Aufgabe 1. Zeige, daß $\mathcal{R} \subseteq (\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ ein Unterring ist genau dann, wenn
(i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
(ii) $A, B \in \mathcal{R} \implies B \setminus A \in \mathcal{R}$
(iii) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$

Aufgabe 2. Sei X eine unendliche Menge. Zeige, daß

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra bildet.

Aufgabe 3. (a) Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Funktion und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y, dann bildet $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ eine σ-Algebra auf X.
(b) Sei $g : X \to Y$ eine beliebige Funktion und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, dann bildet $\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Y. Was geht alles schief, wenn man anstatt dessen $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ betrachtet?

Aufgabe 4. Sei X eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Partition ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i \in I} A_i = X$) von X. Zeige:
(a) die von $(A_i)_{i \in I}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$ besteht genau aus den Mengen der Form $\bigcup_{i \in J} A_i$ mit $J \subseteq I$. Die Mengen A_i heißen dann die *Atome* der σ-Algebra $\mathcal{A}$.
(b) $\mathcal{A}$ ist überabzählbar, wenn I unendlich ist.

Aufgabe 5. Sei X eine beliebige Menge. Bestimme die von der Menge $\mathcal{E} = \{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugte σ-Algebra.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X und $E \in \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Menge. Zeige, daß

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) = \{(A \cap E) \cup (B \cap E^c) : A, B \in \mathcal{A}\}$$

Aufgabe 7. Die reellen Zahlen $x \in]0,1[$ haben eine Dezimaldarstellung $0.x_1x_2\cdots$ die eindeutig ist, wenn nur Darstellungen erlaubt sind, die nicht in 9 periodisch enden, d.h., anstatt $0.x_1x_2\cdots x_n999\cdots$ wird wird $0.x_1x_2\cdots x_n'$ geschrieben, wobei die letzte Stelle $x_n' = x_n + 1$. Zeige, daß die folgenden Mengen Borelmengen sind:

(a) Alle Zahlen, in denen die Ziffer 2 mindestens einmal vorkommt.

(b) Alle Zahlen, in denen die Ziffer 2 unendlich oft vorkommt.

Sind diese Mengen G_δ? F_σ?

Aufgabe 8. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeige mit dem Prinzip der guten Mengen, daß auch $\alpha + \beta A = \{\alpha + \beta x : x \in A\}$ eine Borelmenge ist.

Aufgabe 9. Sei X überabzählbar und

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid E \text{ abzählbar oder } X \setminus E \text{ abzählbar }\}$$

die σ-Algebra aus Übung 2. Zeige, daß die Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Maßeigenschaften erfüllt.

Aufgabe 10. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf $\mathcal{P}(X)$ und $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ ein Inhalt mit $\mu(X) < \infty$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(1) μ ist von oben stetig bei $\emptyset$: Wenn $A_n \searrow \emptyset$, dann gilt $\lim \mu(A_n) = 0$.

(2) μ ist σ-additiv: sei $E_n \in \mathcal{R}$ eine disjunkte Folge mit $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$, dann ist $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Aufgabe 11. Betrachte die natürlichen Zahlen mit der Mengenfunktion

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [1, N]).$$

Sei $\mathcal{R}$ das System aller Mengen $A \subset \mathbb{N}$, für die der Grenzwert existiert.

(a) Zeige, daß $\mathcal{R}$ abgeschlossen ist bezüglich Komplement und disjunkten Vereinigungen.

(b) Bestimme eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, sodass $\mu(A)$ nicht existiert

(c) Zeige, dass $\mathcal{R}$ keine σ-Algebra ist.

(d) Zeige, dass die Mengenfunktion μ additiv aber nicht σ-additiv ist.

Aufgabe 12. Welche der folgenden Mengenfunktionen $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ sind äußere Maße? Bestimme ggf. die σ-Algebra der meßbaren Mengen.

