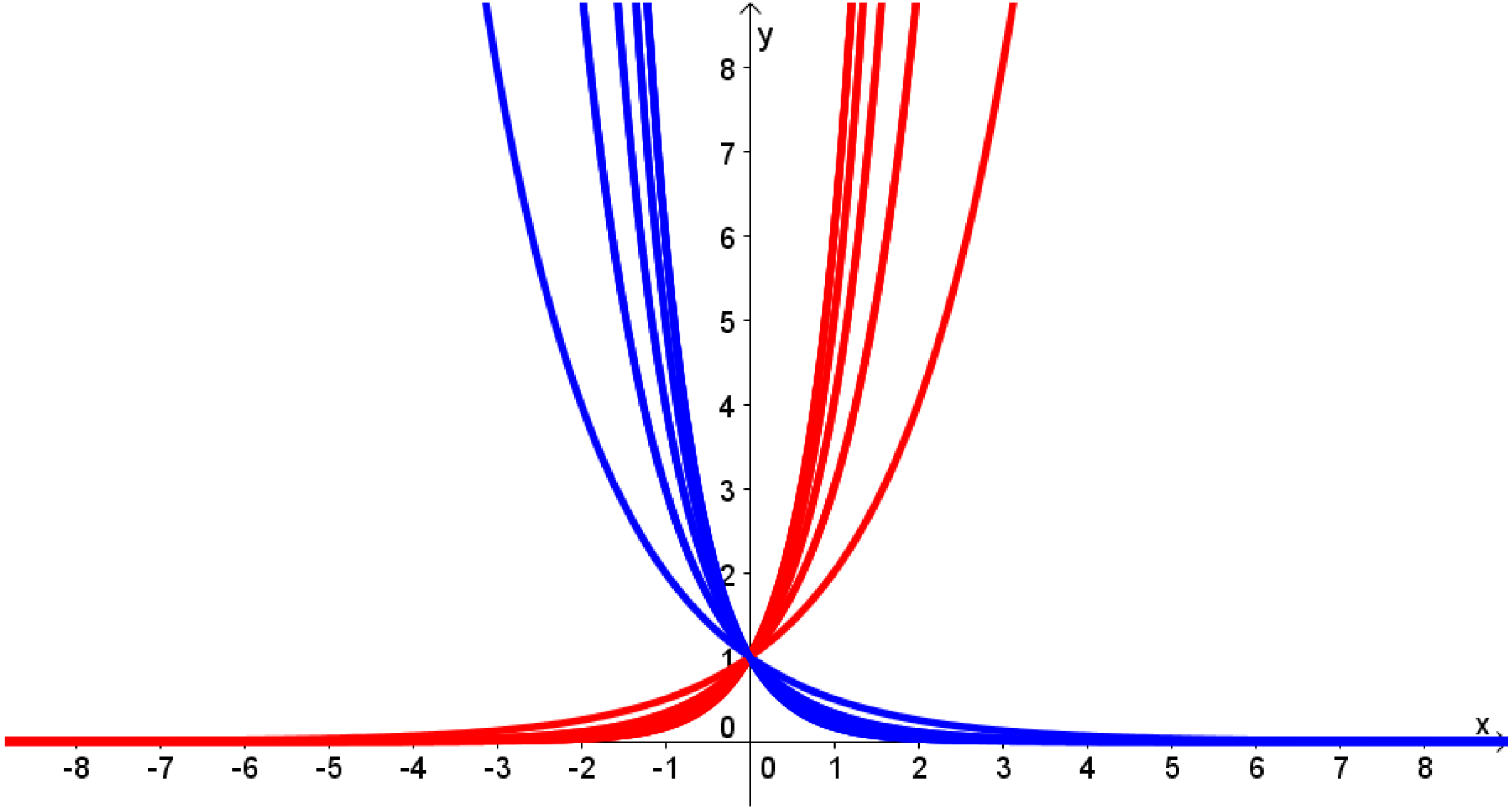
- x um 1 vergrößert,
- x um 2 verkleinert,
- x verdoppelt,
- x halbiert,
- x mit 3 multipliziert,
- x durch 3 dividiert,
- x quadriert?

Graphen von Exponentialfunktionen



 https://www.geogebra.org/m/X5DyaUSA

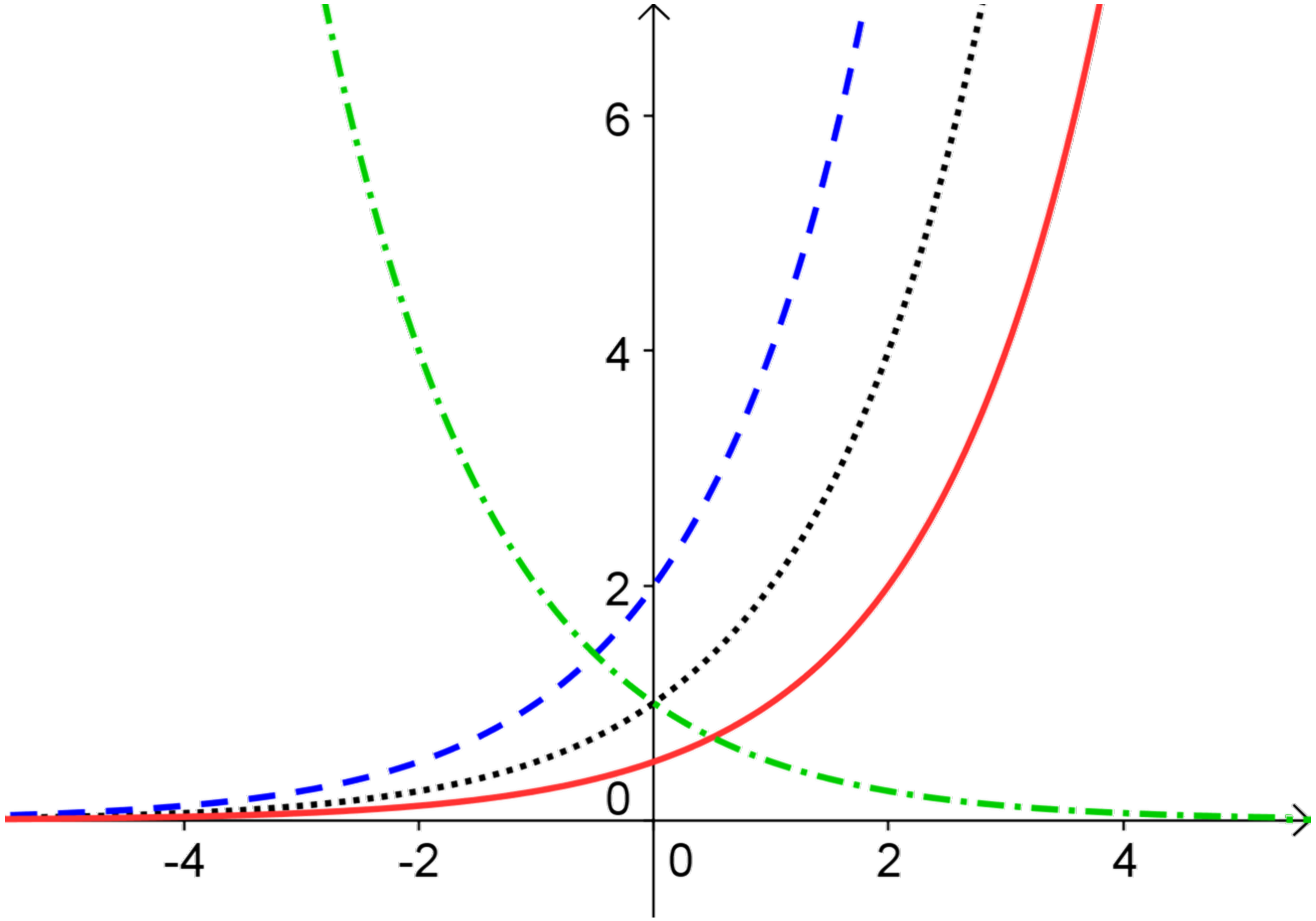
Graphen von Exponentialfunktionen



Die Graphen der Funktionen $x \mapsto a^x$ und $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ sind zueinander achsensymmerisch bzgl. der y-Achse.

