104. Betrachte den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum W in $\mathbb{R}^4$. Verwende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von W sowie einen Normalektor, $v \in W^\perp$, zu bestimmen.

105. Bestimme die QR-Zerlegung der invertierbaren Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}2 & -2\\2 & 4\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\1 & 3 & 6\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

106 (Operatornorm). Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektoräumen. Zeige

$$\|\varphi\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V,\, \|v\|=1} \|\varphi(v)\| < \infty,$$

und verifiziere, dass dies eine Norm auf dem Vektorraum $L(V, W)$ definiert die folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\|\|v\|$, für jedes $v \in V$.
(b) $\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\|\|\varphi\|$, für jede weiter lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$.
(c) $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$
(d) $\|\varphi^*\varphi\| = \|\varphi\|^2$

107 (Kreuzprodukt). Sei a, b ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^3$, d.h. $\|a\| = 1 = \|b\|$ und $\langle a, b\rangle = 0$. Zeige, dass $a, b, a \times b$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Schließe daraus, dass die Matrix $A := (a|b|a \times b)$ orthogonal ist. Berechne $\det(A)$.

108. Zeige, dass

$$O_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$$

eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. *Hinweis: Zeige, dass O_n beschränkt und abgschlossen ist; die Norm $\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^t A)$ auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist dabei hilfreich.* Zeige auch, dass

$$U_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^* A = I_n\}$$

eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ ist.

109. Zeige $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$, für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Folgere daraus, $|\det(A)| = 1$, für jede unitäre Matrix $A \in U_n$. Zeige, analog, dass $\det(A) \in \{\pm 1\}$, für jede orthogonale Matrix $A \in O_n$.

110 (Legendre-Polynome). Betrachte den Euklidischen Vektorraum der stetigen Funktionen, $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, mit innerem Produkt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Wende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die linear unabhängige Teilmenge $1, x, x^2, x^3$ an, und bestimme so eine Orthonormalbasis des davon aufgespannten Teilraums.

111. Betrachte den Vektorraum der stetigen Funktionen, $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$, mit innerem Produkt

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

Zeige, dass die Funktionen $e^{\mathbf{i}nt}$, $n \in \mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem bilden.

112. Zeige, dass die Menge der reellen bzw. komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bilden.

113. Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume eines endlich dimensionalen reellen Vektorraums V, d.h. $V = W \oplus W'$. Zeige, dass ein inneres Produkt auf V existiert, für das $W^\perp = W'$ gilt. Formuliere und beweise die analoge Aussage für komplexe Vektorräume.

114. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Orthogonalprojektion auf den Teilraum

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$, sowie den Abstand $d(v,W)$ des Punktes $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ zu W.

115. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum und $p\colon V \to V$ ein Projektor, $p^2 = p$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) p ist selbstadjungiert, d.h. $p^* = p$.
(b) $V = \mathrm{img}(p) \oplus \ker(p)$ ist eine orthogonale Zerlegung, d.h. $\ker(p) = \mathrm{img}(p)^\perp$.
(c) p ist die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{img}(p)$.

116. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum, bezeichne $\iota\colon W \to V$ die Inklusion eines Teilraums und $p\colon V \to W$ die Orthogonalprjektion. Zeige $\iota^* = p$ und $p^* = \iota$.

117. Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeige, dass

$$\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)$$

ein inneres Produkt auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}} = V$ liefert. Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ bezeichne $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ die selbe Abbildung, aber als reell lineare Abbildung aufgefasst. Zeige weiters:

(a) Ist $\varphi\colon V \to V$ selbstadjungiert, so ist $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ symmetrisch.
(b) Ist $\varphi\colon V \to V$ unitär, so ist $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ orthogonal.

118. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vetorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige:

$$\varphi(W) \subseteq W \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(W^\perp) \subseteq W^\perp$$

119. Für jede der folgenden symmetrischen Matrizen A bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU = U^tAU$ Diagonalgestalt hat:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

120. Für jede der folgenden selbstadjungierten Matrizen A bestimme eine unitäre Matrix U, sodass $U^{-1}AU = U^*AU$ Diagonalgestalt hat:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2\mathbf{i} & 2 \\ 2\mathbf{i} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

121. Zeige, dass die Drehung ρ_E^θ in Beispiel VII.4.4 nicht von der Wahl der Orthonormalbasis B abhängt. *Hinweis: Die Gruppe SO_2 ist Abelsch.*

122. Seien a_1 und a_2 zwei linear unabhängige Einheitsvektoren eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums, $\|a_1\| = 1 = \|a_2\|$, und bezeichne α den Winkel zwischen a_1 und a_2. Weiters seien $\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}\colon V \to V$ die orthogonalen Spiegelungen an $a_1^\perp$ bzw. $a_2^\perp$. Zeige, dass die Komposition $\rho := \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\colon V \to V$ mit der Drehung in dem von a_1 und a_2 erzeugten 2-dimensionalen Teilraum $E \subseteq V$ um den Winkel $\theta = 2\alpha$ übereinstimmt, d.h. zeige, $\rho = \rho_E^\theta$, mit der Notation in Beispiel VII.4.4. *Hinweis: Die Verdoppelungsformel für den Cosinus lautet:* $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.