Inhalt

Diese Übung beschäftigt sich hauptsächlich mit der Anwendung des Transformationssatzes des Lebesgue-Integrals

$$\int_{\psi(U)} f \, d\lambda_n = \int_U f \circ \psi \, |\det D\psi| \, d\lambda_n.$$

Dabei ist $\psi : U \to \psi(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus auf einer offenen Menge U und $f : \psi(U) \to \overline{\mathbb{R}}$ ist L-mb.
Zunächst jedoch eine Übung zur letzten Übung.

Übungsaufgabe

Berechne die folgenden Integrale:

1. $f(x,y,z) = 1$ über $Z = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq R\right\}$
2. $f(x,y,z) = z$ über $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$
3. $f(x,y,z) = 1$ über $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$
4. $f(x,y,z) = 1$ über
   $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$ mit
   $0 < r < R$.

Lösung von 1.

Z ist offenbar ein Zylinder mit Radius R und Höhe 1. Nach dem Prinzip vom Cavalieri gilt

$$\int_Z 1\, d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(Z_z)\, d\lambda^1 = \int_1^0 2\pi R^2\, dz = 2\pi R^2.$$

Lösung von 2.

K ist die Kugel vom Radius 1. Wir betrachten $K^{\pm} = int\{(x,y,z) \in K \mid \pm z > 0\}$. Wegen $\lambda^3(K \setminus (K^+ \cup K^-)) = 0$ folgt dann

$$\int_K f\, d\lambda^3 = \int_{K^+} f\, d\lambda^3 + \int_{K^-} f\, d\lambda^3.$$

Für $\varphi(x,y,z) = -(x,y,z)$ gilt offenbar $\varphi(K^+) = K^-$, $f \circ \varphi\,|_{K^+} = -f\,|_{K^+}$ und $|\det D\varphi| = 1$. Aus der Trafo-Formel für das Lebesgue-Integral folgt damit

$$\int_{K^-} f\, d\lambda^3 = \int_{\varphi(K^+)} f\, d\lambda^3 = -\int f_{K^+} d\lambda^3.$$

Insgesamt gilt also $\int_K f\, d\lambda^3 = 0$.

Lösung von 3.

E ist ein Ellipsoid. Wir zerlegen χ_E wiefolgt: Sei $B = \{x \in \mathbb{R} \mid E_x \neq \emptyset\}$, $B(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (E_x)_y \neq \emptyset\}$ und $B(x,y) = (E_x)_y$. Dann gilt

$$\chi_B(x) \cdot \chi_{B(x)}(y) \cdot \chi_{B(x,y)}(z) = \chi_E(x,y,z)$$

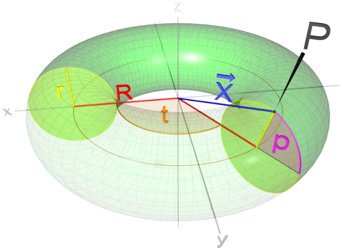
und

$$\int_E d\lambda^3 = \int_B \left(\int_{B(x)} \left(\int_{B(x,y)} dz \right) dy \right) dx.$$

Speziell ist $B = [-a,a]$, $B(x) = [-|b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, |b|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}]$ und $B(x,y) = \left[-|c|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, |c|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right]$. Das Rechnen ersparen wir uns zunächst. (Dieses Verfahren wurde in der vorangegangenen Übung besprochen)

Lösung von 4.

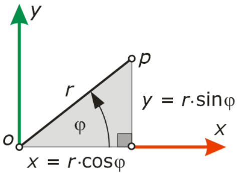
Hierbei handelt es sich um einen Torus:



Es wird offensichtlich relativ unübersichtlich die $B's$ zu bestimmen.

