Univ.-Prof. Dr. Radu Ioan Boţ

Übungen zu "Höhere Analysis und Differentialgeometrie" - Gruppe 2

WS2018/2019

1. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $z = z(x, y)$ die Funktion, die durch die Gleichung $\varphi(y^2 - x^2, z - xy) = 0$ impliziert definiert wird. Berechnen Sie den Ausdruck

$$E(x, y) = y\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + x\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$$

   an den Stellen wo die Gleichung nach $z = z(x, y)$ auflösbar ist.

2. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $z = z(x, y)$, die durch die Gleichung $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$ impliziert definiert wird.

3. (Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (a) Ist f ein lokaler Diffeomorphismus?

   (b) Sei $U := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Bildmenge $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$, indem Sie für einen Punkt $(x, y, z) = f(r, \varphi, \theta)$ die Größen r, φ und θ geeignet als Radius, Winkel der Projektion auf die Ebene $z = 0$ und Winkel mit der z-Achse interpretieren. Erstellen Sie eine Skizze.

   (c) Zeigen Sie, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist.

   (d) Ist $f|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus?

4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion so, dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ positiv definit ist. Zeigen Sie, dass $f : U \to f(U)$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

5. Zeigen Sie, dass die Abbildung der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$

$$f : B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}},$$

   ein Diffeomorphismus ist und berechnen Sie ihr Differential.

6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und μ eine positive Zahl so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \mu\|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in U$;

   (b) falls $U = \mathbb{R}^n$, dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus.

7. Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Wege:

   (a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die *Schraubenlinie* $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ct)$ mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $c > 0$;

(b) $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ die *Zykloide* $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ (Weg eines Punktes an der Peripherie eines Einheitskreises, der eben und ohne Gleiten abrollt).

(c) $x(t) = \log\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right), y(t) = \log\left(\sqrt{\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}}\right), t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$;

(d) $x(t) = 5\sin(t) - \sin(5t), y(t) = 5\cos(t) - \cos(5t), t \in [0, 2\pi]$.

8. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Zeigen Sie: für jedes $\varepsilon > 0$ exitiert ein $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ von $[a, b]$ mit $\max_{i=0,\dots,n-1}(t_{i+1} - t_i) < \delta$ gilt

$$\left| L(\gamma) - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \right| < \varepsilon.$$

9. (Polarkoordinatendarstellung ebener Wege) Es sei $\alpha > 0$ und $r : [0, \alpha] \to [0, +\infty)$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass durch $\gamma(t) = r(t) \cdot (\cos(t), \sin(t))$ ein stetig differenzierbarer Weg definiert wird und dass der Weg γ genau dann regulär ist, wenn $r'(t)^2 + r(t)^2 > 0$ für alle $t \in [0, \alpha]$. Bestimmen Sie die Gesamtbogenlänge:

   (a) der *Kardioide* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch die Radiusfunktion $r(t) = 1 + \cos(t)$;

   (b) der *Archimedischen Spirale* mit beliebigem Winkelbereich $\gamma : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch die Radiusfunktion $r(t) = bt$, wobei $b > 0$ konstant ist.

10. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Beweisen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall I mit $t \in I$ existiert so, dass $\gamma(I)$ mit dem Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion übereinstimmt.

11. Sei $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (\exp(-t)\cos(t), \exp(-t)\sin(t))$. Berechnen Sie die Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge.

12. Zeigen Sie, dass die Krümmung κ eines regulären $\mathcal{C}^2$-Weges $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (x(t), y(t))$, sich durch

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \forall t \in I$$

bestimmen lässt.

13. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Das *erste Wegintegral von* f entlang γ ist definiert als

$$\int_\gamma f ds := \int_a^b f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|dt.$$

Falls das Bild von γ ein Drahtstück mit Dichte f ist, dann lassen sich die Masse des Drahtstückes und die Koordinaten des Schwerpunktes des Drahtstückes durch

$$M := \int_\gamma f ds,$$

beziehungsweise,

$$x_i^G := \frac{\int_\gamma f x_i ds}{\int_\gamma f ds}, i = 1, ..., n,$$

bestimmen. Berechnen Sie die Masse des Drahtstückes mit der Parametrisierung

$$x(t) = t, y(t) = \frac{1}{2}t^2, z(t) = \frac{1}{3}t^3, t \in [0, 1],$$

und Dichte gegeben durch $f(x, y, z) = \sqrt{2y}$.

14. Berechnen Sie $\int\limits_C \omega$, wenn

(a) $\omega(x,y,z) = x^2yzdx + xy^2zdy + xyz^2dz$ und C ist der Durchschnitt der Flächen

$$x = 1, y^2 + z^2 = 1;$$

(b) $\omega(x,y,z) = (y-2z)dx + (x-z)dy + (2x-y)dz$ und C ist der Durchschnitt der Flächen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x - y + z = 0;$$

(c) $\omega(x,y,z) = ydx + (x+z)dy + x^2dz$ und C ist der Durchschnitt der Flächen

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, x + z = 4.$$

15. Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, $\omega(x,y) = \log(y)dx + \cos^2(x)dy$ eine 1-Form auf U und $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to U, \gamma(t) = (t, 1 + \tan(t))$. Berechnen Sie $\int\limits_\gamma \omega$.

16. Seien $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$P(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cos(2xy) \quad Q(x,y) = e^{-x^2+y^2}\sin(2xy),$$

und die 1-Form $\omega = Pdx + Qdy$.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Weg γ in $\mathbb{R}^2$ gilt $\int\limits_\gamma \omega = 0$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\cos(2\alpha t)dt$ indem Sie die Aussage von (a) für den rechteckigen Weg, der die Punkte

$$A(0,0), B(a,0), C(a,\alpha), D(0,\alpha)$$

verbindet, anwenden.

17. Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z \geq 0\}$ und $P, Q, R : U \to \mathbb{R}$,

$$P(x,y,z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2} \quad Q(x,y,z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2} \quad R(x,y,z) = z^2 - xy.$$

(a) Berechnen Sie $\int\limits_C \omega$ für $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ und $C \subseteq U$ eine Kurve, die die Punkte $A(1,1,0)$ und $B(-1,1,0)$ verbindet.

(b) Betrachtet man ω als 1-Form über $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$, zeigen Sie, dass eine Kurve $D \subseteq \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$, die $A(1,1,0)$ und $B(-1,1,0)$ verbindet, existiert, sodass $\int\limits_C \omega \neq \int\limits_D \omega$.

18. Zeigen Sie, dass der Ausdruck unter dem Integral eine exakte stetige 1-Form ist und berechnen Sie das entsprechende Kurvenintegral entlang einer Kurve für welche nur der Anfangspunkt und der Endpunkt gegeben sind:

(a) $\int\limits_{(1,2)}^{(-3,3)} \frac{y^2}{(x-y)^2}dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}dy;$

(b) $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{y^2z^2dx + 2x^2zdy + 2x^2ydz}{(2x+yz)^2};$

(c) $\int\limits_{(-1,1,5)}^{(2,2,4)} \frac{z(dx+dy) - (x+y)dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$

19. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, falls für je zwei offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ gilt:

$$Y \subseteq U \cup V, Y \cap U \cap V = \emptyset \quad \Rightarrow \quad Y \cap U = \emptyset \text{ oder } Y \cap V = \emptyset.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede wegzusammenhängende Menge zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede offene zusammenhängende Teilmenge eines normierten Vektorraumes wegzusammenhängend ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer Menge an, welche zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

20. Sei $D = \mathbb{R} \times (0, \pi) \times (0, \pi)$ und

$$f : D \to \mathbb{R}^4, f(u, v, w) = (\sin(u)\sin(v)\sin(w), \cos(u)\sin(v)\sin(w), \cos(v)\sin(w), \cos(w)).$$

(a) Zeigen Sie, dass $f(D) \subseteq S^3$;

(b) Ermitteln Sie, ob f eine lokale Parametrisierung von $f(D)$ liefert.