 https://www.geogebra.org/m/X5DyaUSA

Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen



Es gilt: $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$$

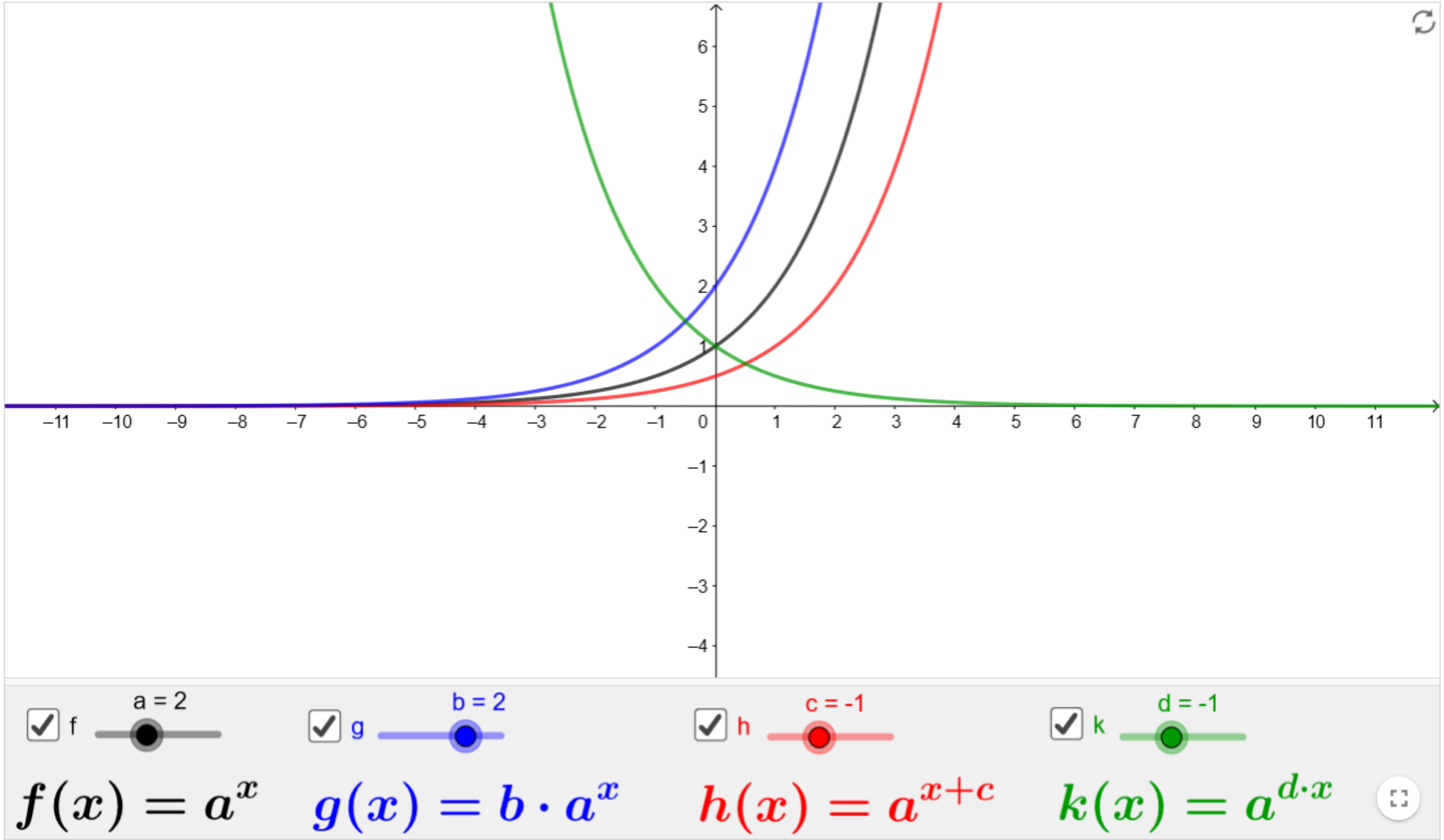
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$$

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$$

- Wie wirkt sich eine Veränderung der Parameter a, b, c und d auf die Graphen der jeweiligen Funktionen aus?
- Vergleichen Sie die Graphen der vier Funktionen für verschiedene Werte von b, c und d. Gibt es Werte, so dass jeweils zwei Funktionsgraphen übereinstimmen?

 https://www.geogebra.org/m/nvqzzuye

Präsenzübung



Es gilt:
$a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c, d \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$

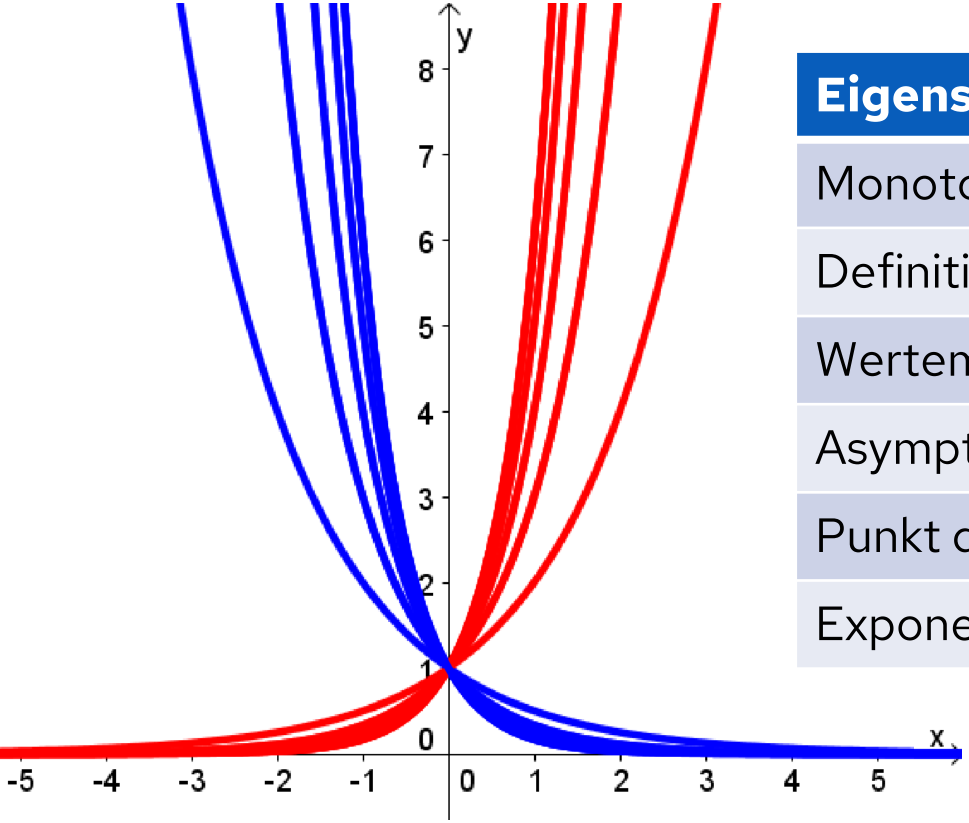
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b \cdot a^x$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{(x+c)}$

$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto a^{d \cdot x}$

 https://www.geogebra.org/m/nvqzzuye

Eigenschaften von $x \mapsto a^x$



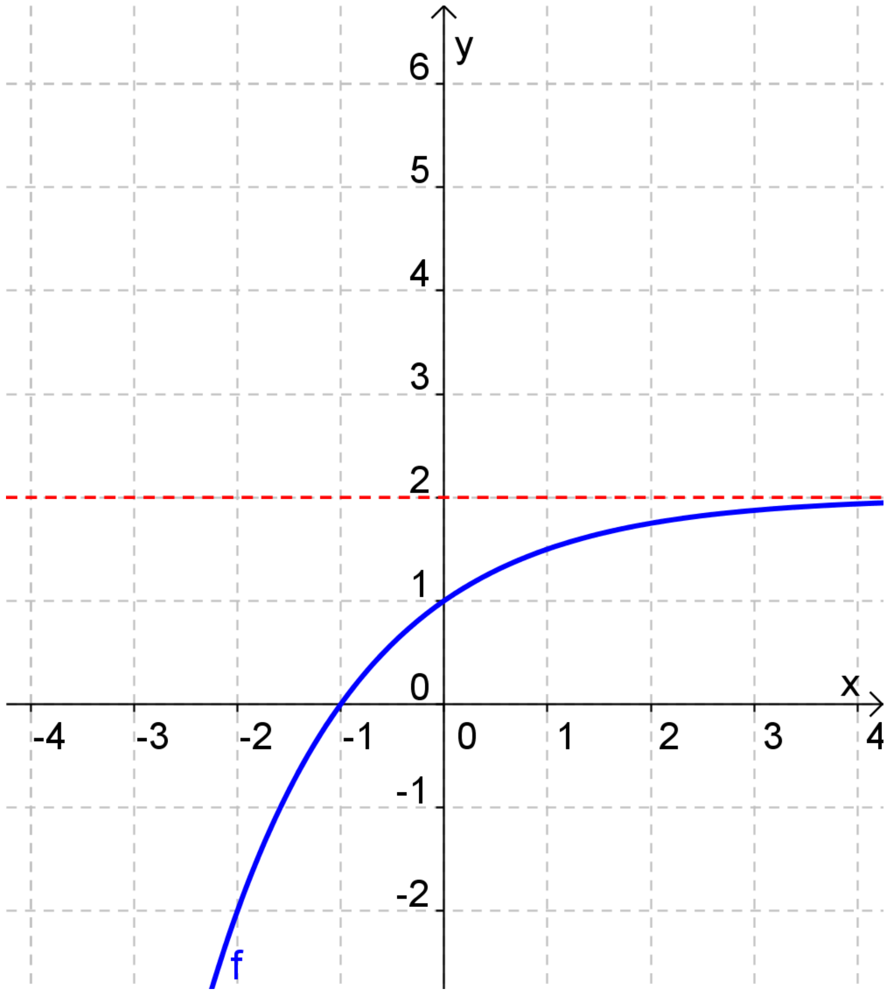
Eigenschaft	$a > 1$	$0 < a < 1$
Monotonie		
Definitionsmenge $\mathbb{D}$		
Wertemenge $\mathbb{W}$		
Asymptote		
Punkt des Graphen		
Exponentielle(s)		

