NAME, Matrikelnummer : ____________________

Lineare Algebra und Geometrie 1

SS 2016, K. Auinger, 17.10.2016
Maximale Punkteanzahl: 24; Schlüssel: 4 ab 12, 3 ab 15, 2 ab 18, 1 ab 21

(a) Was versteht man unter einer n-*Linearform*, was unter einer *alternierenden* n-Linearform (über einem beliebigen Körper K)? (2P)

(b) Beweise oder widerlege die Behauptung: “Die Determinantenfunktion $\det : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.” (2P)

(c) Zeige, wie man auf einem Euklidischen Vektorraum die Norm durch das innere Produkt ausdrücken kann. (2P)

(d) Was versteht man unter einer “Spiegelung an einem Unterraum eines Euklidischen Raumes”? Zeige, dass jede Spiegelung eine orthogonale Abbildung ist. (2P)

(e) Gib für $E = \mathbb{R}^4$ (bzgl. Standardskalarprodukt) für einen selbstgewählten Unterraum V (mit $1 \leq \dim V < 4$) die Matrixdarstellung (bzgl. Standardbasis) der Spiegelung an V an. (2P)

(f) Erkläre das Gram–Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren (in einem Euklidischen Vektorraum)! (Wozu dient es, wie funktioniert es?) (2P)

(g) Wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren (im $\mathbb{R}^3$ bzgl. Standardskalarprodukt) auf die folgenden Vektoren an (in der gegebenen Reihenfolge):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2P)

(h) Sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die adjungierte Abbildung ϕ^*. Ist ϕ normal? (3P)

(i) Definiere den Begriffs des *Eigenwerts* einer Matrix $A \in M_{nn}(K)$ und zeige, dass ein Skalar $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von A ist, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(X)$ ist. (3P)

(j) Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ c & 1 \end{smallmatrix}\right)$ über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. (2P)

(k) Bestimme für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ eine orthogonale Matrix O, sodass $O^{-1}AO$ eine Diagonalmatrix ist. (2P)