Zylinderkoordinaten

Beschreiben die $x-y$-Ebene durch den Radius r und einen Winkel φ:



Dann ist $\psi(r,\varphi,z) = (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi, z)$ ein Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^+ \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$ und

$$R := \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \,\text{und}\, y = 0\}.$$

Übungsaufgabe

Bestimme mithilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen von $Z = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

Lösung

- Setzen wir $U = (0,1) \times (0,2\pi) \times (0,R)$, dann ist $\psi : U \to \psi(U) \subset Z$ ein C^1-Diffeomorphismus und es gilt $\lambda_3(Z) = \lambda_3(\psi(U))$.
- Mit $|\det D\psi| = r$ folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
\lambda_3(Z) &= \int_U r \, d\lambda_3 \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr d\varphi dz \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

1. Eine Kugel K vom Radius 1 ist eine Um die z-Achse rotierte Halbscheibe in der $x-z$-Ebene. Jeden Punkt P dieser Halbscheibe drücken wir in Polarkoordinaten aus:
$$P(\theta, r) = (r\cos\theta, 0, r\sin\theta)$$
mit $0 \leq r \leq 1$ und $\theta \in [0, \pi]$.
2. Die Rotation $M(\varphi)$ eines Punktes $P = (x, y, z)$ um den Winkel φ um die z-Achse erhält man durch
$$P \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P.$$
3. Insgesamt erhalten wir mit $\psi(\varphi, \theta, r) = M(\varphi) \cdot P(\theta, r)$ einen Diffeomorphismus zwischen
$$U = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 1)$$
und $\psi(U) \subset K$ mit $\lambda_3(K \backslash \psi(U)) = 0$.

»Elliptische« Koordinaten

Wir betrachten $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ und setzen $\hat{x} = \frac{x}{a}$, $\hat{y} = \frac{y}{b}$ sowie $\hat{z} = \frac{z}{c}$. Damit ist $E = \left\{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 \leq 1\right\}$. Stellt man $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ in Kugelkoordinaten dar, dann folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, r \cos\theta \cos\varphi \\ b\, r \cos\theta \sin\varphi \\ c\, r \sin\theta \end{pmatrix} =: \psi(\varphi, \theta, r)$$

Übungsaufgabe

Berechne das Volumen des Ellipsoiden $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ mithilfe der modifizierten Kugelkoordinaten.

Lösung

- Für $U = (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \times (0, 1)$ ist $\psi : U \to \psi(U) \subset E$ ein Diffeomorphismus.
- $\lambda_3(E) = \lambda_3(\psi(U))$.
- $|\det D\psi| = |a\,b\,c|\, r^2 \cos\theta$ und sei K die Kugel mit Radius 1, dann gilt mit der Transformationsformel

$$\lambda_3(E) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 |a\,b\,c|\, r^2 \cos\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$= a\,b\,c \cdot \lambda_3(K) = |a\,b\,c| \cdot \frac{4}{3}\pi$$

Torus-Koordinaten

1. Der Torus T ist die rotierte Vollscheibe

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ 0 \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \mid \rho \in [0,r], \theta \in [0,2\pi] \right\}$$

um die z-Achse.

2. Analog zur Kugel erhält man durch

$$\psi(\varphi,\theta,\rho) := M(\varphi)\cdot S(\theta,\rho) = \begin{pmatrix} (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi \\ (R+\rho\cos\theta)\sin\varphi \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

einen Diffeomorphismus zwischen $U = (0,2\pi)\times(0,2\pi)\times(0,r)$ und $\psi(U)\subset T$, sodass $\lambda_3(T) = \lambda_3(\psi(U))$ gilt.

Übungsaufgabe

Berechne das Volumen des Torus T mit den Torus-Koordinaten.

Lösung

Für $|\det D\psi|$ erhält man $\rho(R+\rho\cos\theta)>0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_3(T)=\lambda_3(\psi(U)) &= \int_U \rho(R+\rho\cos\theta)d\lambda_3\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho(R+\rho\cos\theta)d\rho d\theta d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}R+\frac{r^3}{3}\cos\theta d\theta d\varphi\\
&= \int_0^{2\pi} r^2\pi R d\theta d\varphi = (\pi r^2)\cdot 2\pi R.
\end{aligned}$$