## XIII. Mannigfaltigkeiten, Tangentialräume

**Definition** (13.1)**.** *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen. Eine Abbildung $F : U \longrightarrow V$ heißt $\mathcal{C}^p$ - Isomorphismus, wenn alle partiellen Ableitungen von $F$ und $F^{-1}$ bis zur Ordnung $p$ existieren und stetig sind. $F$ heißt Diffeomorphismus, wenn $F$ und $F^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$ - Abbildungen sind.*

**Satz** (13.2)**.** *Ist $F$ eine $\mathcal{C}^\infty$ - Abbildung auf einer offenen Menge$E \subseteq \mathbb{R}^n$, und ist die Jacobi Determinante $J_F(x_0) \neq 0$, für ein $x_0 \in G$, dann bildet $F$ eine hinreichend kleine offene Umgebung $U$ von $x_0$ diffeomorph auf die offene Umgebung $F(U)$ von $F(x_0)$ ab.*

**Bemerkung.** *Im Satz (10.11) (Zerlegung der Eins) können die Funktionen $\psi_1, \ldots \psi_s$ sogar als $\mathcal{C}^\infty$- Funktionen gewählt werden ($\mathcal{C}^\infty$- Zerlegung der Eins).*

**Definition** (13.3)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Man nennt $f$ eine $\mathcal{C}^\infty$- Abbildung, wenn für jedes $x \in A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert und eine $\mathcal{C}^\infty$- Abbildung $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, welche auf $A \cap U$ mit $f$ zusammenfällt.*
*Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B,\ A \subseteq \mathbb{R}^n,\ B \subseteq \mathbb{R}^m$, heißt Diffeomorphismus, wenn $f$ bijektiv ist und $f$ und $f^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$- Abbildungen sind.*

**Definition** (13.4)**.** *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit ($1 \leq k \leq n$), wenn jedes $x \in M$ eine Umgebung $W \cap M$ besitzt ($W$ offen in $\mathbb{R}^n$), welche diffeomorph zu einer offenen Teilmenge $U$ des $\mathbb{R}^k$ ist. Wir nennen eine Diffeomorphismus $g : U \longrightarrow W \cap M$ eine $k$-dimensionale Karte für $M$. Eine Menge von $k$-dimensionalen Karten, deren Bilder ganz $M$ überdecken, heißt Atlas für $M$.*

**Satz** (13.5)**.** *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ($G$ offen in $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq n$) eine $\mathcal{C}^\infty$- Abbildung. Ist für jedes $a \in G$ mit $f(a) = 0$ die Ableitung $f'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ surjektiv, dann ist*

$$M = f^{-1}(0)$$

*eine $k$- dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, wobei $k = n - p$ ist.*

Die Einheitskugel $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.
Es gilt $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(0)$, wobei $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - 1$ ist.

**Definition** (13.6)**.** *Sei $M$ eine $k$- dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ und $a \in M$. Unter dem Tangentialraum $TM_a$ im Punkt $a$ versteht man den linearen Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der folgendermaßen definiert ist:*
*Sei $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte für eine Umgebung $g(U)$ des Punktes $a \in M$ mit $g(u_0) = a$. Dann ist $g'(u_0) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Der Tangentialraum $TM_a$ ist das Bild $g'(u_0)(\mathbb{R}^k)$ in $\mathbb{R}^n$.*

Der Tangentialraum ist von der speziellen Karte unabhängig. $TM_a$ ist ein $k$-dimensionaler Vektorraum.

**Definition** (13.7)**.** *Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine berandete $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \cap X$ ($U$ offen im $\mathbb{R}^n$) existiert, welche diffeomorph zu einer Teilmenge $V \cap \mathbb{H}^k$ ($V$ offen im $\mathbb{R}^k$) von $\mathbb{H}^k$ ist, dabei ist*

$$\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \,:\, x = (x_1, \ldots, x_k)\,, x_k \geq 0\}$$

*der $k$-dimensionale abgeschlossene Halbraum.*
*Unter dem Rand $\partial X$ von $X$ versteht man versteht man die Menge aller Punkte von $X$, welche bei einem solchen Diffeomorphismus in Punkte aus $\partial \mathbb{H}^k$ übergehen, dabei ist*

$$\partial \mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k \,:\, x = (x_1, \ldots, x_k)\,, x_k = 0\}.$$

Jede $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$ ist auch eine $k$- dimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial M = \emptyset$.
Ist $X$ eine berandete $k$- dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist $\partial X$ eine $(k-1)$- dimensionale Mannigfaltigkeit.