21. Sei $T = (-\pi, \pi) \times (0, 1)$ und $\Phi : T \to \mathbb{R}^3, \Phi(u, v) = (\sin(u), \sin(2u), v)$. Zeigen Sie, dass Φ eine Immersion ist und dass $\Phi : T \to \Phi(T)$ jedoch kein Homöomorphismus ist.

22. Finden Sie heraus, ob der Doppelkegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

eine Untermannigfaltigkeit ist.

23. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-Untermannigfaltigkeit und $\Phi_1 : T_1 \to \Phi_1(T_1) = M \cap U_1, \Phi_2 : T_2 \to \Phi_2(T_2) = M \cap U_2$ zwei lokale Parametrisierungen von M nahe $a \in M$. Sei $U := \Phi_1(T_1) \cap \Phi_2(T_2)$. Zeigen Sie, dass $W_1 := \Phi_1^{-1}(U)$ und $W_2 := \Phi_2^{-1}(U)$ offene Teilemengen von T_1 und, beziehungsweise, T_2 sind und dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1|_{W_1} : W_1 \to W_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

24. Zeigen Sie, dass $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = I\}$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

25. (a) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\cos(y)}{1 + \sin(x)\sin(y)} d(x, y).$$

(b) Sei $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{falls } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{falls } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die iterierten Integrale $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ und $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ existieren aber nicht gleich sind. Warum widerspricht es nicht dem Satz von Fubini?

26. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) d(u, v)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

27. Zeigen Sie, dass es höchstens eine stetige Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ geben kann so, dass

$$f(x,y) = 1 + \int_0^x \int_0^y f(u,v) d(u,v) \quad \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

28. Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right)^2 dy \le$$
$$\left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y))^2 dxdy.$$

29. Seien $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ und $K : [0,1] \times [0,1] \to (0,\infty)$ stetige Funktionen so, dass

$$f(x) = \int_0^1 K(x,y)g(y)dy \text{ und } g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \quad \forall x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$.

30. Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_{[0,1]^4} (f(x,y) + f(u,v))^2 d(x,y,u,v) = \int_{[0,1]^4} (f(x,y) + f(u,v))(f(x,v) + f(u,y)) d(x,y,u,v)$$

genau dann, wenn zwei stetige Funktionen $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ existieren, sodass $f(x,y) = g(x) + h(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$.

31. Sei $f \in \mathcal{C}^4([0,1] \times [0,1])$ eine Funktion, die gleich Null auf dem Rand von $[0,1] \times [0,1]$ ist und die Eigenschaft hat, dass $\left| \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) \right| \le M$ für alle $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, wobei $M > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_{[0,1]^2} f(x,y) d(x,y) \right| \le \frac{M}{144}.$$

32. Sei $n \ge 2$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion so, dass $f(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$ und dass die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$, radial ist, d.h., es existiert eine Funktion $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x_1, ..., x_n) = h(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2})$ für alle $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

33. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a \le x_1 \le ... \le x_n \le b\}$. Sei

$$F : [a,b]^n \to \mathbb{R}, \quad F(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n f(x_i), & \text{falls } (x_1, ..., x_n) \in D, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{[a,b]^n} F(x_1, ..., x_n) d(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \left(\int_a^b f(x)dx \right)^n.$$

34. Für $a, b > 0$ ist die *Eulersche Betafunktion* gegeben durch $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Integral $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ konvergiert für alle $a, b > 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ für alle $a, b > 0$, wobei Γ die Eulersche Gammafunktion bezeichnet.