Präsenzaufgabe: Prozentuale Zunahme/Abnahme ↔ Wachstumsfaktor

Ergänzen Sie die Tabelle.

prozentuale Zunahme / Abnahme pro Einheit	Wachstumsfaktor	Anfangsbestand	Funktionsterm
$-8\,\%$	$0{,}92$	6	$6 \cdot 0{,}92^x$
	$1{,}4$	40	
$120\,\%$			$6{,}3 \cdot S^x$
			$32 \cdot 0{,}58^x$

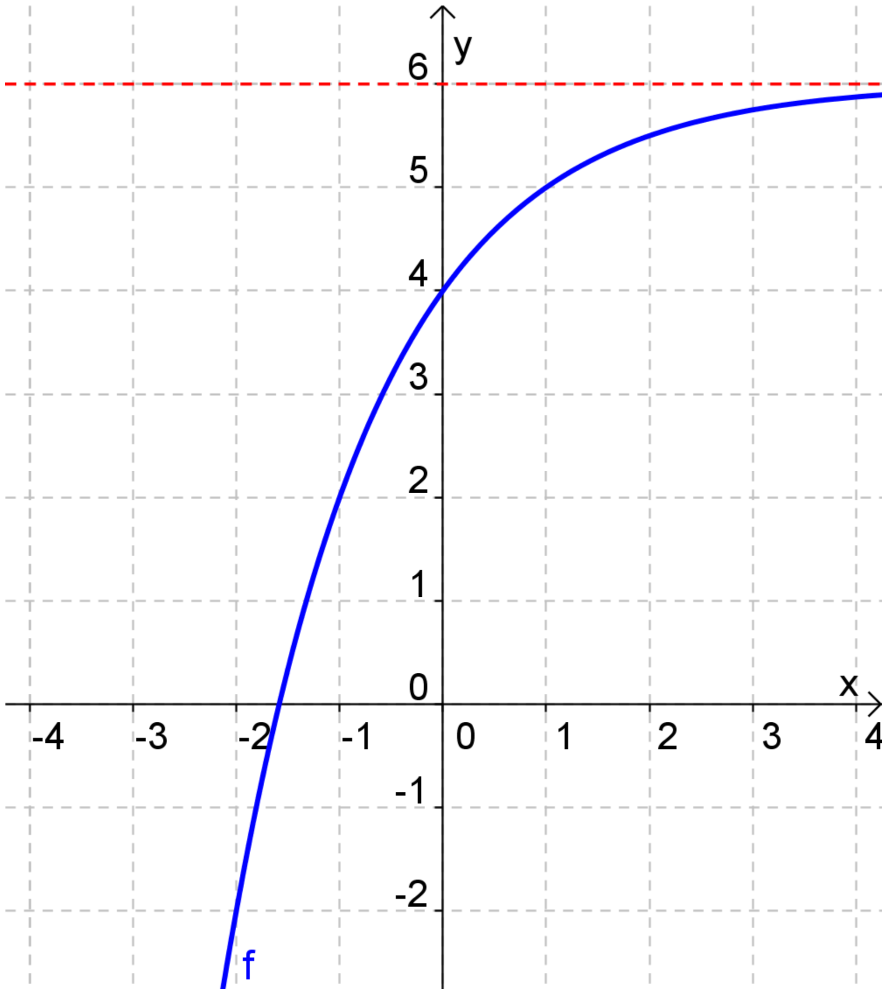
Präsenzaufgabe:
Parameter und Funktionsgraphen



Die abgebildeten Graphen gehören zu Funktionen folgenden Typs:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{b\cdot x+c}+d$$

Bestimmen Sie jeweils die Parameter a, b, c und d.



 https://www.geogebra.org/m/ecJJXVuN

Lineares und exponentielles Wachstum

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Baggersee

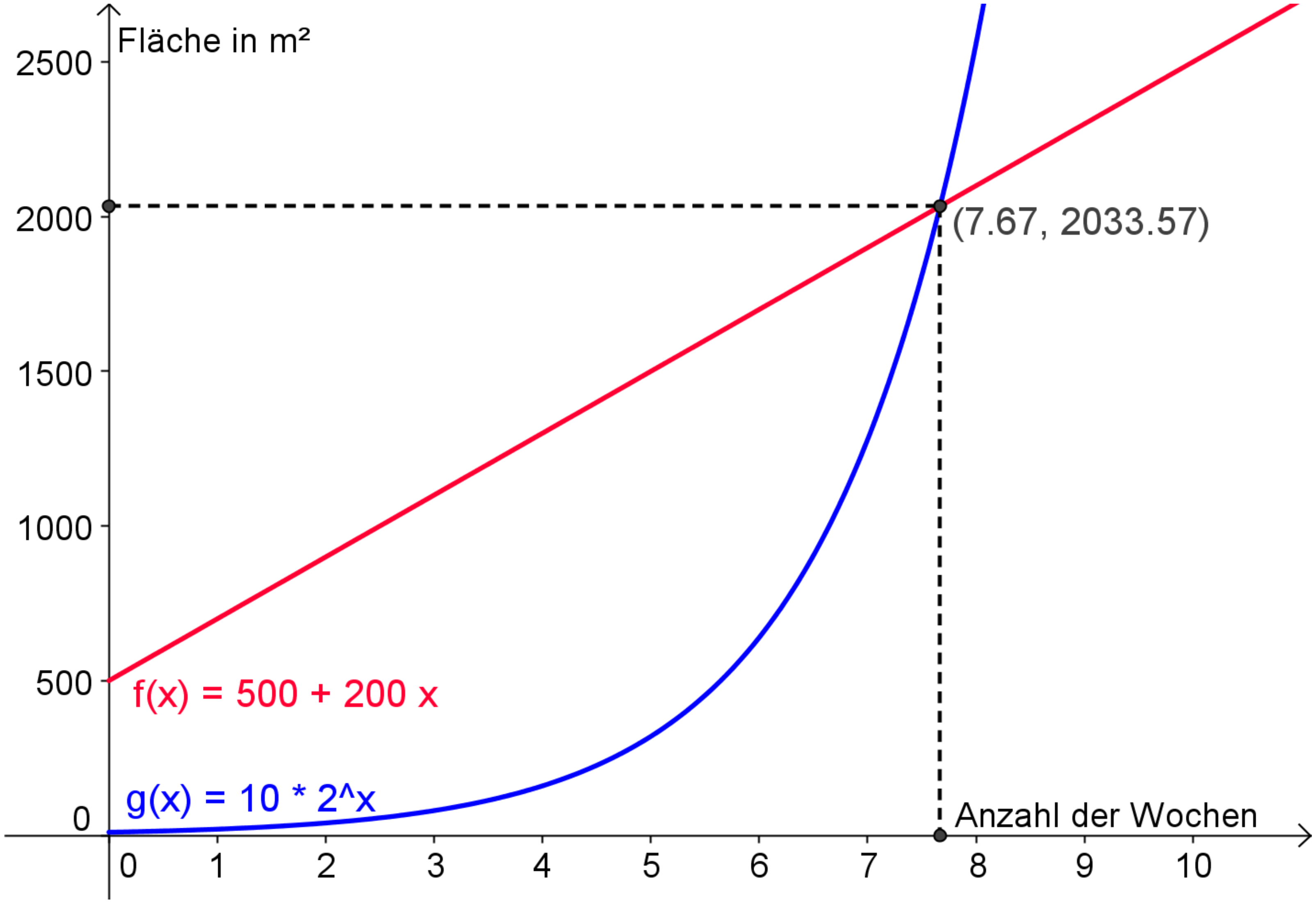
- Ein See mit einer Oberfläche von zunächst $500\ \mathrm{m}^2$ wird in einer Flussniederung ausgebaggert. Die Oberfläche vergrößert sich dadurch in jeder Woche um $200\ \mathrm{m}^2$.
- Der See wird von einer Seerosenart besiedelt, die zu Beginn der Baggerarbeiten $10\ \mathrm{m}^2$ der Oberfläche des Sees bedecken. Die Seerosen vermehren sich derart, dass sich die von ihnen bedeckte Fläche in jeder Woche verdoppelt.
- Nach wie vielen Wochen ist der ganze See mit Seerosen bedeckt?

