Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska, Dr. V. Gruhne

4. Juni 2013

Einführung in die Numerik
Serie 9

Die Lösungen der Aufgaben 1 und 2 sind zu Beginn der Vorlesung am 18.06.2013 abzugeben.

Aufgabe 1 ((gewichtete) Gauß-Approximation)

Gegeben sind die Hermite-Polynome $H_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ gemäß

$$H_n(x) := (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit den Startwerten $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$.

(b) Bestätigen Sie, dass

$$\widetilde{H}_n(x) := \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Orthonormalpolynome zum Gewicht $\omega(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ darstellen, indem Sie nachweisen, dass gilt

$$\left(\widetilde{H}_i(x), \widetilde{H}_j(x)\right)_\omega := \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \widetilde{H}_i(x) \widetilde{H}_j(x) \, \mathrm{d}x = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \ldots.$$

Hinweis: Nutzen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

(c) Ermitteln Sie explizit die Polynome $\widetilde{H}_0(x)$, $\widetilde{H}_1(x)$ und $\widetilde{H}_2(x)$.

(d) Ermitteln Sie die Bestapproximation $f(x) = x^3$ $(x \in (-\infty, \infty))$ unter Verwendung der gewichteten Gauß-Approximation mit dem Gewicht $\omega(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ durch die ersten drei normierten Hermite-Basispolynome und bestimmen Sie den Approximationsfehler in der gewichteten L^2-Norm.
Hinweis: Nutzen Sie

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{5}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 2

Stellen Sie die Funktion

$$f(x) = \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|^{1/n}$$

in den Punkten $\widetilde{x}_j = \frac{1}{2}(x_{j+1} + x_j)$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ für $n = 10,\ 20,\ 100$ grafisch dar. Verwenden Sie

(a) die Knoten $x_j = -1 + jh$, $h = \frac{2}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$

(b) die Knoten $x_j = \cos\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}$, $j = 0, 1, \ldots, n$

Stellen Sie sicher, dass Ihre grafische Darstellung beschriftet ist und eine Legende aufweist. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 (Approximation)

Es sei $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln x$.

(a) Bestimmen Sie diejenige lineare Funktion, $p_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1$, die die Funktion f im quadratischen Mittel am besten approximiert. Wie groß ist der Approximationsfehler?

(b) Verwenden Sie den Alternantensatz, um die lineare Funktion $p_2(x) = \alpha_2 x + \beta_2$, die die Funktion f im Sinne der Maximumsnorm am besten approximiert, zu finden. Wie groß ist der maximale Fehler? Vergleichen Sie mit dem maximalen Fehler von $f(x) - p_1(x)$.

Aufgabe 4 (Bestapproximation)

Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/\epsilon}$, $\epsilon > 0$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das konstante bestapproximierende Polynom von f bezüglich der L^2-Norm.

(b) Verwenden Sie den Alternantensatz von Tschebyscheff um die Bestapproximation zur Maximumnorm zu finden.

(c) Vergleichen Sie beide Resultate im Grenzfall $\epsilon \to 0$.