35. Sei $I = (0,1)^n$, $S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, ..., n, x_1 + ... + x_n < 1\}$ und $f : I \to S$ definiert durch $f(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$, wobei $y_i = x_1 \cdot ... \cdot x_i \cdot (1 - x_{i+1})$ für alle $i = 1, ..., n$ und $x_{n+1} = 0$. Zeigen Sie, dass f ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus ist und dass $\det Df(x_1, ..., x_n) = x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-2} \cdot ... \cdot x_{n-1}$ für alle $(x_1, ..., x_n) \in I$.

36. Sei $I = (0,1)^n$, $S = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = 1, ..., n, x_1 + ... + x_n < 1\}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $\alpha_i > -1, i = 1, ..., n$, und $m = \alpha_1 + ... + \alpha_n + n - 1$. Zeigen Sie, dass

$$\int_S f(y_1 + ... + y_n) \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot y_n^{\alpha_n} d(y_1, ..., y_n) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot \Gamma(\alpha_n + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + ... + \alpha_n + n)} \int_0^1 f(t) t^m dt.$$

37. Sei $D : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $Df = f'$.

    (a) Zeigen Sie, dass D linear, injektiv, aber nicht surjektiv ist.

    (b) Zeigen Sie, dass $D(\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})) = \{f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) : \int_\mathbb{R} f(x) dx = 0\}$.

    (c) Zeigen sie, dass $D : (\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|) \to (\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\| : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\|f\| := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$, kein stetiger Operator ist.

38. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (a) f ist unterhalbstetig, d.h.,

    $$\forall x \in X \ \forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) > c \text{ es existiert } \delta > 0, \text{ sodass } \forall y \in B_\delta(x) \text{ gilt } f(y) > c.$$

    (b) der *Epigraph* der Funktion f, d.h., die Menge $\mathrm{epi}(f) := \{(x, c) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le c\}$, ist abgeschlossen;

    (c) die Menge $f^{-1}((-\infty, c])) = \{x \in X : f(x) \le c\}$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen.

39. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion und $\inf f := \inf\{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann unterhalbstetig ist, wenn

$$\{x \in X : f(x) \le c\} = \overline{\{x \in X : f(x) < c\}} \quad \forall c \in (\inf f, +\infty).$$

40. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex und unterhalbstetig ist, wenn f eine affine stetige Minorante besitzt und f gleich dem punktweise Supremum aller ihrer affinen stetigen Minoranten ist.

    Hinweis. Verwenden Sie den folgenden Trennungssatz (geometrische Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach): Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, $A \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Menge und $B \subseteq X$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge so, dass $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert eine lineare stetige Abbildung $x^* : X \to \mathbb{R}$, sodass

$$\sup_{x\in B} x^*(x) < \inf_{x\in A} x^*(x).$$

41. Es sei $a > 0$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \|x\|^2}}, & \text{falls } \|x\| < a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

    (a) Zeigen Sie, dass f unterhalbstetig ist.

    (b) Konstruieren Sie für den Fall $n = 1$ explizit eine Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, die punktweise monoton wachsend gegen f konvergiert.

    (c) Ebenfalls für $n = 1$: zeigen Sie, dass $\int_\mathbb{R} f(x) dx := \lim_{k\to\infty} \int_\mathbb{R} f_k(x) dx$ gleich dem uneigentlichen Riemann-Integral $\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ ist.

42. Es sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ so, dass $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

    (a) Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ gilt und

    $$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k, \in \mathbb{N}, k\to\infty} \int_{[-k,k]^n} f(x) dx,$$

    wobei $+\infty$ als Grenzwert zugelassen wird.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]^n} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\overline{B_R(0)}} f(x)dx.$$

43. Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{[0,a]\times[0,b]} e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} d(x,y).$$

44. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$. Berechnen Sie:

$$\int_D \ln(|\sin(x-y)|)d(x,y).$$

45. Sei $R \in (0, +\infty)$ und eine stetige Funktion $u : [0, R] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\overline{B_R(0)}} u(\|x\|)dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^R u(r)r^{n-1}dr,$$

wobei $\overline{B_R(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$.