(a) $X = \mathbb{N}$, $\mu(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(A \cap \{1, \cdots, n\})$

(b) X beliebig, $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \\ 1 & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$

(c) X unendlich, $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| < \infty \\ 1 & \text{für } |A| = \infty \end{cases}$

(d) X überabzählbar, $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & \text{für } |A| > \aleph_0 \end{cases}$

Aufgabe 13. Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *σ-endlich*, wenn $\exists (E_n) \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ und $X = \bigcup_n E_n$.
Zeige, daß in einem σ-endlichen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge $\{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ höchstens abzählbar sein kann.

Aufgabe 14. Sei $A_0 = [0, 1]$. Bilde A_1 durch Herausnehmen des offenen Intervalls $]1/3, 2/3[$, $A_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ usw: Ist A_n gegeben (eine Vereinigung von 2^n disjunkten, abgeschlossenen Intervallen, so ergibt sich A_{n+1} durch Herausnehmen der offenen Mittelstücke der Länge $1/3^{n+1}$ aus jedem einzelnen Intervall.
Sei $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
(a) Berechne das Lebesguemaß $\lambda(A)$.
(b) Zeige, daß

$$A = \left\{ x \mid x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}, a_j \in \{0, 2\} \right\}$$

(c) Zeige, daß A überabzählbar ist.

Aufgabe 15. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Meßraum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.
Zeige: Wenn f meßbar ist, dann ist sowohl $f^+ = \max(f, 0)$ als auch $f^- = -\min(f, 0)$ meßbar.
Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 16. (a) Zeige, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist.
(b) Zeige, dass $\frac{df}{dx}$ Borel-meßbar ist, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 17. Seien $(X, \mathcal{A}_1, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_2, \nu)$ Maßräume mit den Vervollständigungen $(X, \bar{\mathcal{A}}_1, \bar{\mu})$ und $(Y, \bar{\mathcal{A}}_2, \bar{\nu})$. Weiters sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \to (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar und es gelte für jede ν-Nullmenge $C \in \mathcal{A}_2$ $\mu(f^{-1}(C)) = 0$. Zeige: Die Abbildung $f : (X, \bar{\mathcal{A}}_1) \to (Y, \bar{\mathcal{A}}_2)$ ist meßbar.

Aufgabe 18. Zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ (gekürzter Bruch mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

meßbar ist.

Aufgabe 19. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty[$ eine meßbare Funktion. Zeige:

(a) f ist genau dann μ-integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu\left(\left\{x \in X \mid 2^n < f(x) \leq 2^{n+1}\right\}\right)$$

konvergiert.

(b) Wenn $\mu(X) < \infty$ gilt, dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(\{x \in X \mid f(x) > n\}\right)$$

konvergiert. Was kann schiefgehen, wenn $\mu(X) = \infty$?

Aufgabe 20. Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ der in Ü 12.d bestimmte Maßraum (konstruiert aus $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit dem äußeren Maß $\mu^*(\mathcal{A}) = 1$ wenn $|A| > \aleph_0$ und $\mu^*(A) = 0$ sonst).

(a) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind meßbar?

(b) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind integrierbar?

(c) Bestimme für diese f das Integral $\int f \, d\mu$.

Aufgabe 21. (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt $f > 0$ f.ü. $\iff$ $\int_A f \, d\mu > 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$.

(b) Sei $f : [0, 1] \to [0, \infty[$ stetig und es gelte $\int_U f(x) \, dx > 0$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq [0, 1]$. Zeige oder widerlege: Das Lebesgue-Maß von $\{x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$ ist gleich 0.

Aufgabe 22. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_0^+$ eine meßbare Funktion. Zeige, daß durch

$$\nu(E) := \int_E f\,d\mu, \qquad E \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf Ω definiert wird.

Aufgabe 23. Berechne den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,dx$$

(a) mit und (b*) ohne Maßtheorie[1].