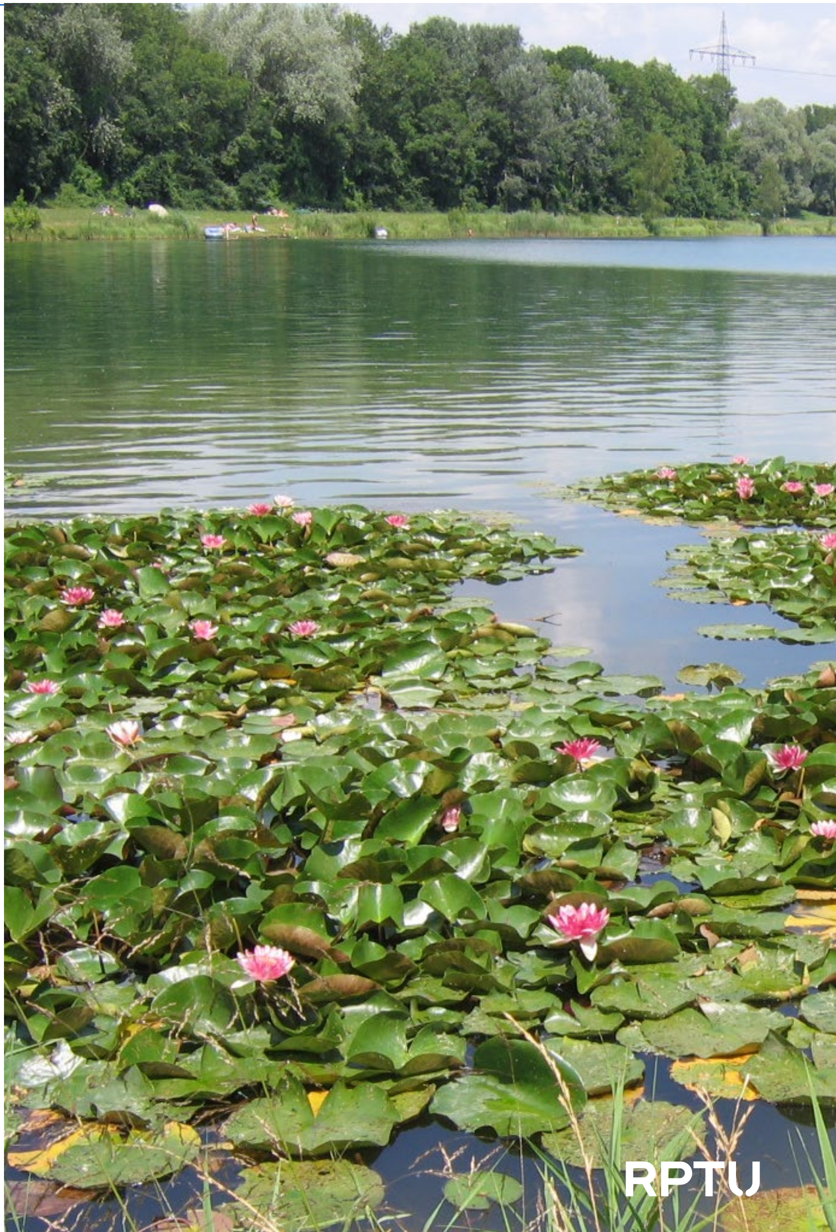
Lineares und exponentielles Wachstum

Anzahl der Wochen	Seefläche in m²
0	500
1	700
2	900
3	1100
4	1300
5	1500
6	1700
7	1900
8	2100
x	$500 + 200 \cdot x$

Anzahl der Wochen	Seerosen-fläche in m²
0	10
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320
6	640
7	1280
8	2560
x	$10 \cdot 2^x$

Lineares und exponentielles Wachstum





 https://www.geogebra.org/m/rdQTuA7s

Lineares und exponentielles Wachstum

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lineares Wachstum

- $f(x) = m \cdot x + t$
- $f(x+c) = m \cdot (x+c) + t$
  $= m \cdot x + t + m \cdot c$
  $= f(x) + m \cdot c$
  $= f(x) + d$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_f}\, f(x+c) - f(x) = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der absolute Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumssummand.

Exponentielles Wachstum

- $g(x) = \ b \cdot a^x$
- $g(x+c) = b \cdot a^{x+c}$
  $= b \cdot a^x \cdot a^c$
  $= g(x) \cdot a^c$
  $= g(x) \cdot d$
- $\forall_{x \in \mathbb{D}_g}\ \frac{g(x+c)}{g(x)} = const.$
- Bei gleichem Zuwachs im Argument ist der relative Zuwachs konstant.
- Zu gleichen Zuwächsen im Argument gehört immer der gleiche Wachstumsfaktor.

Logarithmusfunktion

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Exponentialfunktionen
also Funktionen der Bauart
$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$
mit $a > 0$ und $a \neq 1$ sind bijektiv und damit umkehrbar.

Umkehrfunktion

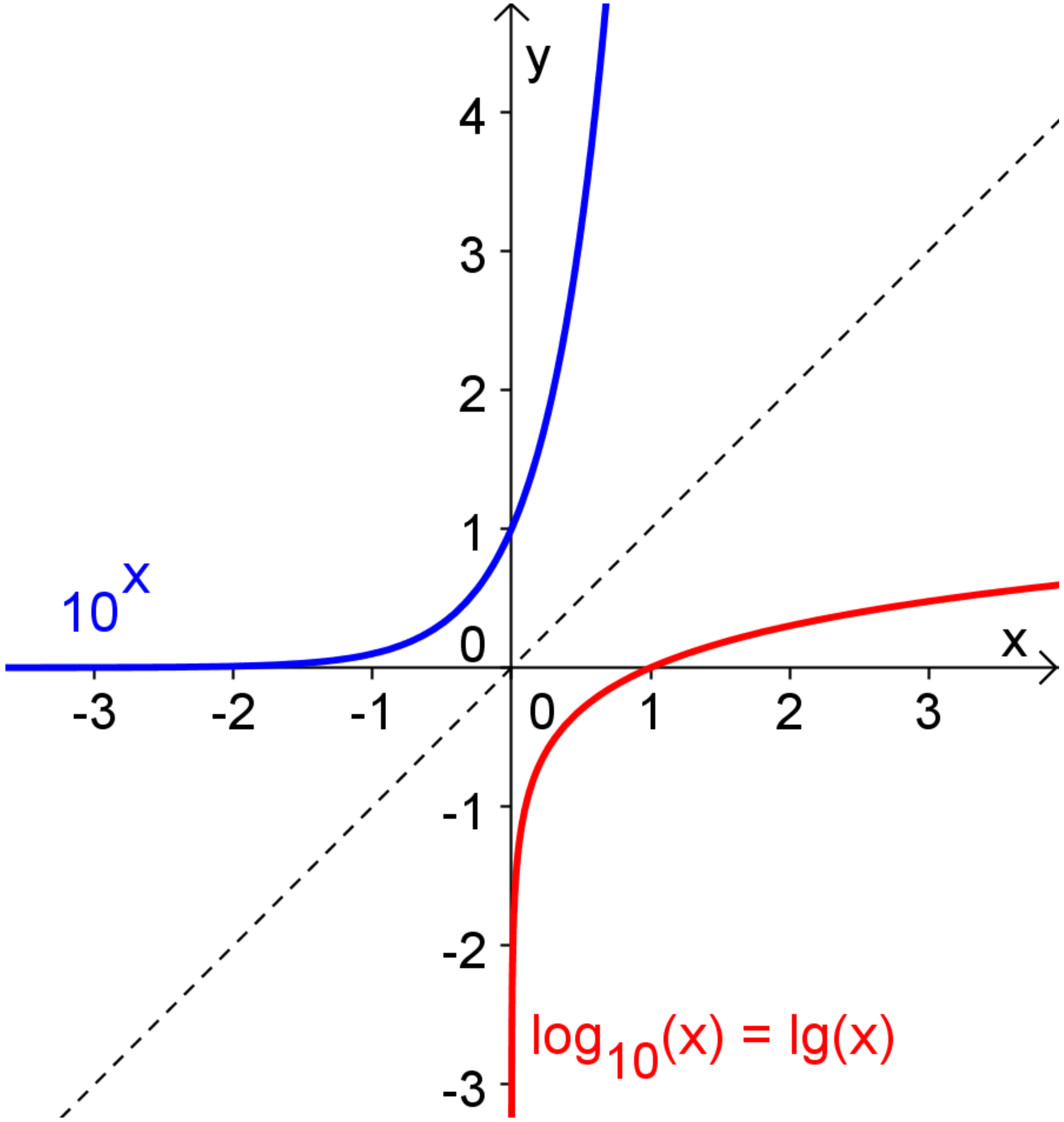
- Bei der Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion wird für eine Potenz $p = a^r$ danach gefragt, mit welcher Zahl r man a potenzieren muss, um p zu erhalten.

- Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion
  $$\exp_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \exp_a(x) = a^x$$
  ist die **Logarithmusfunktion**
  $$\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$
  zur Basis a.

- Da für eine Funktionen f und ihre Umkehrfunktionen f^{-1} gilt
  $$f \circ f^{-1}(x) = x$$
  und
  $$f^{-1} \circ f(x) = x$$
  folgt:
  $$a^{\log_a(x)} = x \text{ und } \log_a(a^x) = x$$

C. Weber (2013). Grundvorstellungen zum Logarithmus – Bausteine für einen verständlichen Unterricht. In Allmendinger et al. (Hrsg.). *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 79-98), Wiesbaden: Springer

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



https://www.geogebra.org/m/JueAn8Xq

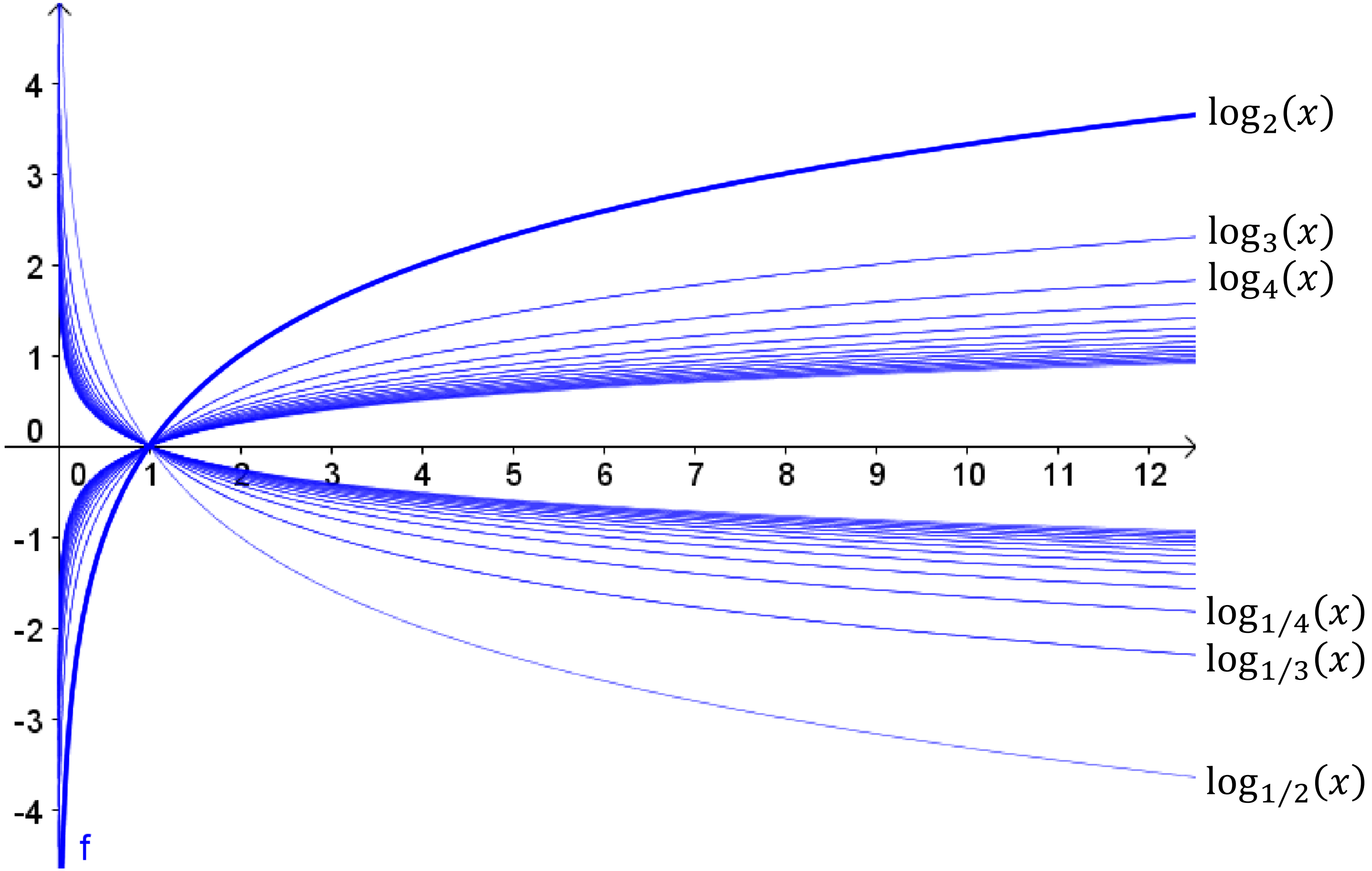
Exponentialfunktion $\exp_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- $\exp_a(0) = a^0 = 1$
- Der Punkt $(0|1)$ ist Element des Graphen jeder Exponentialfunktion $\exp_a$.
- Die x-Achse ist waagerechte Asymptote des Graphen von $\exp_a$.

Logarithmusfunktion $\log_a$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- $\log_a(1) = \log_a\left(a^0\right) = 0$
- Der Punkt $(1|0)$ ist Element des Graphen jeder Logarithmusfunktion $\log_a$.
- Die y-Achse ist senkrechte Asymptote des Graphen von $\log_a$.

Eigenschaften der Logarithmusfunktion



https://www.geogebra.org/m/FMMagDpG

Rechenregeln für Logarithmen

Satz

Für $a, r, s \in \mathbb{R}^+$ gilt:

- $\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$
- $\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$
- $\log_a(r^s) = s \cdot \log_a(r)$

Beweis

Unter Verwendung von $a^{\log_a(x)} = x$ und $\log_a(a^x) = x$ ergibt sich:

- $$\begin{aligned}\log_a(r \cdot s) &= \log_a\left(a^{\log_a(r)} \cdot a^{\log_a(s)}\right) \\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)+\log_a(s)}\right) \\ &= \log_a(r) + \log_a(s)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\log_a(r : s) &= \log_a\left(a^{\log_a(r)} : a^{\log_a(s)}\right) \\ &= \log_a\left(a^{\log_a(r)-\log_a(s)}\right) \\ &= \log_a(r) - \log_a(s)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\log_a(r^s) &= \log_a\left(\left(a^{\log_a(r)}\right)^s\right) \\ &= \log_a\left(a^{s \cdot \log_a(r)}\right) = s \cdot \log_a(r)\end{aligned}$$

■

Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Satz

Die Logarithmusfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a(x)$$

zur Basis a mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist

- streng monoton steigend für $a > 1$,
- streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

Beweis

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \wedge x_1 < x_2 \quad (*)$
- $\log_a(x_2) - \log_a(x_1)$

$$= \log_a \underbrace{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\substack{>1 \\ \text{wegen } (*)}} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 1 \\ < 0 & \text{für } 0 < a < 1 \end{cases}$$

■

Rechenschieber

Der Vorläufer des Taschenrechners!