46. Seien $a > 0, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2+bx+c)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

47. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x^TAx+b^Tx)}dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}} e^{\frac{1}{4}b^TA^{-1}b}.$$

48. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} e^{-(x_1^2+...+x_n^2)} d(x_1, ..., x_n) = \pi^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty \left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}du\right)^n\right) dt.$$

49. Berechnen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-2018(x+\frac{1}{x})}dx.$$

50. Berechnen Sie:

$$\int_{[0,1]^n} \cos^2\left(\frac{\pi(x_1 + ... + x_n)}{2n}\right) d(x_1, ..., x_n).$$

51. Sei $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Berechnen Sie:

$$\int_V xy^9z^8(1-x-y-z)^4 d(x,y,z).$$

52. Es sei H die abgeschlossene obere Halbkugel mit Radius 4 um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ und Z der senkrechte Zylinder über der waagerechten Kreisfläche mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(2, 0, 0)$. Berechnen Sie das Volumen von $H \cap Z$.

53. Seien die Matrizen $A_n = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_{n-1} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ und der Vektor $b_n = (a_{1n}, ..., a_{n-1,n})^T$ so, dass A_n und A_{n-1} symmetrisch und positiv definit sind und $a_{nn} - b_n^TA_{n-1}^{-1}b_n > 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

(a) $\frac{\det A_n}{\det A_{n-1}} = a_{nn} - b_n^T A_{n-1}^{-1} b_n$;

(b) $\int_{|y_n|<\lambda} e^{-y^T A_n y} d(y_1, ..., y_n) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\det A_n}} \left(F\left(\lambda \sqrt{\frac{\det A_n}{\det A_{n-1}}}\right) - F\left(-\lambda \sqrt{\frac{\det A_n}{\det A_{n-1}}}\right) \right)$, wobei, für $\lambda \in \mathbb{R}$, $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2} dx$.

54. Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, sei $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f_n(t, x_1, ..., x_n) = \exp\left(-\frac{t^2}{2n} \left(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + ... + (x_1 + ... + x_n)^2 \right) - \frac{n}{2}(x_1^2 + ... + x_n^2) \right).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(t, x_1, ..., x_n) d(x_1, ..., x_n) = (\cosh(t))^{-\frac{1}{2}}.$$

55. Sei $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$, wobei $a, b > 0$. Berechnen Sie:

$$\int_D |xy| d(x, y)$$

56. Berechnen Sie:

$$\int_{[0,1]^3} \frac{1}{(1 + u^2 + v^2 + w^2)^2} d(u, v, w).$$

57. (a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ existiert so, dass $Ax = y$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die invariant unter orthogonalen Transformationen ist, d.h. $f(Ax) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jede orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass f eine radiale Funktion ist.

58. Seien $n \geq 2$, $a, b \geq 0$, $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $v(t) = \min\left\{ \frac{a}{t}, b \right\}$ für alle $t > 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, sei

$$D(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_2 \leq b, |\langle x, y \rangle| \leq a \}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, gilt:

$$\int_{D(x)} u(\langle x, y \rangle, \|y\|_2) dy = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-v(\|x\|_2)}^{v(\|x\|_2)} \left(\int_0^{\sqrt{b^2 - s^2}} u(s\|x\|_2, \sqrt{r^2 + s^2}) r^{n-2} dr \right) ds.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass $x \mapsto \int_{D(x)} u(\langle x, y \rangle, \|y\|_2) dy$ eine radiale Funktion ist.

59. Sei T ein Tangentialraum an dem Ellipsoid $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ $(a, b, c > 0)$. Berechnen Sie das kleinste mögliche Volumen des Tetraeders begrenzt durch T und durch die Ebenen $x = 0, y = 0$ und $z = 0$.

60. (Vivianisches Fenster) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers $H \cap Z$ aus der Aufgabe 52.

61. Gegeben seien n Strecken in der Ebene mit der Eigenschaft, dass die Summe ihrer Längen gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass eine Gerade existiert, sodass die Summe der Längen der Projektionen dieser Strecken auf diese Gerade gleich $\frac{2}{\pi}$ ist.