Aufgabe 24. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(X) < \infty$. Sei f meßbar mit $0 < \|f\|_\infty < \infty$ und $\alpha_p = \int |f|^p\,d\mu$. Zeige, daß

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p}$$

Aufgabe 25. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbare Funktionen.
(a) Zeige, daß $\operatorname{ess\,sup}(f + g) \leq \operatorname{ess\,sup} f + \operatorname{ess\,sup} g$
(b) Sei $f = g$ μ-f.ü. und f eine stetige Funktion. Zeige, daß $\operatorname{ess\,sup} f = \operatorname{ess\,sup} g = \sup f$.

Aufgabe 26. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f \in L_{1,\mathbb{C}}(X, \mu)$ und $S \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, sodaß $\forall E \in \mathcal{A}$ gilt

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \in S.$$

Zeige, daß $f(x) \in S$ für fast alle x.

Aufgabe 27. Sei $1 \leq p < q < \infty$. Gib nichttriviale Beispiele eines Maßraums $(X, \mathcal{A}, \mu)$ an, mit der Eigenschaft daß
(a) $L^p(X) = L^q(X)$
(b) $L^p(X) \subseteq L^q(X)$
(c) $L^p(X) \supseteq L^q(X)$
(d) weder $L^p(X) \subseteq L^q(X)$ noch $L^p(X) \supseteq L^q(X)$.
Zusatzfrage: Finde Bedingungen, unter denen die Inklusionen strikt sind.

Aufgabe 28. Vergleiche

- gleichmäßige Konvergenz
- punktweise Konvergenz f.ü.
- fast gleichmäßige Konvergenz
- Konvergenz im Maß
- Konvergenz bzgl. $\|\ \|_p$, $1 \leq p \leq \infty$

für die Maßräume
(a) $X = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$
(b) $X = \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) = 1$

[1]Fleißaufgabe!

Aufgabe 29. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Zeige, daß durch

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu$$

eine vollständige Metrik auf dem Raum der meßbaren reellen Funktionen (modulo Nullmengen) definiert wird und daß die Konvergenz bezüglich dieser Metrik genau der Konvergenz im Maß entspricht.

Aufgabe 30. Sei ν ein signiertes Maß auf einem Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Zeige, daß

$$\begin{aligned}
\nu^+(A) &= \sup\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\} \\
\nu^-(A) &= -\inf\{\nu(B) \mid B \in \mathcal{A}, B \subseteq A\} \\
|\nu|(A) &= \sup\Big\{\sum_{k=1}^{n} |\nu(A_k)| \mid A = A_1 \uplus A_2 \uplus \cdots \uplus A_n\Big\} \\
&= \sup\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} |\nu(A_k)| \mid A = \biguplus_{k=1}^{\infty} A_k\Big\}
\end{aligned}$$

wobei $\nu = \nu^+ - \nu^-$ die Hahn-Jordan-Zerlegung ist und $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ die Totalvariation bezeichnet.

Aufgabe 31. Sei μ ein Maß und ν ein signiertes Maß. Zeige
(a) Wenn $\nu_1 \perp \nu_2$, dann auch $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.
(b) Wenn $\nu_1 \perp \mu$ und $\nu_2 \perp \mu$, dann auch $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

Aufgabe 32. Bestimme jeweils die Lebesgue-Zerlegung von ν bezüglich μ und die Radon-Nikodým-Dichte des stetigen Anteils. Bestimme außerdem $\int_0^3 x\, d\mu(x)$ und $\int_0^3 x\, d\nu(x)$.
(a) $\nu = \delta_0 + 2\delta_1 + 3\delta_3$ und $\mu = \delta_0 + \delta_2 + \delta_3 + \chi_{[2,5]}\lambda$.
(b) Sei

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \\ 3x^2, & 1 < x \leq 2 \\ 13, & x > 2 \end{cases}$$

und $\nu([-\infty, x)) = F(x)$, sowie $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.