

Proseminar Analysis 2

(zusammengestellt von Günther Hörmann)

Sommersemester 2006

Zu §20: Implizite Funktionen und Umkehrsatz – Fortsetzung

140 Es sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) := xz + \sin(xy) + \cos(xz) - 1$ mit Nullstellenmenge $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$. Welche Variablen können in einer Umgebung von $(0, 1, 1)$ jeweils innerhalb N als Funktion der beiden anderen ausgedrückt werden? Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der sich ergebenden Funktionen.

141 Es sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y + \sin(xz) + \log(1+z) - 2 \\ \sin(x^2 y) + y^2 + z^5 - 4 \end{pmatrix}.$$

Welche zwei Variablen lassen sich aus dem Gleichungssystem $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(0, 2, 0)$ durch die jeweils dritte ausdrücken? Berechnen Sie die Differentiale der sich dabei ergebenden Funktionen an der $(0, 2, 0)$ entsprechenden Stelle.

142 Interpretieren Sie die Abbildung $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, als Abbildung $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, indem Sie $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ersetzen. Berechnen Sie das Differential von g und untersuchen Sie, auf welcher Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^2$ die Abbildung g ein lokaler Diffeomorphismus ist. Ist g ein Diffeomorphismus dieser Teilmenge W mit ihrer Bildmenge $g(W)$?

143 (*Kugelkoordinaten im \mathbb{R}^3* [vgl. Aufgabe **125**(b)])
Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r, \varphi, \theta) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus?

(b) Nun sei $U :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\subseteq \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Bildmenge $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, indem Sie für einen Punkt $(x, y, z) = f(r, \varphi, \theta)$ die Größen r , φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z -Achse interpretieren (Skizze!).

(c) Wir setzen $g := f|_U: U \rightarrow V$. Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.

Zusatzfrage: Ist g ein Diffeomorphismus?