Übungsaufgaben[1] „Lineare Algebra und analytische Geometrie"

Serie 5 zum 22.11.01

1. Bestimmen Sie für die nichtausgeartete alternierende Bilinearform $\boldsymbol{b}$ auf dem Standardraum $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
definiert wird, eine symplektische Basis.

2. Bestimmen Sie das Kroneckerprodukt $A \otimes B$ der Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Es seien $\varphi : V \to W$ und $\varphi' : V' \to W'$ lineare Abbildungen der reellen Standardräume $V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, bzw. $W' = \mathbb{R}^2$. Die Homomorphismen φ, φ' werden durch
$$\varphi(x, y) = (-2y, -2x + 2y)\,,$$
$$\varphi'(x, y, z) = (-2x + y + 3z, -x + y + 3z)$$
definiert. Geben Sie die Tensorprodukte der Standardbasen für $V \otimes V'$ sowie $W \otimes W'$ an und bestimmen Sie die Matrix für $\varphi \otimes \varphi' : V \otimes V' \to W \otimes W'$ bezüglich dieser Basen.

4. Wir betrachten den reellen Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
   (1) Geben Sie die Basen $\Lambda^1\mathcal{B}$, $\Lambda^2\mathcal{B}$ und $\Lambda^3\mathcal{B}$ für die Vektorräume $\Lambda^1(V)$, $\Lambda^2(V)$, bzw. $\Lambda^3(V)$ an.
   (2) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der entsprechenden Basen $\Lambda^i\mathcal{B}$, und zwar für
      a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{e}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$ ist, bzw. für

[1] Diese Aufgaben und Informationen zum Inhalt der Vorlesung finden Sie unter der folgenden URL.

http://www.mathematik.hu-berlin.de/~in2math/software/LinAlg.html

b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ ist.

5. Bestimmen Sie die folgenden äußeren Potenzen, und zwar

(1) $\Lambda^2(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ sowie}$$

(2) $\Lambda^3(B)$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$