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

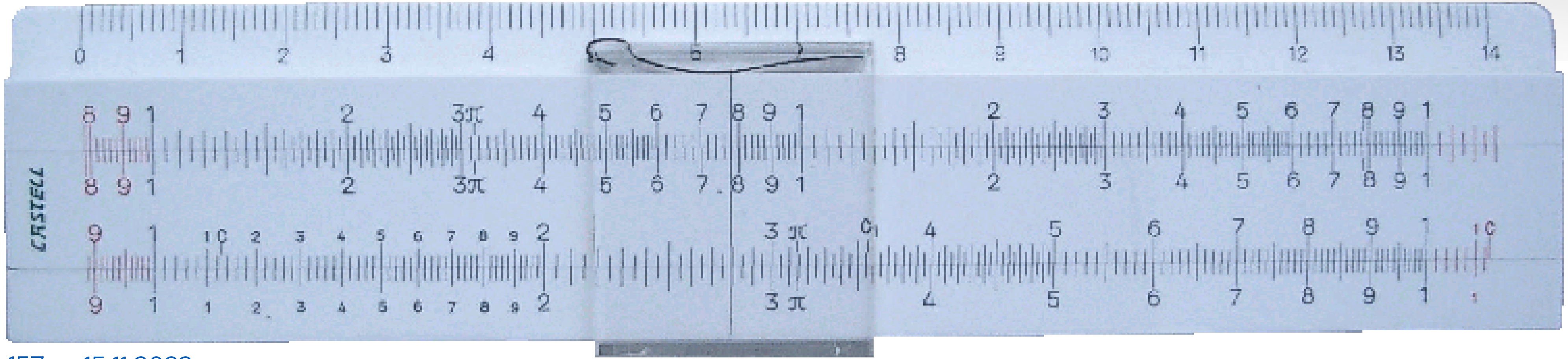
Die Regeln

$$\log_a(r \cdot s) = \log_a(r) + \log_a(s)$$

und

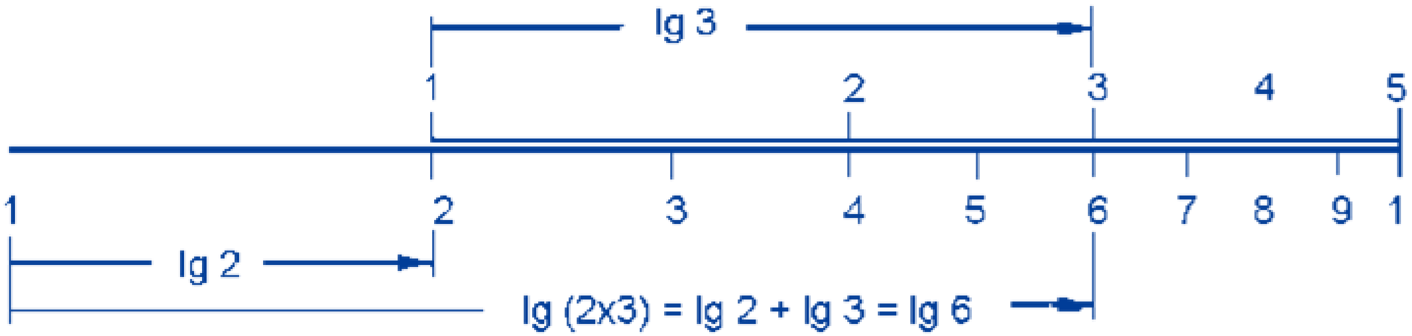
$$\log_a(r : s) = \log_a(r) - \log_a(s)$$

spielten beim Rechenschieber eine wichtige Rolle, weil man mit ihrer Hilfe die Multiplikation auf die Addition und die Division auf die Subtraktion zurückführen kann.



Rechenschieber: Beispiele

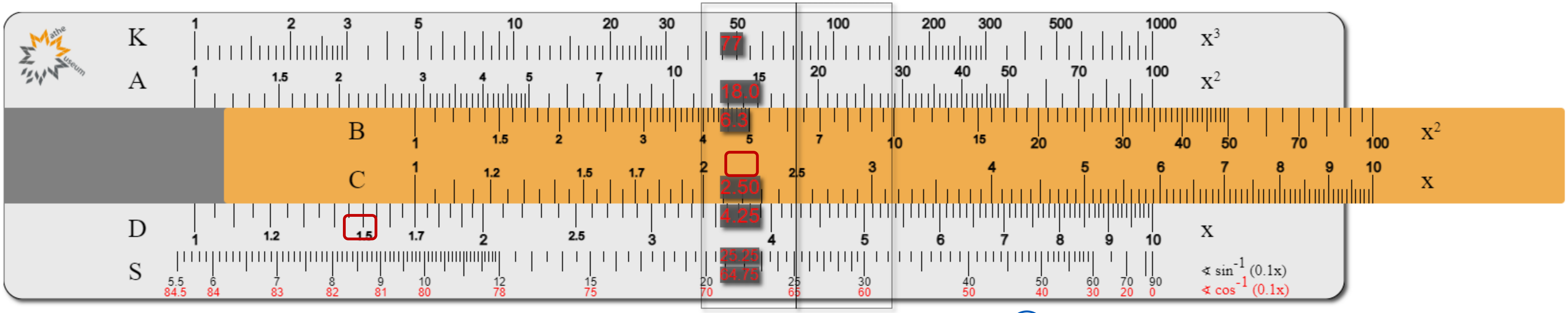
- $2 \cdot 3 = ?$



$$\log_{10}(2 \cdot 3) = \log_{10}(2) + \log_{10}(3) = \log_{10}(6)$$

- $1{,}7 \cdot 2{,}5 = ?$

$$\log_{10}(1{,}7 \cdot 2{,}5) = \log_{10}(1{,}7) + \log_{10}(2{,}5) = \log_{10}(4{,}25)$$



Rechenregel für Logarithmen

Satz („Taschenrechnergleichung“)

Für $a, b, r \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 0$ gilt:

$$\log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)}$$

Beweis

Aus $r = a^{\log_a(r)}$ folgt:

$$\log_b(r) = \log_b\left(a^{\log_a(r)}\right)$$
$$= \log_a(r) \cdot \log_b(a)$$

$$\Rightarrow \log_a(r) = \frac{\log_b(r)}{\log_b(a)} \qquad \blacksquare$$

Anmerkungen

- Mit diesem Satz kann der Logarithmus von r zur Basis a als Quotient zweier Logarithmen zu einer beliebigen Basis ausgedrückt werden.
- Taschenrechner beherrschten früher nur $\lg(x) \coloneqq \log_{10}(x)$, den Logarithmus zur Basis 10, und $\ln(x) \coloneqq \log_e(x)$, den Logarithmus zur Basis e, der auch natürlicher Logarithmus genannt wird.

Präsenzaufgabe

Zinseszins

- Ein Kapital K_0 wird zu einem Zinssatz $p\%$ pro Jahr angelegt. Die anfallenden Zinsen werden am Ende des Jahres dem Sparkonto gutgeschrieben.
- Wie viele Jahre muss man sparen, bis sich das Kapital ver-m-facht hat?

Mögliche Lösung:

$$K(n) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad \wedge \quad K(n) = m \cdot K_0$$

$$m \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| : K_0$$

$$m = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \Big| \ln \quad \text{(zulässig, da ln streng monoton steigend)}$$

$$\ln(m) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \Big| : \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