62. Das Rechteck R sei aus endlich vielen Rechtecken zusammengesetzt, die eine ganzzahlige Breite oder eine ganzzahlige Länge haben. Zeigen Sie, dass auch R eine ganzzahlige Breite oder eine ganzzahlige Länge hat.

63. Sei $n \geq 2$, $D_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 > 0\}$, die Menge der Lorentz-Matrizen $L_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : S = A^T S A\}$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix},$$

und $G_n = \{A \in L_n : A(D_n) = D_n\}$. Seien $x, y \in D_n$ mit $\langle x|Sx\rangle = \langle y|Sy\rangle$. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in G_n$ existiert, sodass $Ax = y$.

64. Sei $n \geq 2$ und $D_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 > 0\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $y \in D_n$ gilt

$$\int_{D_n} \exp(-\langle x|y\rangle) dx = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} (y_1^2 - ... - y_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

65. Im $\mathbb{R}^4$ mit der Koordinatenbezeichnung (t, x_1, x_2, x_3) seien die 2-Formen $\omega_1 = dx_2 \wedge dx_3, \omega_2 = dx_3 \wedge dx_1, \omega_3 = dx_1 \wedge dx_2$ gegeben.

   (a) Begründen Sie: jede 2-Form auf $\mathbb{R}^4$ lässt sich eindeutig darstellen als

   $$F = dt \wedge \sum_{j=1}^{3} E_j dx_j - \sum_{j=1}^{3} B_j \omega_j,$$

   wobei $E = (E_1, E_2, E_3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und $B = (B_1, B_2, B_3) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ sind.

   (b) Seien nun E und B stetig differenzierbare zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$. Es bezeichne $\mathrm{rot}E$ und $\mathrm{div}B$ jeweils die üblichen Operationen der Rotation und Divergenz mittels partieller Ableitungen bezüglich der räumlichen Koordinaten x_1, x_2, x_3 (also jeweils bei fixem t). Weiters bezeichne $\dot{B}$ das Vektorfeld, dessen Komponenten aus den partiellen Ableitungen jener von B bezüglich t entstehen. Zeigen Sie, dass

   $$dF = 0 \Leftrightarrow \dot{B} = -\mathrm{rot}E \text{ und } \mathrm{div}B = 0.$$

   In der Elektrodynamik werden E und B als elektrische bzw. magnetische Feldstärke intepretiert und F wird als Feldstärkentensor bezeichnet. Die obige Aussage zeigt, dass die Geschlossenheit von F als 2-Form äquivalent zur Gültigkeit der homogenen Maxwell-Gleichungen für E und B ist.

66. Es sei $\omega = 2xzdy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist. Ist ω auch exakt? Können Sie eine 1-Form η angeben, für die $d\eta = \omega$ gilt?

67. Seien $0 < a < 1 < b$, $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < \|x\| < b\}$ und $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenziebare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\int_{S^2} \langle \mathrm{grad}\varphi \times \mathrm{grad}\psi | \nu \rangle \, dS = 0,$$

wobei ν das Einheits-Normalenfeld der Einheitssphäre S^2, das positiv orientiert ist, bezeichnet.

68. Sei $\omega(x, y, z) = x(z+3)dy \wedge dz + yzdz \wedge dx - (z + z^2)dx \wedge dy$ eine 2-Form auf $\mathbb{R}^3$ und $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Berechnen Sie $\int_\Sigma \omega$.

69. Seien $a, b, c > 0$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(xy+az) \\ -y(xy-az) \\ z^3 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche mit der Gleichung

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

70. (Gauß'sches Gesetz) Sei $q > 0$, $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{q}{4\pi\|x\|}$, und $E = -\mathrm{grad} f$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{div} E = 0$.

   (b) Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes E durch jede geschlossene Fläche, die einen Körper begrenzt, der im Inneren nicht den Ursprung enthält, gleich 0 ist.

