Proseminar Analysis 2

(zusammengestellt von Günther Hörmann)

Sommersemester 2006

Fortsetzung zu §24: Vektorfelder, 1-Formen und Kurvenintegrale

$\boxed{\textbf{158}}$ Es sei $\omega = \sum_{j=1}^n v_j \, dx_j$ eine stetige 1-Form auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $v := (v_1, \ldots, v_n)$ das zugehörige Vektorfeld und $\gamma \colon [a,b] \to U$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg in U. Zeigen Sie, dass die folgende *Abschätzung für Kurvenintegrale* gilt:

$$|\int\limits_\gamma \omega \,| = |\int\limits_\gamma \langle v | dx \rangle \,| \leq L(\gamma) \, \|v\|_{\gamma,\infty},$$

wobei $L(\gamma)$ die Weglänge von γ bezeichnet und $\|v\|_{\gamma,\infty} = \sup\{\|v(\gamma(t))\| : t \in [a,b]\}$ das Maximum der euklidischen Norm von v entlang γ.

$\boxed{\textbf{159}}$ Es sei $U := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $v \colon U \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $v(x) := -\dfrac{x}{\|x\|^3}$ mit zugeordneter 1-Form $\omega := \langle v | dx \rangle = \sum v_j dx_j$. Zeigen Sie, dass $F(x) := 1/\|x\|$ eine Stammfunktion für ω auf U definiert und berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ entlang des Weges $\gamma(t) := \big(\tanh(t \log(3/2)), t^{7/6}, \cos(\pi\, t)\big)$ $(t \in [0,1])$.

$\boxed{\textbf{160}}$ Betrachten Sie das Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^3$, wobei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ und $v(x,y,z) := (x^2 y, z e^x, xy \log z)$.

(a) Ist v ein Gradientenfeld auf U?

(b) Sei ω die v zugeordnete 1-Form auf U. Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int\limits_C \omega$, wobei C durch $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ dargestellt ist?

$\boxed{\textbf{161}}$ Besitzen die folgenden 1-Formen eine Stammfunktion? Wenn ja, geben Sie eine an.

(a)	$\omega(x,y) = (x^2 + 2y)dx + (2x - y^3)dy$	auf $\mathbb{R}^2$
(b)	$\nu(x,y) = x \log y \; dx + y \log x \; dy$	auf $]0,\infty[^2$
(c)	$\mu(x,y,z) = (x+z)dx - (y+z)dy + (x-y)dz$	auf $\mathbb{R}^3$
(d)	$\alpha(x,y,z) = (x+2z)dx - (y+z)dy + 2(x-y)dz$	auf $\mathbb{R}^3$