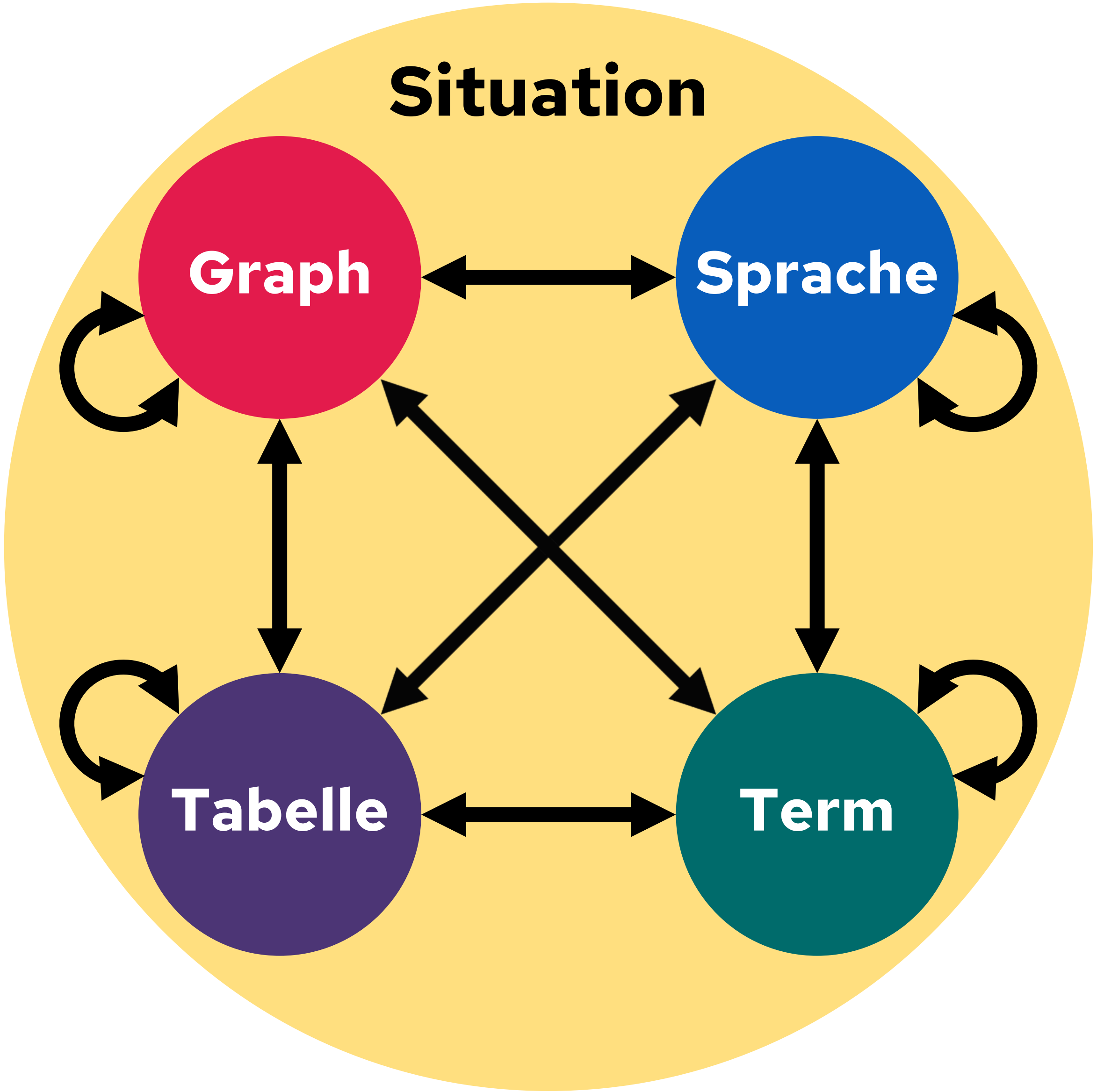
$$\Rightarrow n = \frac{\ln(m)}{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}$$

Präsenzaufgabe: Bevölkerungswachstum

- Im Jahre 1798 veröffentlichte der englische Philosoph Thomas R. Malthus sein „Essay of the Principles of Population".
- Er vermutete, dass die Nahrungsmittelerzeugung dem rasanten Bevölkerungswachstum im Zuge der industriellen Revolution nicht würde folgen können, und prognostizierte permanente Hungersnöte.
- Zur Begründung seiner Thesen entwickelte er einfache Modelle für das Wachstum von Populationen: Er nahm an, die Bevölkerung wachse exponentiell, die zur Verfügung stehenden Nahrungsmittel jedoch nur linear.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben unter der unten angegebenen URL.

 https://juergen-roth.de/dynama/AKGeoGebra/lernzirkel_funktionen/5a-f.html

Der Funktionsbegriff im MU



Ziele

- Den Funktionsbegriff erfassen.
- Wichtige Funktionstypen & ihre Eigenschaften kennen lernen.
- Funktionen zum Erkennen, Beschreiben oder Herstellen von Zusammenhängen nutzen.

Malle, G. (2000). Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema. *Mathematik lehren, 103*, S. 4-7

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kapitel 3: Funktionen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

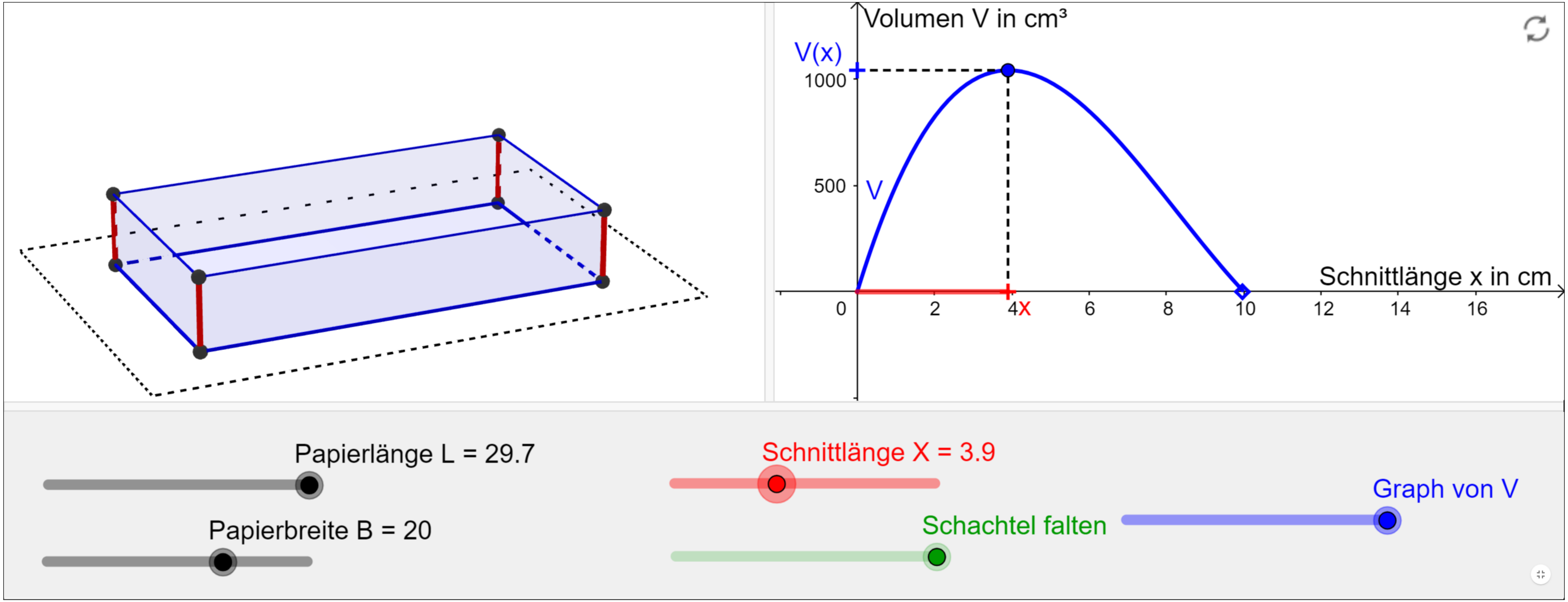
juergen-roth.de/lehre/didaktik-der-algebra/

RPTU

GeoGebra-Buch „Funktionen“ https://roth.tel/funktionen

Extremwertprobleme:
Oben offene Schachtel

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



https://www.geogebra.org/m/bvyn6y8x

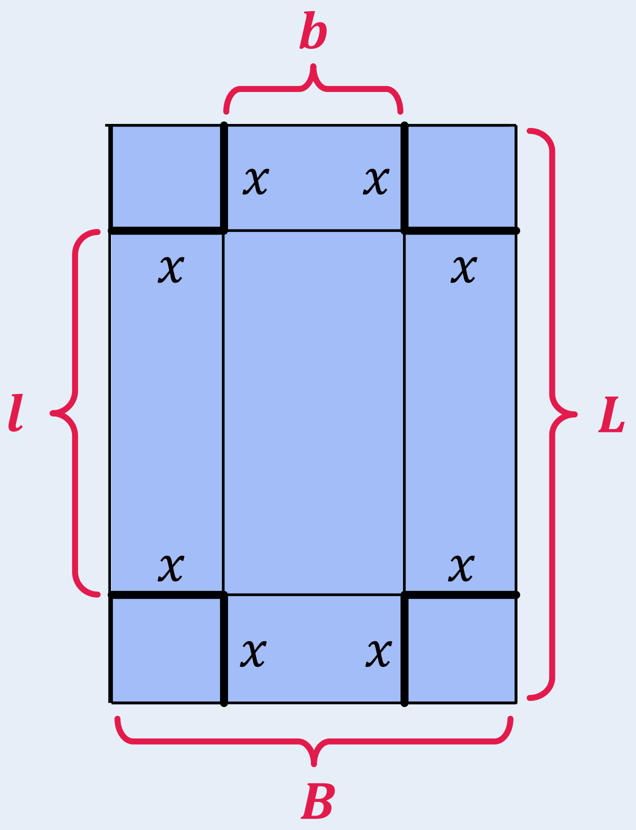
Extremwertprobleme:
Oben offene Schachtel