   (c) Zeigen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes E durch jede geschlossene Fläche, die einen Körper begrenzt, der im Inneren den Ursprung enthält, gleich q ist.

71. Sei $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$V(x) = \left(1 + \frac{\langle x|e_3\rangle}{\|x\|^4}\right) x,$$

und die Fläche $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - x^2 - y^2, z \geq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}$, die positiv orientiert bezüglich dem äußeren Einheits-Normalenfeld ist. Berechnen Sie den Fluss von V durch Σ.

72. Sei $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$V(x) = \frac{1}{\|x\|}(x \times e_3).$$

Berechnen Sie den Fluss von V durch:

   (a) eine beliebige geschlossene Fläche, die einen Körper begrenzt, der im Inneren nicht den Ursprung enthält;

   (b) die Oberfläche der Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius R.

73. Seien $a, b, c > 0$, die Punkte $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$ und $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz.$$

74. Berechnen Sie mittels dem Satz von Gauss-Ostrogradski die folgenden Integrale:

   (a) $\int_\Sigma yzdy \wedge dz - (x+z)dz \wedge dx + (x^2+y^2+3z)dx \wedge dy$, wobei $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 - 2z, z \geq 1\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 - 2z, z = 1\}$;

   (b) $\int_\Sigma x^2(y-z)dy \wedge dz + y^2(z-x)dz \wedge dx + z^2(x-y)dx \wedge dy$, wobei $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 < z \leq 1\}$.

75. (Greensche Formel) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $K \subseteq U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand. Somit ist ∂K eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ und die von U induzierte Orientierung legt darauf ein eindeutiges positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld ν fest. Wir definieren die *Normalableitung* einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $y \in \partial K$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(y) = \langle \mathrm{grad} f(y) | \nu(y) \rangle.$$

Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in \mathcal{C}^2(U)$ gilt:

$$\int_K (f\Delta g - g\Delta f) = \int_{\partial K} \left(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - g\frac{\partial f}{\partial \nu}\right) dS.$$

76. (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* in U, falls sie zweimal stetig differenzierbar ist und

$$\Delta f(x) = 0 \ \forall x \in U.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge mit der Eigenschaft, dass $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ sei eine harmonische Funktion in U. Zeigen Sie, dass

$$f(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos t, r \sin t)dt \ \forall r \in (0, 1).$$

77. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $K \subseteq U$ eine kompakte Menge mit glattem Rand ∂K und ν das eindeutig positiv orientierte Einheits-Normalenfeld ν, das von der von U induzierten Orientierung festgelegt wird. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion in U. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:

   (a) $\int_{\partial K} \frac{\partial f}{\partial \nu} dS = 0.$

   (b) $\int_{\partial K} f \frac{\partial f}{\partial \nu} dS = \int_K \|\text{grad} f(x, y, z)\|^2 d(x, y, z).$

78. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ offen, $M \subseteq U$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit orientiert durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$, und $A \subseteq M$ eine kompakte Menge mit dem glattem Rand ∂A. Sei $a \in \mathbb{R}^3$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, $w : U \to \mathbb{R}^3, w(x) = \langle a|\text{grad}(f \circ \| \cdot \|)(x)\rangle x$, und $\omega = w_1dx + w_2dy + w_3dz$ eine 1-Form auf U. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial A} \omega = \int_A \langle g|\nu\rangle dS,$$

wobei $g(x) = \frac{a \times x}{\|x\|} f'(\|x\|)$.

Zwei Aufgaben für die Semesterferien

79. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes Quadrat $A_1A_2A_3A_4$ mit Seitenlänge 1 gilt $f(A_1) + f(A_3) = f(A_2) + f(A_4)$. Zeigen Sie, dass $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

80. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes Quadrat $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Seitenlänge 1 gilt

$$\int_Q f(x, y)d(x, y) = 0.$$

Zeigen Sie, dass f identisch Null ist.