Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Dr. A. Fauck, Dr. D. Agostini, Dipl. I. Schwarz,
J. Hauber, M. Majchrzak

Analysis I*
WiSe 2018/19

Übungsblatt 4

Schriftliche Abgabe: Dienstag 13. November 2018, bis 13:15 vor der Vorlesung!
Schreiben Sie bitte jede Lösung auf ein extra Blatt!
Schreiben Sie auf jede Lösung ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Übungsleiter + ev. Zeit)

Aufgabe 4.1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$,

b) $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x-y|}$,

c) $\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}$.

Aufgabe 4.2 (3+3 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. unten beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Entscheiden Sie auch, ob diese angenommen werden.

$$A := \left\{2^{-n}n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B := \left\{\frac{1}{a} + (-1)^n \,\middle|\, a > 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 4.3 (3+5 Punkte)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte und nicht leere Mengen reeller Zahlen Zeigen Sie:

a) Die Menge $A \cup B$ ist beschränkt und es gilt $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, sowie $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

b) Ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist $A \cap B$ beschränkt und es gilt: $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$, sowie $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$. Geben Sie für den Gleichheits- und den Ungleichheitsfall jeweils ein Beispiel an.

Aufgabe 4.4 (2+2 Punkte)

a) Wir betrachten $n \in \mathbb{N}$ abzählbare Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$ und setzen

$$A := A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \left\{(a_1, a_2, ..., a_n) \,\middle|\, a_i \in A_i \text{ für } i = 1, 2, ..., n\right\}$$

Ist A abzählbar oder überabzählbar? (Mit Beweis!)

b) Es seien abzählbar viele Menge B_k, $k \in \mathbb{N}$, gegeben, von denen jede abzählbar ist. Entscheiden Sie, ob

$$B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = B_1 \cup B_2 \cup .. \cup B_k \cup ...$$

abzählbar oder überabzählbar ist. (Mit Beweis!)

Schriftliche Zusatzaufgabe 4.Z (3 Punkte)
Zeigen Sie: Die Menge der unendlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ist überabzählbar (und damit auch die Menge der unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$).

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen.

Aufgabe 4.A

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. unten beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Entscheiden Sie auch, ob diese angenommen werden:

$$A := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N} : nx = n^2 + 1\right\}.$$

b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und beschränkt. Weiter sei

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie: $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Aufgabe 4.B

Zeigen Sie, dass das Archimedische Axiom zusammen mit dem Prinzip der Intervallschachtelung äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom ist.

Aufgabe 4.C

Zeigen Sie:

a) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist endlich oder abzählbar.

b) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge.

c) Seien A und B höchstens abzählbare Mengen. Dann ist auch $A \times B$ höchstens abzählbar.

d) Die Menge $\Sigma(\mathbb{N}) := \{A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ endlich}\}$ ist abzählbar.