**Satz** (13.8)**.** *Sei $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, so dass für jedes $a$ mit $g(a) = 0$ gilt $g'(a) \not\equiv 0$. Dann ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, g(x) \geq 0\}$$

*eine berandete $n$- dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $g^{-1}(0)$.*

Die volle Einheitskugel

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \leq 1\}$$

ist eine berandete Mannigfaltigkeit mit $\partial \mathbb{B}^3 = \mathbb{S}^2$.

**Definition** (13.9)**.** *Seien $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Mannigfaltigkeiten, $dim M = k$, $dim N = l$, und sei $f : M \longrightarrow N$ eine $\mathcal{C}^\infty$- Abbildung. Sei $x \in M$ und $f(x) = y$. Dann wird die Ableitung $f'(x) : TM_x \longrightarrow TN_y$ folgendermßen definiert:*
*Es existiert eine offene Umgebung $W$ von $x$ und eine $\mathcal{C}^\infty$- Abbildung $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, welche auf $W \cap M$ mit $f$ übereinstimmt. Man definiert nun*

$$f'(x)(v) = F'(x)(v)\ ,\ \textit{für alle } v \in TM_x.$$

Es gilt : die Definition von $f'(x)$ ist unabhängig von der Wahl von $F$ und $f'(x)(v) \in TN_y$ für alle $v \in TM_x$.
Auch hier gilt die Kettenregel: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.
Ist $f : M \longrightarrow N$ ein Diffeomorphismus, dann ist $f'(x) : TM_x \longrightarrow TN_y$ ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere ist $\dim M = \dim N$.

Wir nennen die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ positiv orientiert und eine weitere Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ gleichorientiert, wenn die lineare

Abbildung, welche diese Basis in die Standardbasis überführt positive Determinante hat.
Eine orientierte Mannigfaltigkeit besteht aus einer Mannigfaltigkeit $M$ zusammen mit der Wahl einer Orientierung für jeden Tangentialraum $TM_x$. Die Orientierungen der Tangentialräume müssen zusammenpassen im folgenden Sinn: für jeden Punkt $x_0 \in M$ muss eine Umgebung $U \cap M$ ($U$ offen in $\mathbb{R}^n$) existieren und ein Diffeomorphismus $h$, der $U \cap M$ auf eine Menge $V \cap \mathbb{R}^k$ bzw. $V \cap \mathbb{H}^k$ ($V$ offen in $\mathbb{R}^k$) abbildet, welcher orientierungsbewahrend ist, d.h. für jedes $x \in U \cap M$ führt der Vektorraumisomorphismus $h'(x)$ die Orientierung von $TM_x$ über in die Standardorientierung des $\mathbb{R}^k$, es ist $\{h'(x)(v_1), \ldots, h'(x)(v_k)\}$ positiv orientiert in $\mathbb{R}^k$, wenn $\{v_1, \ldots, v_k\}$ positiv orientiert in $TM_x$ ist.

Lokal ist eine Orientierung einer Mannigfaltigkeit immer möglich. Da man zur Beschreibung einer Mannigfaltigkeit i.a. nicht mit einer Karte auskommt, erhebt sich die Frage , ob man die Orientierung der einzelnen Karten immer so wählen kann, dass sich eine Orientierung auf ganz $M$ ergibt.
Das Möbius-Band ist ein Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit.

Ist $M$ eine berandete Mannigfaltigkeit und $x \in \partial M$, dann kann man drei Arten von Vektoren in $TM_x$ unterscheiden:
(i) Die Tangentenvektoren an $\partial M$, welche einen $(k-1)$-dimensionalen Teilraum $T(\partial M)_x$ von $TM_x$ bilden.
(ii) Die nach außen weisenden Vektoren, welche einen offenen Halbraum bilden, der von $T(\partial M)_x$ begrenzt wird.
(iii) Die nach innen weisenden Vektoren, welche den komplementären Halbraum bilden.

Jede Orientierung für $M$ definiert eine Orientierung für $\partial M$ folgendermaßen:
Für $x \in \partial M$ wähle man eine positiv orientierte Basis $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ von $TM_x$ derart, dass $\{v_2, \ldots, v_k\}$ in $T(\partial M)_x$ liegen und dass $v_1$ nach außen zeigt.