- Das Volumen V eines Quaders berechnet sich aus dem Produkt aus Länge l, Breite b und Höhe h. Es gilt offensichtlich:

$$l = L - 2x$$
$$b = B - 2x$$
$$h = x$$

- Damit ergibt sich: $$\begin{aligned} V &= l \cdot b \cdot h \\ &= (L - 2x) \cdot (B - 2x) \cdot x \\ &= LBx - 2Lx^2 - 2Bx^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 2(L + B)x^2 + LBx \end{aligned}$$

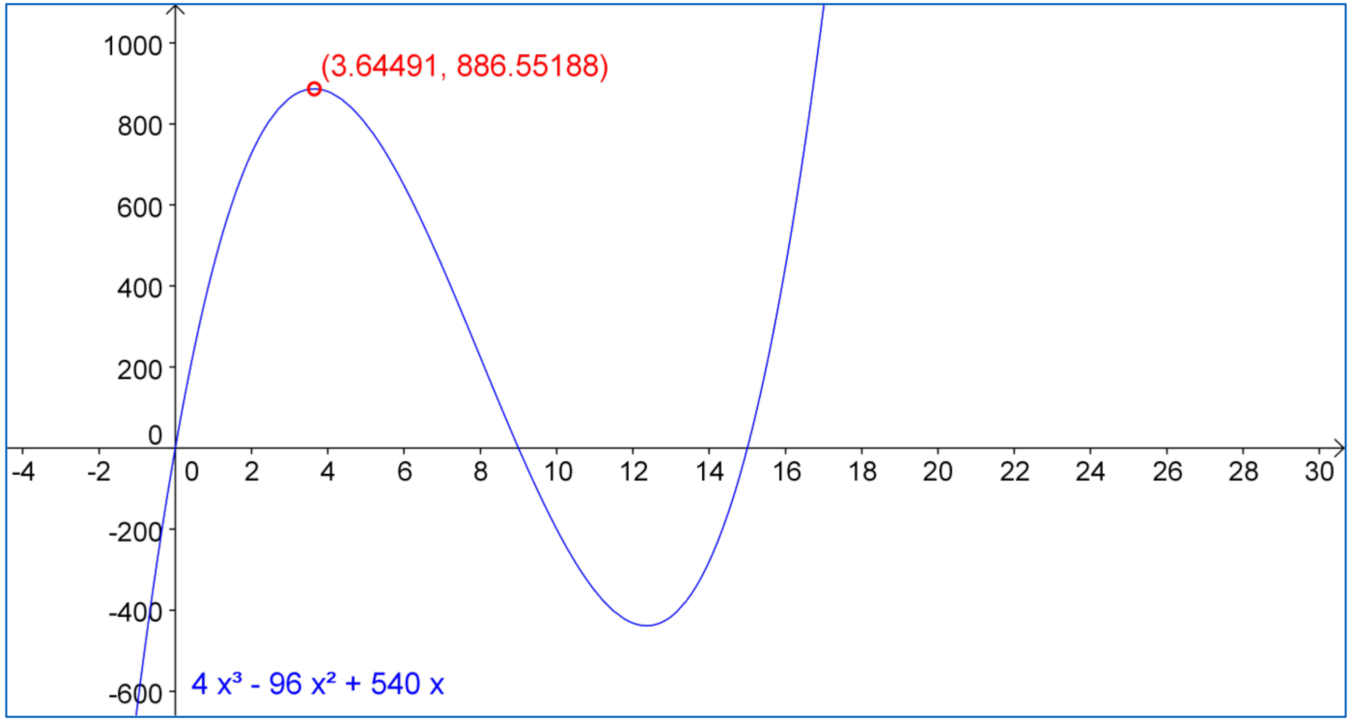
- Mit $L = 30$ cm und $B = 18$ cm folgt: $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$

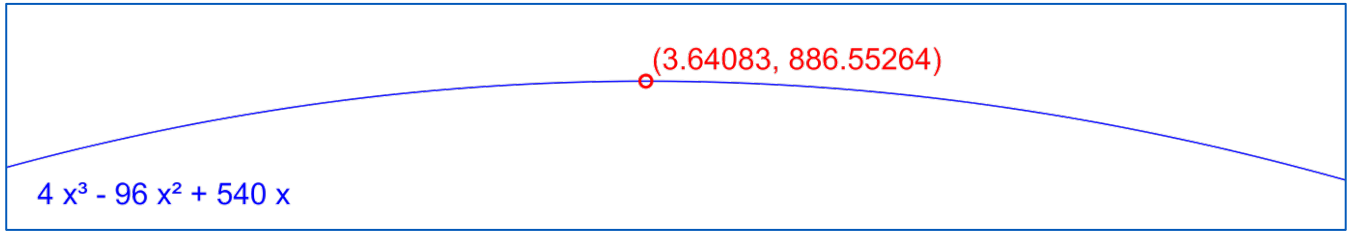


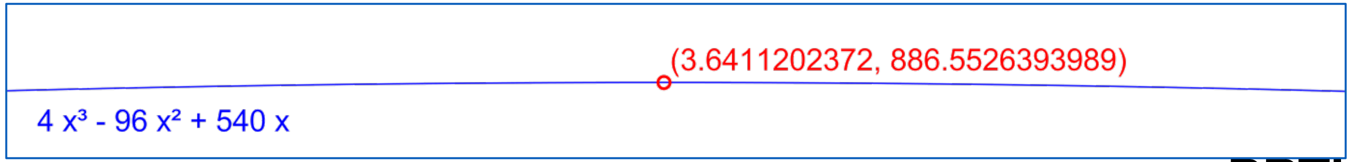
Extremwertprobleme:
Oben offene Schachtel

- **Graphische Lösung**
  mit Hilfe des Spur-Modus
  und des Zoom-Modus

- V_{max}
  $\approx V(3{,}6411\text{ cm})$
  $\approx 886{,}5526\text{ cm}^3$







 https://www.geogebra.org/m/yKvZUJE9

Extremwertprobleme:
Oben offene Schachtel

- **Numerische Lösung**
  mit Hilfe von Excel

- V_{max}
  $\approx V(3{,}6411 \text{ cm})$
  $\approx 886{,}5526 \text{ cm}^3$

Volumen der Schachtel in Abhängigkeit von der Tiefe x des Ausschnitts:

Papierlänge L:	Papierbreite B:
30	18

x	V	x	V	x	V
0	0,0000000	3,0	864,0000000	3,60	886,4640000
1	448,0000000	3,1	870,6040000	3,61	886,5019240
2	728,0000000	3,2	876,0320000	3,62	886,5293120
3	864,0000000	3,3	880,3080000	3,63	886,5461880
4	880,0000000	3,4	883,4560000	3,64	886,5525760
5	800,0000000	3,5	885,5000000	3,65	886,5485000
6	648,0000000	3,6	886,4640000	3,66	886,5339840
7	448,0000000	3,7	886,3720000	3,67	886,5090520
8	224,0000000	3,8	885,2480000	3,68	886,4737280
9	0,0000000	3,9	883,1160000	3,69	886,4280360

x	V	x	V	x	V
3,640	886,5525760	3,6410	886,5526389	3,64110	886,5526394
3,641	886,5526389	3,6411	886,5526394	3,64111	886,5526394
3,642	886,5525972	3,6412	886,5526389	3,64112	886,5526394
3,643	886,5524508	3,6413	886,5526373	3,64113	886,5526394
3,644	886,5521999	3,6414	886,5526347	3,64114	886,5526393
3,645	886,5518445	3,6415	886,5526311	3,64115	886,5526393
3,646	886,5513845	3,6416	886,5526264	3,64116	886,5526392
3,647	886,5508201	3,6417	886,5526207	3,64117	886,5526392
3,648	886,5501512	3,6418	886,5526139	3,64118	886,5526391
3,649	886,5493778	3,6419	886,5526060	3,64119	886,5526390

Extremwertprobleme

- Die numerische und die graphische Methode sind (abgesehen von Standardfunktionen wie etwa quadratische Funktionen) die einzigen Methoden, die Schülern der Mittelstufe zur Verfügung stehen, um Extremwerte zu bestimmen.
- Diese Methoden sind für alle praktischen Zwecke ausreichend genau!
- Diese und alle anderen Näherungsverfahren sind auch bei sehr komplizierten Funktionen anwendbar und deshalb in aller Regel die Methoden der Wahl für Problemlösungen in der Wirtschaft und in der Technik.

Kontakt

Prof. Dr. Jürgen Roth

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

j.roth@rptu.de

juergen-roth.de
dms.nuw.rptu.de

RPTU